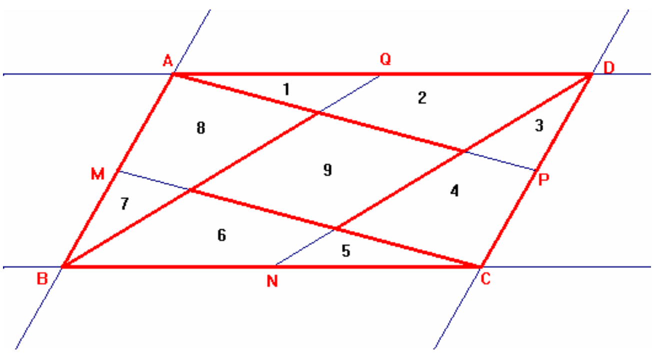
FLAT*landia*

Il problema di Marzo 2006

Siano M, N, P, Q i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA del parallelogrammo ABCD. Tracciati i segmenti MC, AP, ND, QB, individuare nella figura ottenuta una scomposizione del parallelogrammo in cinque poligoni equivalenti.

Motivare le risposte.



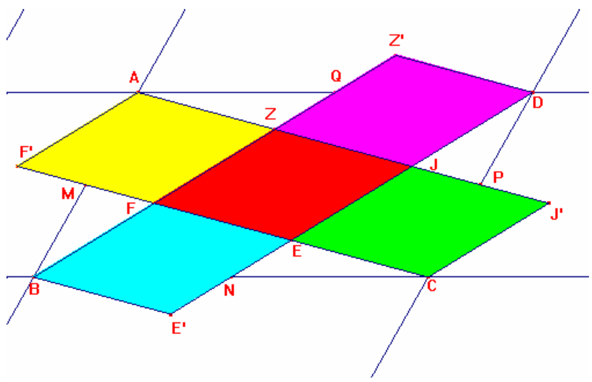


Figure inviate da Francesco Bonalda, Francesca Giacovelli, Alfredo Rivero, Chiara Veronesi, Classe 2S, SM “C.A.Dalla Chiesa”, San Genesio ed Uniti (PV), che così commentano:
abbiamo costruito il parallelogramma su un foglio e poi abbiamo ritagliato i nove poligoni in cui risulta scomposto e ricomponendoli abbiamo ottenuto 5 poligoni congruenti ed equiestesi assemblando i pezzi in questo modo:
$1+2 \cong 3+4 \cong 5+6 \cong 7+8 \cong 9$

Commento

Abbiamo ricevuto sette risposte, di cui due provenienti da una stessa sezione (classe seconda e terza) di scuola media. Ci complimentiamo con questi ragazzi e con la loro insegnante per il continuo interesse dimostrato per la geometria. Per illustrare il testo del problema abbiamo utilizzato la costruzione della classe seconda.

- *LS “Aristosseno”, Taranto (TA)*
- *ITCG “Ruffini”, Imperia (IM)*
- *LS “B. Russel”, Roma (RM)*
- *SM “C.A. Dalla Chiesa”, San Genesio ed Uniti, (PV)*
- *LS “G.B. Scorza”, Cosenza (CS)*
- *ITI,LST “Berenini”, Fidenza (PR)*

