FLAT*landia*

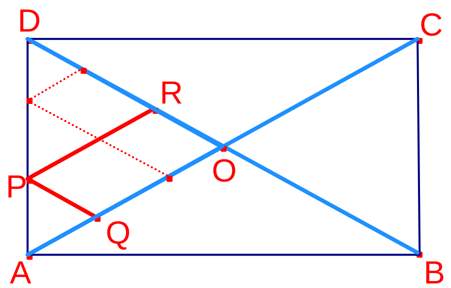
Il problema di Novembre 2005

Nel rettangolo ABCD considerare un punto P su un lato (ad esempio AD) e condurre da P le parallele alle due diagonali in modo da incontrarle in Q e R. Osservare, al variare di P sul lato, come si comporta il perimetro del parallelogrammo PQOR (essendo O il punto d'incontro delle diagonali).

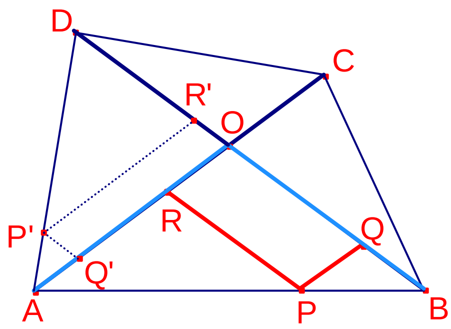
1) La proprietà osservata è vera in ogni parallelogrammo?

2) Può sussistere in un altro tipo di quadrilatero?

Motivare le risposte.



PQ+PR=AO=DO



PQ+PR=AO=BO
P’Q’+P’R’#AO#DO

Commento

Sono giunte undici risposte dalle seguenti scuole

LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
LS “Majorana”, Guidonia (RM)
SM “Brofferio”, Asti (AT)
LS “G. B. Scorza”, Cosenza (CS)
ITI, LST “Berenini”, Fidenza (PR) – due risposte
LS “A. Volta”, Milano (MI)
LC “Sarpi”, Bergamo (BG)
ITCG “Ruffini” Imperia (IM)
LS “P. Farinato”, Enna (EN)
SM “C. A. Dalla Chiesa” S. Genesio (PV)

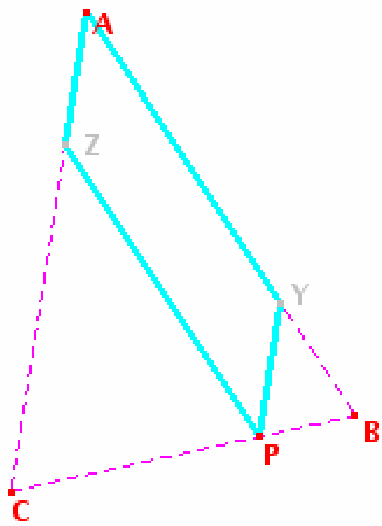
Nel problema, proposto volutamente in modo vago, si chiedeva di osservare il comportamento del perimetro di un parallelogrammo, con i lati paralleli alle diagonali di un rettangolo, al variare di un suo vertice (P) posto su un lato del rettangolo stesso. Si chiedeva inoltre di vedere se tale proprietà si poteva estendere ad altri parallelogrammi e ad altri quadrilateri.
In tutte le risposte si è giunti alla conclusione che il perimetro di quel parallelogrammo è costante e congruente a una diagonale del rettangolo e quasi tutti hanno concluso che (eccetto il quadrato) questa proprietà non vale negli altri parallelogrammi.
Non tutti però sono stati esaurienti nelle loro motivazioni.
Qualcuno ha notato che quel perimetro dipende dalla congruenza delle due semidiagonali del rettangolo e quindi rimane costante anche in altri quadrilateri (ma in generale non più congruente ad una diagonale) per una opportuna scelta delle diagonali e del lato su cui porre il vertice P.
Inoltre c'è chi ha rivolto l'ulteriore osservazione, limitatamente ai parallelogrammi, anche a un caso particolare, cioè P punto medio.
Si fa presente però che le dimostrazioni delle proprietà della geometria sintetica debbono avere carattere generale, a meno che non sia altrimenti richiesto.