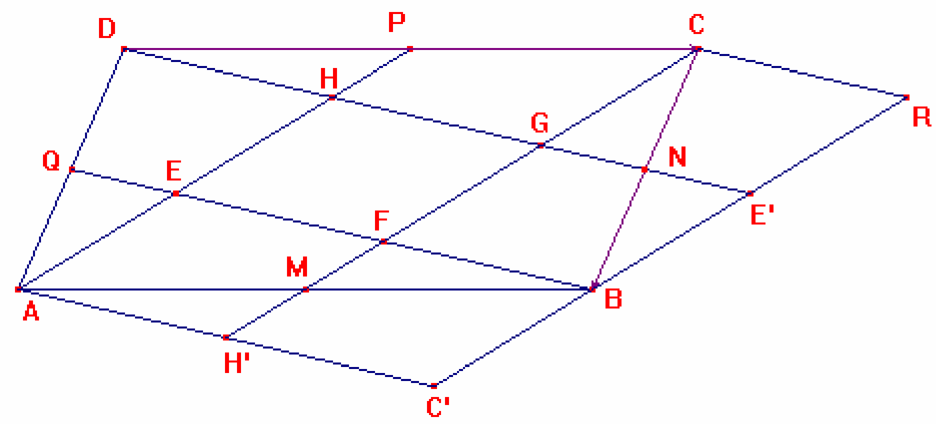
Il problema di questo mese aveva come argomento la equiestensione: si trattava di individuare in un parallelogrammo, opportunamente scomposto, la suddivisione in cinque poligoni equivalenti.
Non era difficile scoprire i cinque poligoni, ma è stato interessante constatare la ingegnosa fantasia degli studenti nell'escogitare percorsi e costruzioni diverse, fra cui il ricorso a "carta e forbici", per giungere alla tesi richiesta. Ingegnosità non sempre supportata da una corretta esposizione e/o giustificazione per alcuni, oppure che ha portato ad eccessive elaborazioni in altri (come, ad esempio, la ulteriore scomposizione della figura in triangoli, che ha contribuito ad appesantire la dimostrazione).

Riteniamo doveroso fare alcune precisazioni:

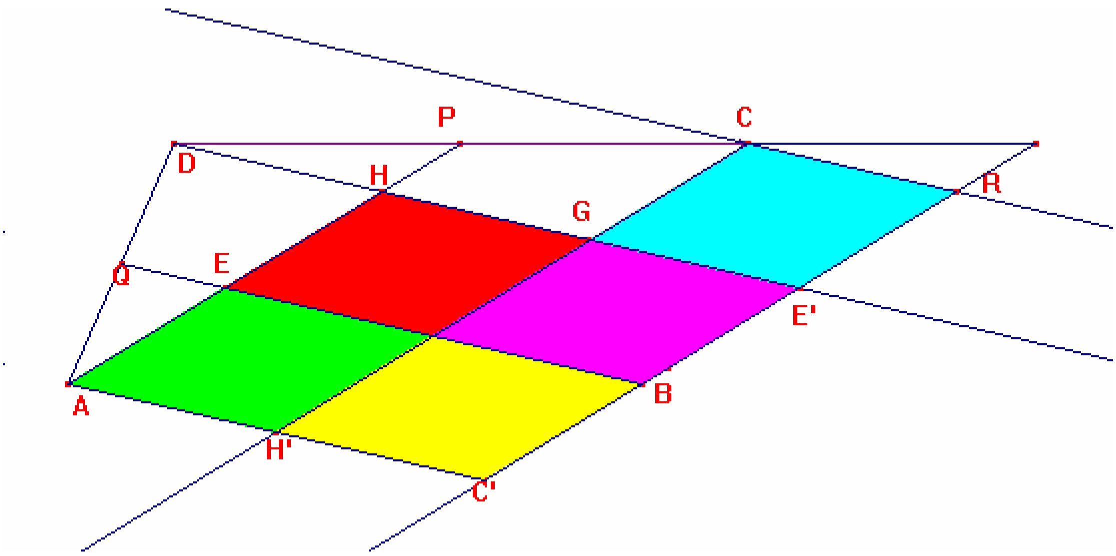
- non sempre sono state sfruttate appieno o in modo corretto le proprietà del parallelismo (ad esempio non basta che due segmenti siano compresi fra rette parallele per affermare che sono paralleli oppure congruenti);
- per utilizzare correttamente una simmetria centrale occorre indicare, oltre al centro, le coppie di punti corrispondenti (questo permette di affermare che il segmento che congiunge due punti è parallelo a quello che congiunge i loro corrispondenti);
- ricordiamo inoltre che ogni triangolo viene diviso in due triangoli equivalenti dalla mediana relativa ad un lato.

NOTA: E' giunta, con una settimana di ritardo, una risposta dall'ITI "G. Ferraris" di S. Giovanni La Punta (CT). L'abbiamo esaminata ugualmente, apprezzata per la precisione e correttezza nella esposizione, anche se un po' ripetitiva; non la proponiamo per rispetto di chi ha osservato la scadenza prevista.