Proponiamo all'attenzione di tutti le seguenti risposte:

Giuliano Montelucci, 2G, LS "Majorana"

Per risolvere il problema, bisogna innanzitutto aver presente questa proprietà dei triangoli isosceli:

Se in un triangolo ABC, isoscele in A, viene preso su BC un punto P, e vengono fatte poi passare per P le parallele ai due altri lati (chiamando per comodità Z e Y i punti d'incontro delle parallele con i due lati), il perimetro del parallelogrammo AZPY è uguale alla somma dei due lati uguali AC e AB, indifferentemente dalla posizione di P su BC.



Dimostrazione della proprietà:

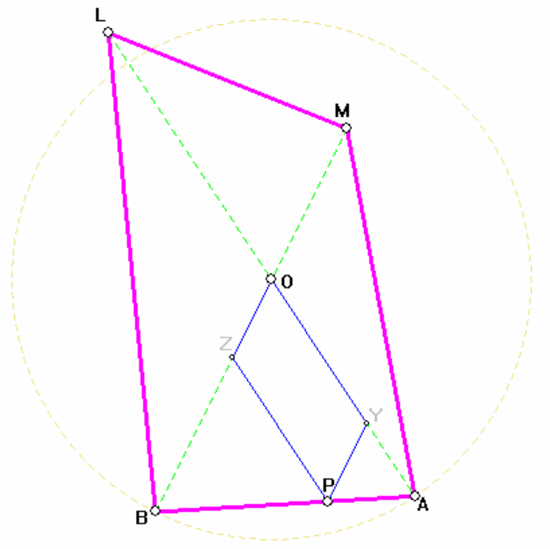
Per le leggi del parallelismo, angolo ACB = angolo YPB, e angolo ABC = angolo ZPC. Ne consegue che i triangoli ZCP e YPB sono entrambi isosceli.
Ora, dato che AZ=PY e ZP=AY, ne segue che AZ+ZP+PY+YA=AB+AC (oppure 2AB, o 2AC, è indifferente), quindi il perimetro di AZPY è costante, indipendentemente dalla posizione di P.

Ora che la proprietà è dimostrata, passo al problema vero e proprio.

Al variare di P sul lato, il perimetro rimane costante (come già dimostrato).

1) No, la proprietà è vera solo nei rettangoli **[e nei quadrati, essendo particolari rettangoli]**, poiché sono gli unici parallelogrammi in cui le diagonali formano triangoli isosceli.

2) Sì, la proprietà osservata sussiste in tutti quei quadrilateri in cui diagonali e lati formano triangoli isosceli. L'unico caso in cui si trovano quattro triangoli isosceli insieme è, come detto, il rettangolo. Ma il discorso è estendibile anche ai quadrilateri in cui si formano uno o due triangoli isosceli **[[…]]**, a patto però che P si trovi su uno dei lati che è la base di un triangolo isoscele, come in figura:



Nella costruzione qui sopra OA=OB, e quindi essendo OAB isoscele la proprietà del perimetro OZPY è vera. La lunghezza di OM e OL non ha comunque influenza sul triangolo OAB.

Classe 3F, SM “Angelo Brofferio”

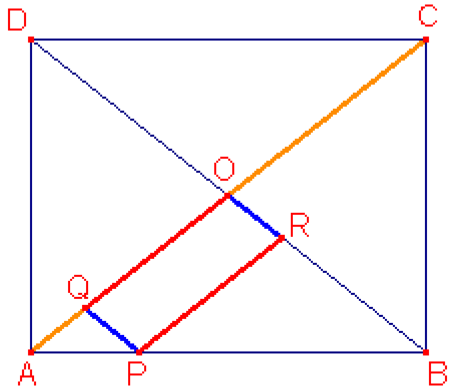
Questi studenti, dopo aver osservato e giustificato la proprietà del perimetro, hanno risposto alla domanda sul generico quadrilatero per fare poi discendere da questa risposta quella sui parallelogrammi.

Soluzione

Indagine grafica

Abbiamo realizzato la figura con Cabri per scoprire il comportamento del perimetro del parallelogrammo al variare di P su AB.
Abbiamo costruito il rettangolo ABCD e il parallelogrammo OQPR; successivamente abbiamo riportato sulla retta s un segmento congruente a AC e sulla retta r i segmenti PQ, OQ, OR e PR, posizionandoli uno adiacente all'altro.

Trascinando il punto P sul lato AB si può vedere che il perimetro di PQOR rimane costante ed è congruente alla lunghezza della diagonale del rettangolo. Dopo esserci convinti della proprietà, abbiamo cercato una spiegazione.



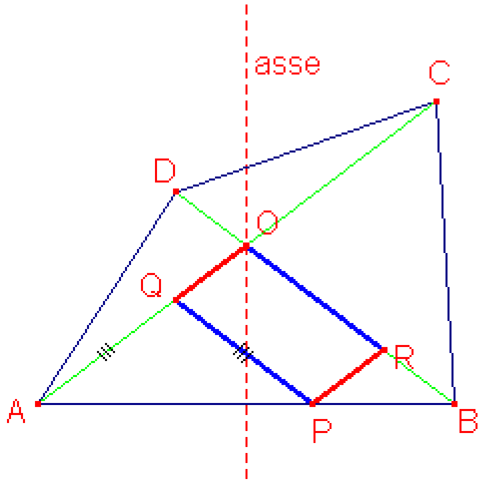
Giustificazione teorica:

Abbiamo considerato i due triangoli AOB e AQP; essi sono simili per costruzione (1° criterio di similitudine).
Essendo AO=OB segue che AQ = QP.
Aggiungendo a entrambi i termini QO si ottiene:

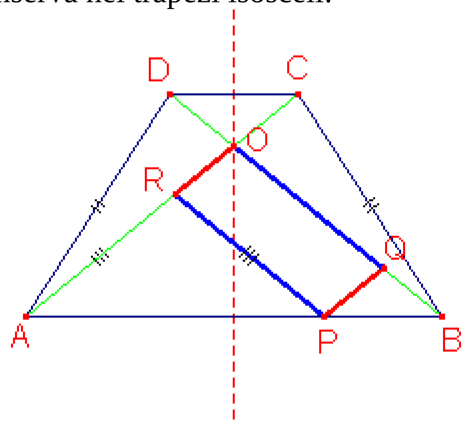
AQ + QO = QP + QO,
cioè:
AO = p(PQOR)
Moltiplicando entrambi i termini per 2 si ottiene:
2*AO = 2p(PQOR)
cioè:
AC = 2p(PQOR)

2) Affinché il perimetro del parallelogramma PQOR resti costante al variare di P su AB deve risultare AO = OB.

Solo i quadrilateri ABCD che hanno il punto d'incontro delle diagonali O sull'asse di AB mantengono la proprietà.
In questi quadrilateri il perimetro di PRQO è costante al variare di P su AB e è congruente a 2AO.



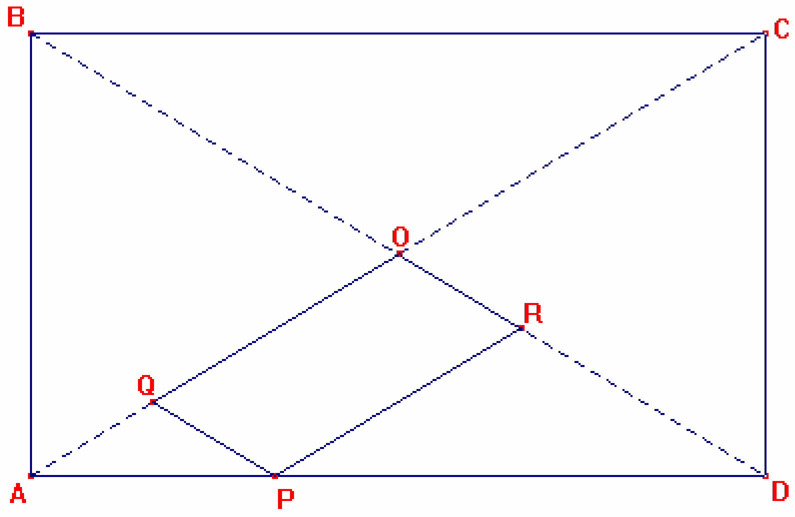
In particolare la proprietà si conserva nei trapezi isosceli:



1) Gli unici parallelogrammi che hanno il punto d'incontro delle diagonali sull'asse della base sono i rettangoli **[e quindi anche i quadrati]**, infatti nei parallelogrammi le diagonali si bisecano scambievolmente e se AO = OB, anche DO = OC.

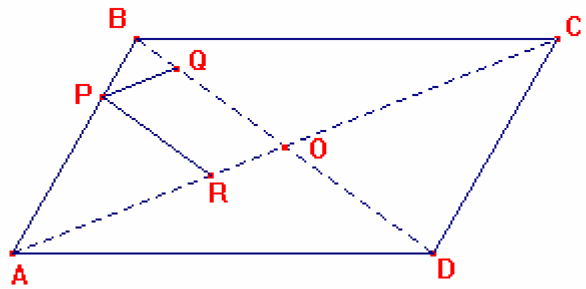
Alfonso Scarpino,1G, LS “G. B. Scorza”

1.



Il perimetro del parallelogrammo PQOR è uguale alla somma delle due semidiagonali, cioè AO e DO in figura, rispettivamente (e quindi, nel caso del rettangolo, alla lunghezza di una diagonale).

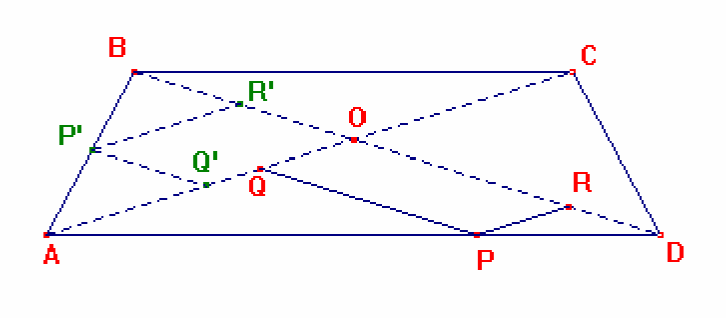
Infatti, consideriamo il triangolo AOD: esso è isoscele di base AD perché ha due lati congruenti (AO e DO) in quanto metà delle diagonali del rettangolo e pertanto gli angoli OAD e ODA saranno congruenti. Nel triangolo AQP il lato QP è parallelo al lato OD e quindi gli angoli APQ ed ADO sono congruenti perché corrispondenti rispetto alle parallele QP e DO tagliate dalla trasversale AD; da ciò segue che esso è isoscele per avere gli angoli QAP e QPA congruenti per la proprietà transitiva. Segue quindi che AQ è congruente a QP. Analogamente per il triangolo PRD, da cui RP congruente a RD e da questo la tesi.



In un generico parallelogrammo, le due semidiagonali, per esempio OB ed OA, non sono congruenti e quindi il perimetro del parallelogrammo PQOR varia tra il doppio della più piccola (OB) ed il doppio della più grande (OA) per cui non vale la proprietà sopra evidenziata.