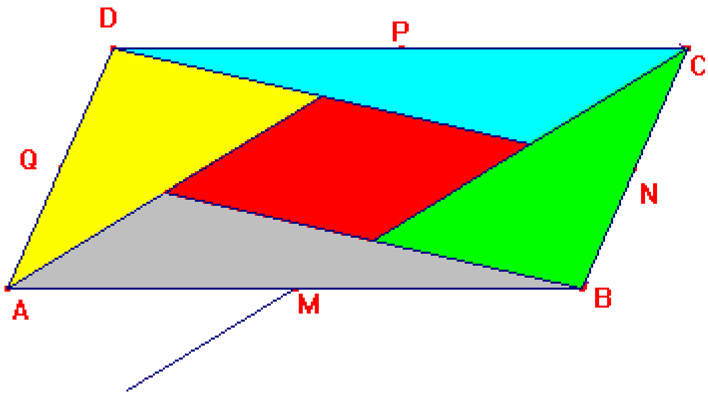
Soluzione proposta da:
Elda Bistika, Giulia Brambati, Erika Dargenio, Monica Maida
Classe 3S S.M. di San Genesio ed Uniti (PV)
Risposta in cui si fa ricorso alla traslazione; corretta nella dimostrazione, con alcune imprecisioni nella esposizione.



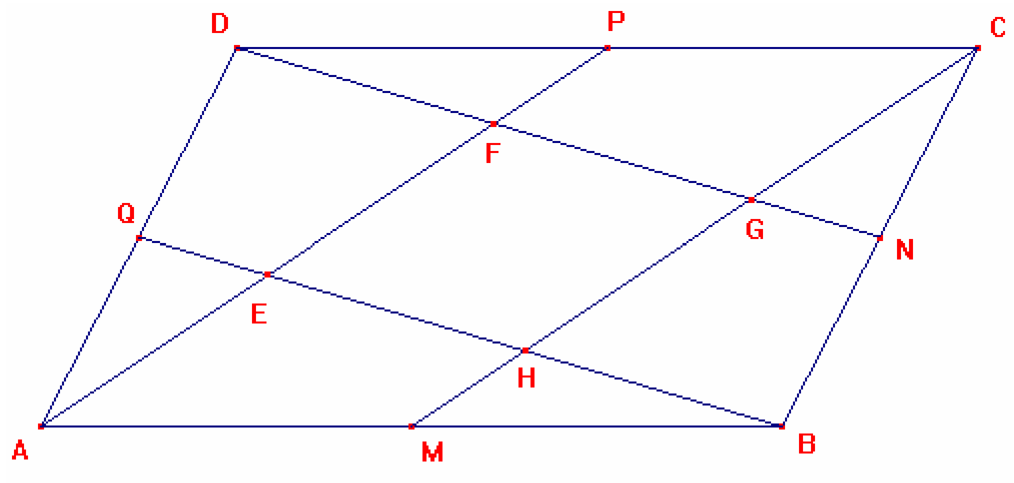
Il quadrilatero DQBN ha due lati uguali DQ=BN perché tutti e due metà dei lati opposti del parallelogramma ABCD e paralleli, quindi è un parallelogramma; per lo stesso motivo anche il quadrilatero AMCP è un parallelogramma perché ha i lati AM e PC uguali e paralleli.
Pertanto la retta QB è parallela a DN e la retta AP è parallela a MC.
Risulta quindi che EFGH è un parallelogramma perché ha due coppie di lati **[[…]]** paralleli.
Consideriamo i triangoli AEB e DCG, essi sono uguali perché hanno un lato e due angoli uguali: AB=DC per ipotesi e gli angoli interni AEB=DGC ed EAB=DCG, infatti AEB=QEH=DHP=DGC (angoli opposti al vertice e angoli corrispondenti formati da rette parallele) e EAB=FMB =DCG (angoli corrispondenti e alterni interni rispetto a due coppie di rette parallele).
Nello stesso modo si può dimostrare l'uguaglianza dei triangoli ADH=CFB.
Trasliamo le seguenti figure:
DCG del vettore CB e ADH del vettore DC.
Si ottengono due parallelogrammi: AEBC' e FCRB per **[[…]]** il parallelismo dei lati corrispondenti nella traslazione.
Consideriamo il parallelogramma AEBC'. Il segmento H'F lo divide in due parallelogrammi congruenti perché MF // AE e MF passante per il punto medio, quindi, per il teorema di Talete, **[[…]]** BF=EF perchè MB=AM.
Si dimostra allo stesso modo l'uguaglianza tra FGE'B=GCRE'.



I parallelogrammi AEFH', H'FBC', FGE'B, GCRE' sono congruenti a EFGH avendo lati uguali AE=AH=FG=GC e EF=FB=DH=HG e coppie di angoli uguali.
Inoltre AEFH' è equiesteso a AEB perché metà del parallelogramma AEBC'; in conclusione si ha:
AEB=DCG è equiesteso a EHGF
Si ha inoltre che:
BFC è equiesteso BFGE' perché metà del parallelogramma BFCR; in conclusione si ha:
BFC=ADH è equiesteso a EHGF.
Per la proprietà transitiva dell'equiestensione si ha:
AEB è equiesteso a DCG che è equiesteso a BFC che è equiesteso a ADH che è equiesteso ad EHGF.

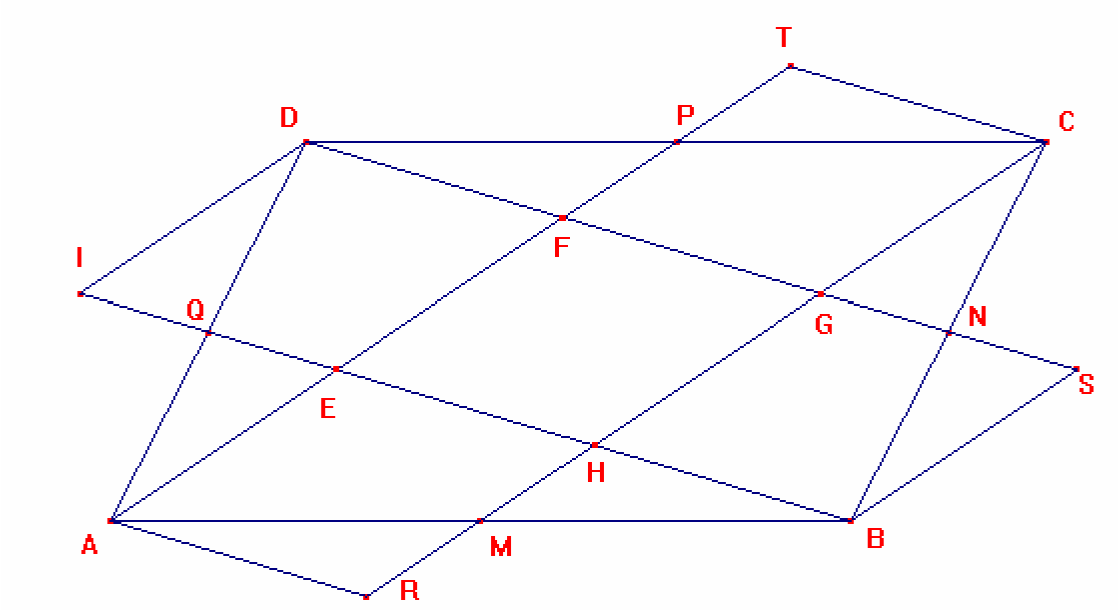


Soluzione proposta da:
Alfonso Scarpino, classe 1G
LS “G.B. Scorza”, Cosenza
Utilizza unicamente le proprietà del parallelismo, ma eccede nella concisione trascurando due necessarie precisazioni.



Il quadrilatero QBND è un parallelogramma perché ha due lati opposti (QD e BN) paralleli e congruenti in quanto metà di lati opposti dello stesso parallelogramma; similmente anche il quadrilatero AMCP è un parallelogramma, per cui i segmenti QB e AP sono paralleli rispettivamente ai segmenti DN e MC. **[Quindi anche EHGF, avendo i lati opposti pralleli, è un parallelogramma]**

Il segmento FP nel triangolo DGC è parallelo al lato GC e passa per il punto medio del lato DC, allora interseca il lato DG nel suo punto medio F, per cui il segmento DF è congruente al segmento FG; analogamente possiamo dimostrare che EH, HG ed AE sono congruenti rispettivamente a BH, GC ed EF.