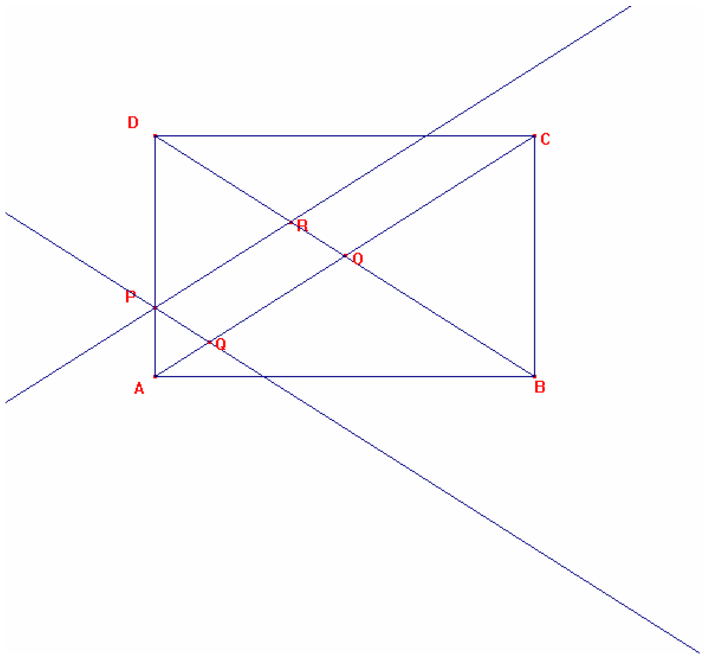
2.

Abbiamo notato che, affinché sia verificata questa proprietà, è necessario che le due parti in cui restano divise le diagonali (per esempio AO e DO) siano tra loro congruenti. Nei quadrilateri questo si verifica nei trapezi isosceli **[non solo]** prendendo però il punto P su una delle due basi.



Gruppo di studenti della classe 5B ginnasiale, LC "Sarpi"

Antongiovanni Flavia, Bertolazzi Ilaria, Carminati Leonardo, Carola Giulia, Pellegrini Simone, Leuzzi Mariagiulia, Pozzetti Gabriele, Serafini Giulia



Hp
A=B=C=D
AB//CD
AD//BC
PR//AC
PQ//BD

PROPRIETA'

Il perimetro del parallelogramma PQOR è congruente alla diagonale del rettangolo ABCD, infatti: gli angoli ODA e OAD sono congruenti in quanto angoli alla base del triangolo AOD che è isoscele poiché OA e OD sono metà di diagonali congruenti per le proprietà del rettangolo.
Inoltre gli angoli QAD e RPD sono congruenti in quanto angoli corrispondenti delle due rette AO e PR, parallele per ipotesi, tagliate dalla trasversale AD.
Per lo stesso motivo **[l'angolo]** RDA è congruente **[all'angolo]** QPA.
Per la proprietà transitiva [gli angoli] QAD=QPA e ODA=RPD quindi i triangoli AQP e RDP sono isosceli per la proprietà del triangolo isoscele; ne consegue che AQ =QP e PR =DR.
Quindi la semidiagonale è congruente al semiperimetro del parallelogramma ORPQ e di conseguenza la diagonale è congruente al suo perimetro.

1) La proprietà osservata non è vera in ogni parallelogramma in quanto in un parallelogramma non rettangolo le diagonali non sono congruenti, e poiché la proprietà osservata è valida per entrambe le diagonali, il perimetro di ORPQ sarebbe congruente a diagonali tra loro non congruenti, ma questo è assurdo e quindi il parallelogramma deve essere un rettangolo **[o un quadrato]** perché la proprietà sia valida.

2) **[[…]]**

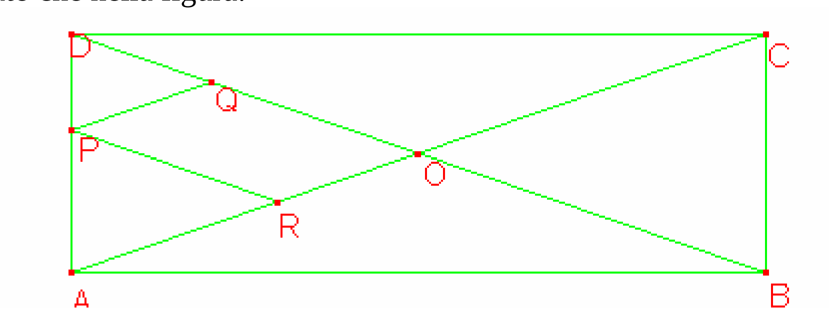
Classe 3A Programmatori, ITCG “Ruffini”

Questi studenti hanno considerato anche il caso particolare in cui P è punto medio. Hanno svolto un lavoro di laboratorio informatico ricorrendo a due diversi software. Alleghiamo il loro file Derive.