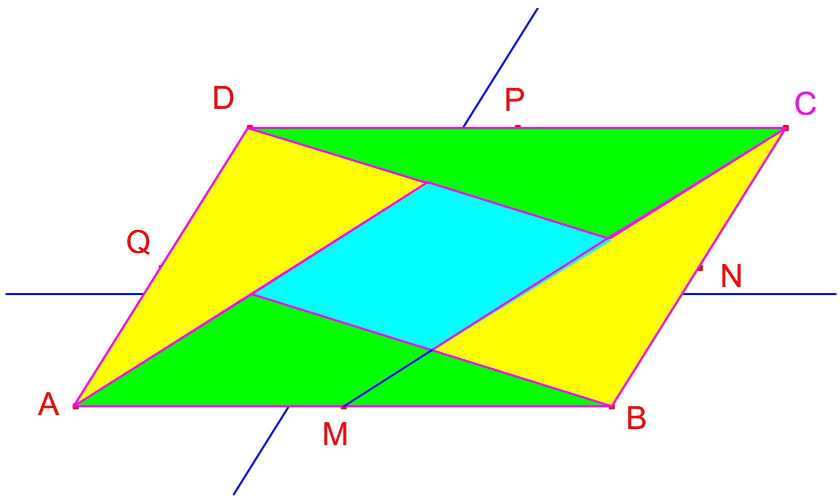


Costruiamo il parallelogramma IEFD di lati EF e DF. Poiché Q è il punto medio del lato AD del triangolo AFD ed il segmento QE è parallelo al lato DF, il segmento QE è la metà di DF, di conseguenza IQ è congruente a QE; l'angolo IQD è congruente all'angolo AQE poiché opposti al vertice. Da tutto ciò deriva che i triangoli AEQ e IQD sono congruenti perché hanno due lati (IQ e QE, e AQ e QD) e gli angoli compresi (IQD e AQE) a due a due congruenti e quindi il parallelogramma IEFD ed il triangolo DFA sono equivalenti. Nello stesso modo si può dimostrare che i triangoli AEB, BHC e GDC sono equivalenti ai parallelogrammi ARHE, HBSG e FGCT, tutti equivalenti a GFEH **[essendo, per costruzione, tutti uguali a EFGH].**

Pertanto il parallelogramma EHGF è equivalente ai triangoli ABE, BHC, GDC e DFA ed insieme individuano una scomposizione del parallelogramma ABCD in cinque poligoni equivalenti.

Soluzione proposta da:
gruppo della classe 2B
ITI,LST "Berenini", Fidenza (PR)

Risolvono il problema tracciando due opportune rette parallele ai lati del parallelogrammo; fanno due affermazioni imprecise nelle motivazioni.



Innanzitutto il quadrilatero OGFE è un parallelogramma perché:
QD è congruente a BN perché Q e N sono i punti medi di lati opposti del parallelogrammo, quindi, **[[…]]** essendo QD e BN segmenti congruenti e paralleli, DN e QB risultano anch'essi paralleli e congruenti **[in quanto lati opposti di un parallelogrammo].** Analogamente AP e MC. Pertanto il quadrilatero OGFE costruito su tali segmenti è un parallelogrammo.

Si conduca da E la parallela a AD che interseca OG in I.
IE è congruente a QD perché segmenti paralleli compresi fra rette parallele **[oppure: perché lati opposti di un parallelogrammo]**. QD congruente a AQ perché Q punto medio quindi IE è congruente ad AQ.