Soluzione

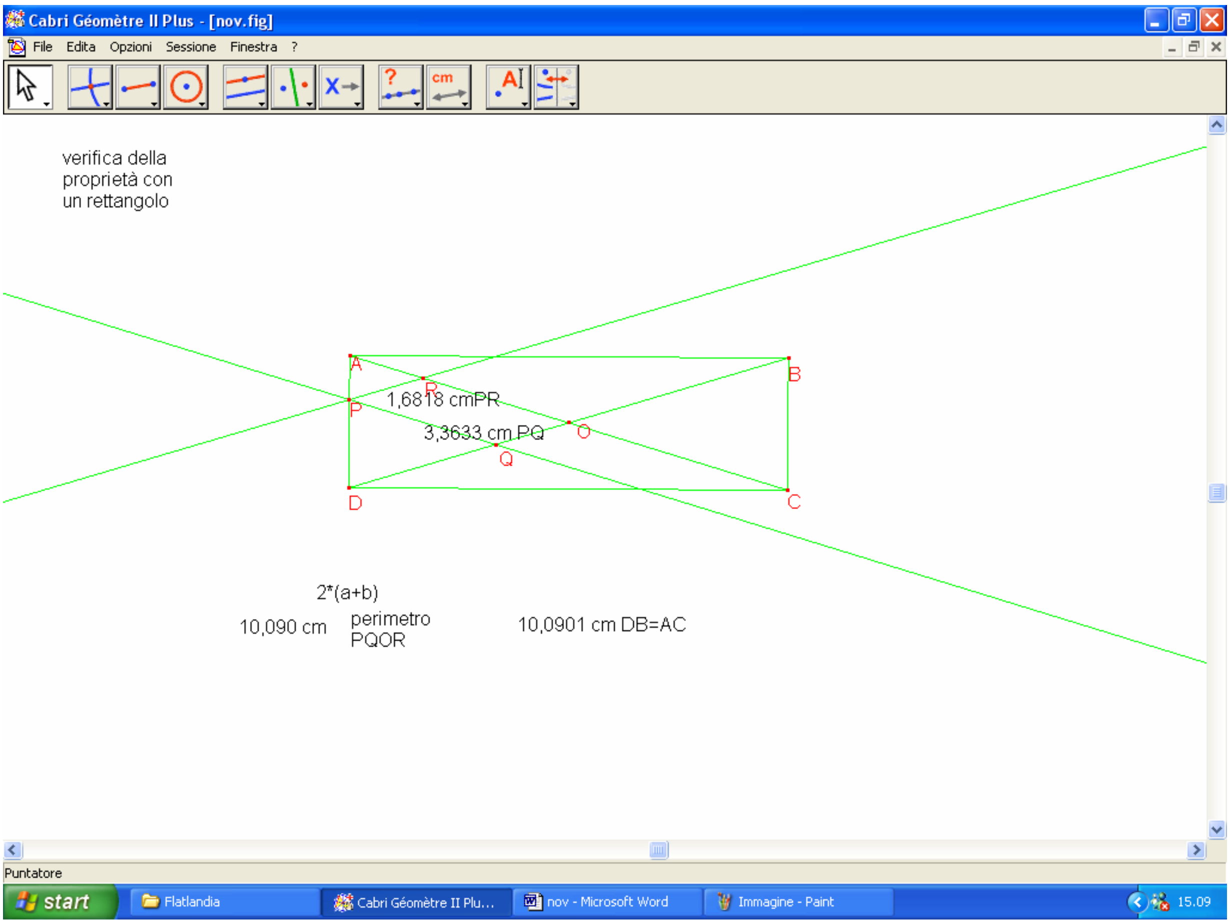
Dopo una serie di tentativi e di soluzioni “cartacee”, abbiamo lavorato nelle ore di laboratorio. Riportiamo di seguito le fasi della nostra attività.