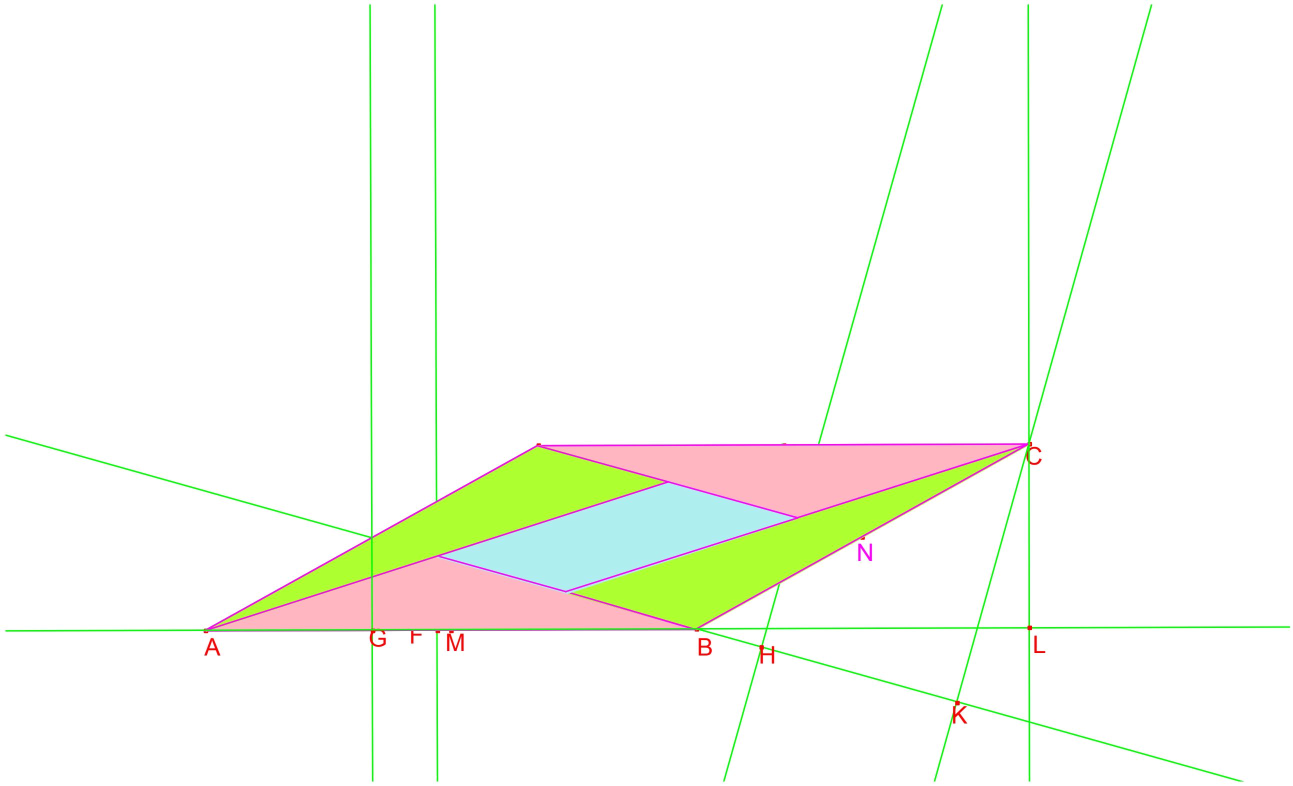
Gli angoli QAO e OEI sono congruenti perchè alterni interni rispetto alle parallele AD e IE tagliate dalla trasversale AE. Gli angoli AQO e OIE sono congruenti perché alterni interni rispetto alle parallele AD e IE tagliate dalla trasversale QI.
Quindi per il secondo criterio di congruenza i triangoli AOQ e OIE sono congruenti.
Il parallelogrammo OGFE si scompone nel triangolo OIE (congruente ad AOQ) e nel trapezio IGFE(congruente a QOED).
Poiché il triangolo AOQ e il trapezio QOED costituiscono una scomposizione del triangolo AED, si conclude che il triangolo AED e il parallelogrammo OGFE sono equivalenti.

Si conduca ora da O la parallela ad AB che interseca GF in L.
Analogamente a quanto visto sopra i triangoli OGL e MBG sono congruenti per il secondo criterio in quanto: OL è congruente a PC perché sta su retta parallela a PC ed è compreso fra rette parallele (OP e LC)
Gli angoli LOE e GBM sono congruenti perché alterni interni (OL parallelo AB, OB trasversale)
Gli angoli OLG e GMB sono congruenti perché alterni interni(OL parallelo AB, ML trasversale).

Pertanto il parallelogrammo OGFE si scompone nel triangolo OGL (congruente al triangolo MGB) e nel trapezio OLFE(congruente al trapezio OGMA).Poiché il triangolo MGB e il trapezio OGMA costituiscono una scomposizione del triangolo AOB, risulta che il parallelogrammo OGFE è anche equivalente al triangolo OAB che per la proprietà transitiva risulta anche equivalente al triangolo ADE.
Ora resta da dimostrare l’equivalenza fra i triangoli GBC e DFC. Il triangolo GBC risulta congruente al triangolo ADE. Infatti BC e AD sono congruenti perché lati opposti del parallelogrammo ABCD, gli angoli DAE e GCB sono congruenti perché formati da rette parallele e discordi. Analogamente gli angoli ADE e CBG sono congruenti perché formati da rette parallele e discordi. Quindi per il secondo criterio di congruenza i triangoli ADE e GBC sono congruenti.
Del tutto analoga la dimostrazione della congruenza , e quindi equivalenza, tra il triangolo DFC e il triangolo OAB.

Soluzione proposta da
Classe 3A programmatori, ITCG “Ruffini”;
Risoluzione un po’ laboriosa, in cui si ricorre al calcolo delle aree.

Facendo riferimento alla figura seguente:



I cinque poligoni equivalenti sono:

- Il parallelogramma RSTU
- Il triangolo TCB
- Il triangolo DCS
- Il triangolo DRA
- Il triangolo AUB

Infatti:
il triangolo AQB è equivalente a CBM in quanto AB=2MB e QG=1/2 CL (similitudine dei triangoli AQG e CBL essendo rettangoli con l’angolo in A e in B corrispondenti, e quindi congruenti, formati dalle parallele AQ e CB tagliate dalla trasversale AB; AQ=1/2CB per costruzione, quindi ½ è il rapporto di similitudine)

→ Area (AQB)= $\frac{AB \cdot QG}{2} = \frac{2MB \cdot \frac{1}{2}CL}{2} = \frac{1}{2} MB \cdot CL =$ Area(CBM)

i triangoli DCN e AQB sono congruenti e quindi equivalenti (avendo DC = AB, gli angoli DCN e BAQ congruenti perché opposti nel parallelogramma ABCD, CN congruente ad AQ per costruzione)
→ DN = QB
analogamente per i triangoli ADP e CBM
→ AP = CM
perciò DNBQ è un parallelogramma, così come APCM ed RSTU
Gli angoli CNS e AQU sono congruenti perché formati da rette parallele a due a due ; così pure gli angoli QAU = SCN
I triangoli AQU e CNS sono congruenti per il II criterio di congruenza
AUB è equivalente ad SNBM perché :
Area (AQB)-Area (AQU) = Area (CBM) – Area (CSN)
→ Area (AUB) = Area (SNBM)
AUTM è equivalente ad SNBT perché :
Area (AUB) = Area (AUTM)+Area(TBM) = Area (SNBM) = Area (SNBT)+Area(TBM) →
Area (AUTM) = Area (SNBT)
Nel triangolo CTB si ha Area (CSN) = 1/3 Area (SNBT) (per un teorema conseguente al teorema della congiungente i punti medi dei lati di un triangolo)
Nel triangolo AUB si ha analogamente Area (TBM) = 1/3 Area (AUTM)
→ Area (CSN) = Area (TBM)
→ Area (AUTM)+ Area (TBM) = Area (SNBT)+ Area (TBM) → Area (AUB)=Area (CBT)
ossia
AUB è equivalente a CBT

RSTU è equivalente a CBT perché: Area(RSTU) =UT .SH = $\frac{TB \cdot 2SH}{2} = \frac{TB \cdot CK}{2}$ =
Area(CBT) (infatti per il teorema di Talete, applicato al triangolo AUB, UT = TB)

Per precisione, aggiungiamo la spiegazione del fatto che Area (CSN) = 1/3 Area (SNBT)
Data la figura seguente, si ha:

Area (CTB) = 4 Area(CSN) (le aree sono in rapporto come i quadrati di due lati omologhi)
Area(TBNS) = $\frac{(TB + SN) \cdot h}{2}$ (con h altezza del trapezio = altezza di CSN relativa a SN)
= $\frac{3}{2} SN \cdot h$
Area(CSN) = $\frac{SN \cdot h}{2}$ =1/3 Area (TBNS)