Abbiamo constatato che nella figura:

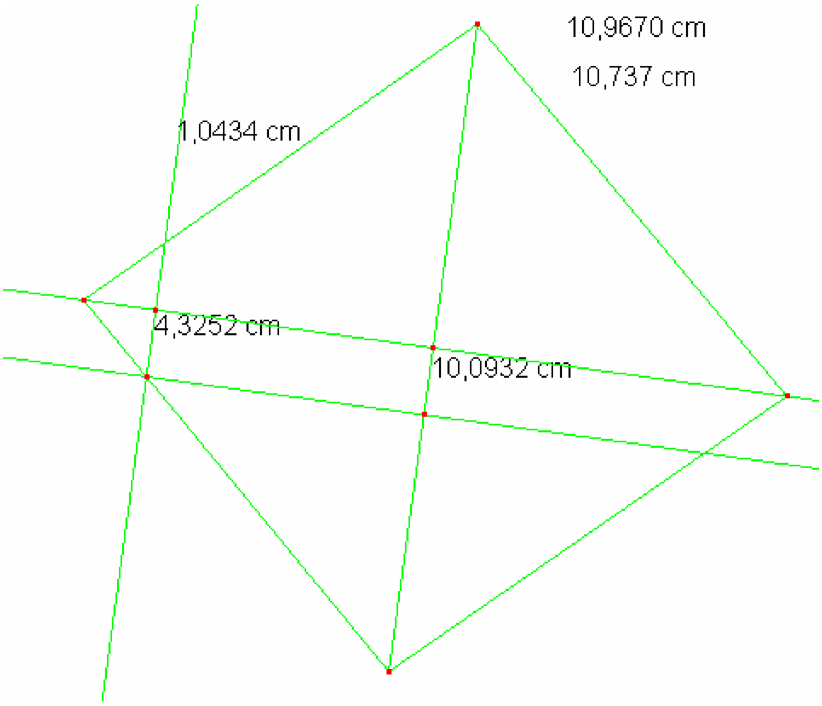


i triangoli DQP e DOA sono simili, così come APR e DOA.
Tenuto conto che il rettangolo ha le diagonali congruenti e che quindi i tre triangoli sono isosceli, ne abbiamo dedotto che il perimetro POQR = 2(PQ+PR)=2(DQ+OQ)=DB=AC

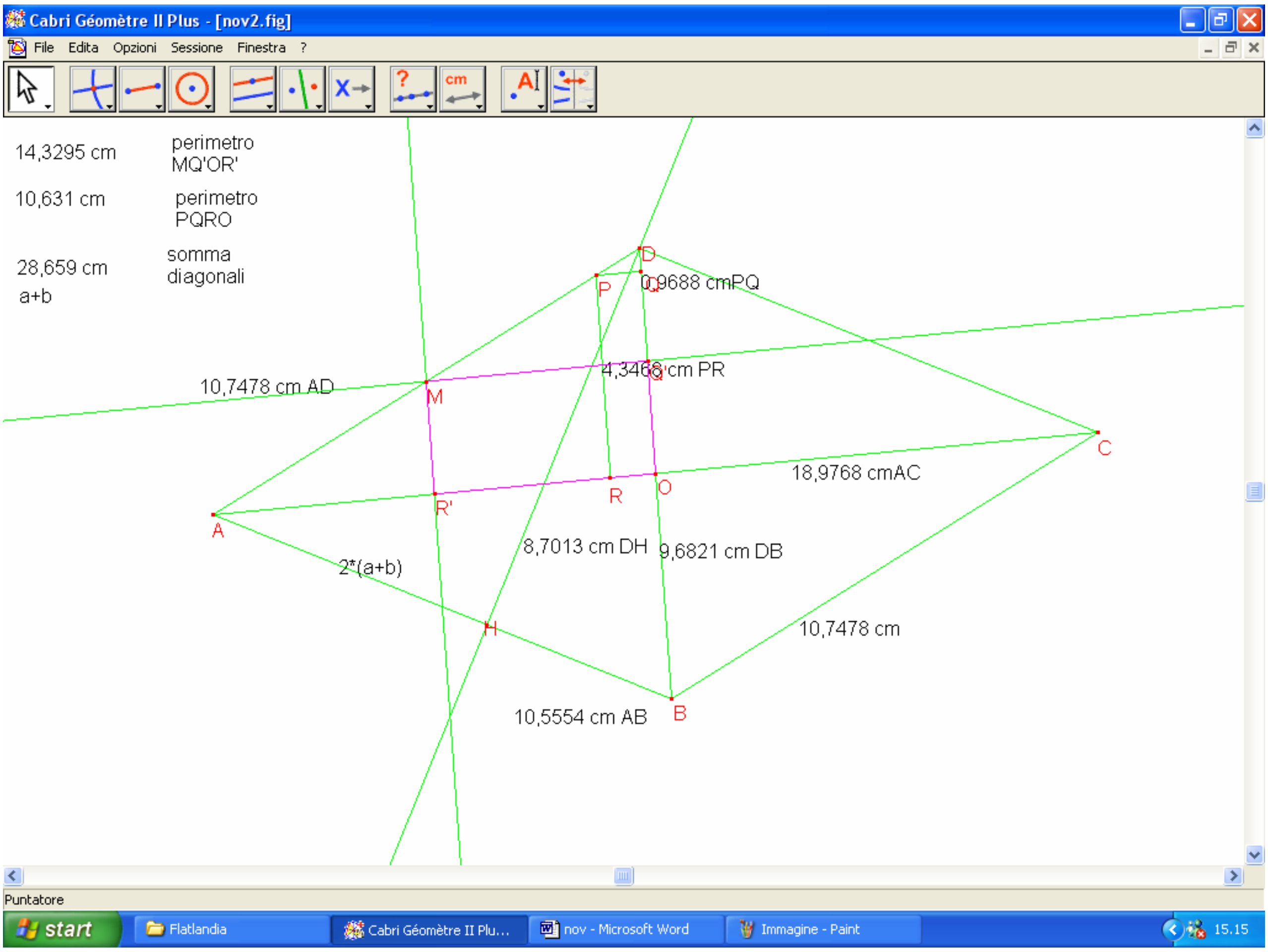
Abbiamo fatto la verifica sperimentale con Cabri. Riportiamo di seguito la figura e alleghiamo il file “rettangolo.fig”



Abbiamo poi esaminato il rombo:



constatando che vale una proprietà analoga, ossia perimetro PQOR = semisomma diagonali soltanto se P è il punto medio di AD. Alleghiamo il file “rombo.fig”



Ancora con Cabri abbiamo controllato tale proprietà su un generico parallelogramma. Presentiamo la figura finale e alleghiamo il file “parallelogramma.fig”:

[[…]]

Abbiamo fatto la dimostrazione sintetica:
se P è punto medio di AD, PQ è la metà di AO e PR è la metà di DO (per il teorema dei triangoli che afferma la congiungente i punti medi di due lati essere la metà del terzo lato).
Abbiamo concluso che:
in tutti i parallelogrammi, il perimetro PQOR è congruente alla semisomma delle diagonali se P è punto medio di AD; nel rettangolo e nel quadrato, questa proprietà vale per qualsiasi punto P scelto su AD.

Abbiamo fatto poi una dimostrazione analitica di questo fatto, usando Derive.

Siamo partiti da un caso numerico, poi abbiamo esteso al caso generale. Riportiamo la figura del caso particolare e il file di Derive generale “verifica_punto_medio_paral.dfw”.
(Vedi sito di Flatlandia per scaricare il file).