FLAT*landia*

Il problema di Maggio 2006

Dato un triangolo ABC siano A', B', C' i punti medi di BC, CA, AB

1) Detto O l'ortocentro di A'B'C', H l'ortocentro di ABC, qual è il rapporto fra le misure dei segmenti CH e C'O?
Che cosa rappresenta il punto O nel triangolo ABC?

2) Detta X l'intersezione fra CC' e HO, che cosa rappresenta il punto X nel triangolo ABC?

3) Si può ora dedurre una importante proprietà dei punti notevoli di un triangolo. Quale?

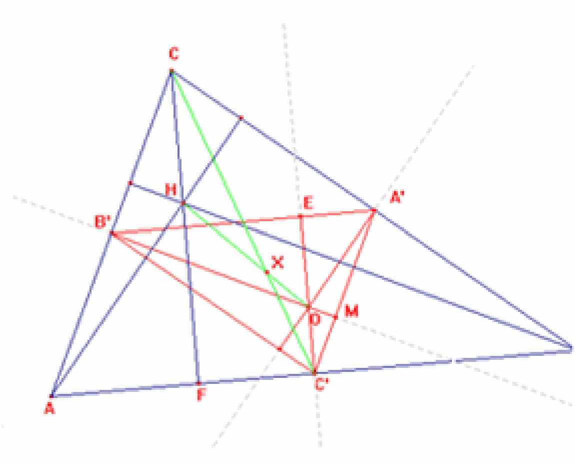


Figura di Elda Bistika, classe 3S, SM “C.A. Dalla Chiesa”

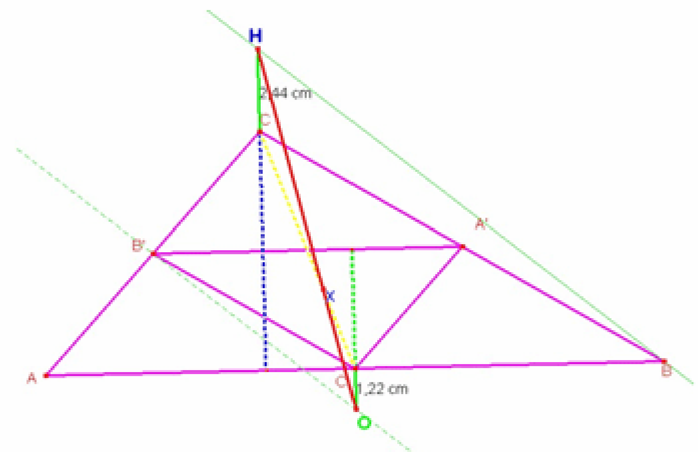


Figura di Ilaria di Maio e Valentina Artusa, classe 3B, IC “Rodari”

Commento

Sono giunte quattro risposte provenienti da tre scuole:

- ***ITCG “Ruffini”, Imperia (IM)***
- ***SM “C.A. Dalla Chiesa”, San Genesio ed Uniti, (PV) – due risposte***
- ***IC “Rodari”, Baranzate (MI)***

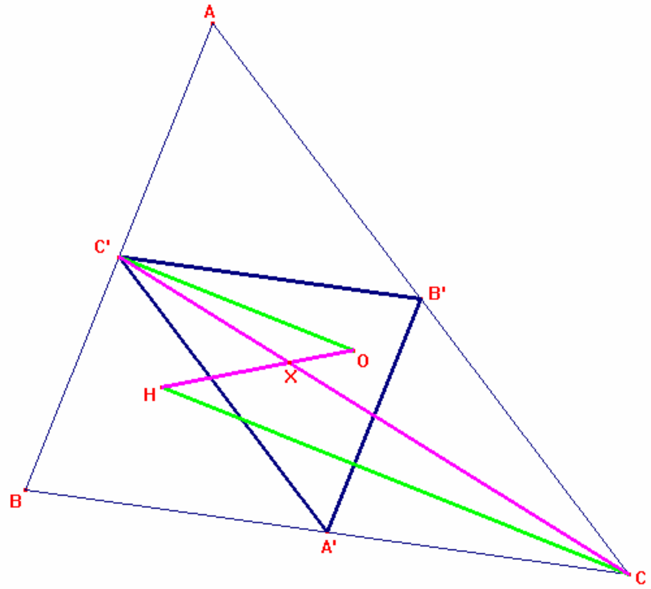
Il problema di questo mese, articolato in tre parti, doveva portare gli studenti a scoprire la retta di Eulero, cioè la nota proprietà dell’allineamento dei tre punti notevoli, ortocentro (H), baricentro (X) e circocentro (O), di un qualunque triangolo e a dimostrare che intercorre un rapporto costante fra le distanze HX e XO.

Gli studenti di scuola superiore hanno risolto il problema per via analitica, utilizzando per i calcoli lo strumento informatico Derive. Se avessero fatto anche qualche considerazione di tipo sintetico avrebbero potuto snellire il loro percorso di calcolo e inoltre intuire la proprietà del rapporto fra HX e XO.
Gli studenti della scuola media hanno invece trattato il problema per via sintetica risolvendo correttamente il primo punto mediante la similitudine. In seguito si sono limitati ad esporre osservazioni verificate con Cabri, ma non giustificate.
Non è stato raccolto il suggerimento contenuto nel primo quesito del problema: quel rapporto, considerando due opportuni triangoli simili, avrebbe portato a rispondere in modo esauriente al secondo e terzo punto. Vedere in proposito le nostre osservazioni inserite nelle risposte.

Per illustrare il problema proponiamo una figura della SM “C.A. Dalla Chiesa”, con triangolo acutangolo, e una della SM “Rodari”, con triangolo ottusangolo.

Soluzione proposta da:
Bonalda, Campi, Giacovelli, Pallestrini, Pimentel, Veronesi,
classe 2S S.M. "C.A. dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti (PV)

E' la sola risposta in cui è stato osservato, ma non giustificato, il rapporto suddetto. Una risposta simile, ma incompleta nel terzo punto, ha inviato Elda Bistika, classe 3S.



1. Unendo i punti A', B', C' nel triangolo ABC si formano quattro triangoli. Chiara ha verificato, utilizzando carta e forbici che sono congruenti. Francesco si è ricordato della proprietà dei triangoli che dice: se si congiungono i punti medi di AB e AC si ottiene un triangolo A C'B' simile ad ABC. In questo caso il rapporto tra i lati è ½ e quindi C'B' è metà di BC, ed è parallelo a questo lato e congruente ad A'B.
Nello stesso modo si può dimostrare che i triangoli C'BA' e A'B'C sono simili a ABC e nel rapporto di similitudine di ½.
Quindi BC'B'A' è un parallelogramma perché ha due lati opposti paralleli e di uguale lunghezza.
Quindi il triangolo C'BA' è congruente a A'C'B'.
Pertanto i quattro triangoli che si formano sono tra loro congruenti e nel rapporto di similitudine di ½ con ABC e di conseguenza anche tra i segmenti C'O e CH vi è lo stesso rapporto di ½ perché distanza di vertici corrispondenti (C e C') dai rispettivi ortocentri.

Il punto O nel triangolo ABC è il circocentro cioè il punto d'incontro degli assi. Abbiamo verificato questo fatto con Cabrì, ma lo si può dimostrare perché C'O è perpendicolare ad A'B' e quindi anche ad AB perché AB e A'B' sono paralleli tra loro ed inoltre passa per C' che è il punto medio di AB e quindi C'O giace sull'asse di AB nel triangolo ABC.
Nello stesso modo si può dimostrare che B'O giace sull'asse di AC e A'O giace sull'asse di BC.

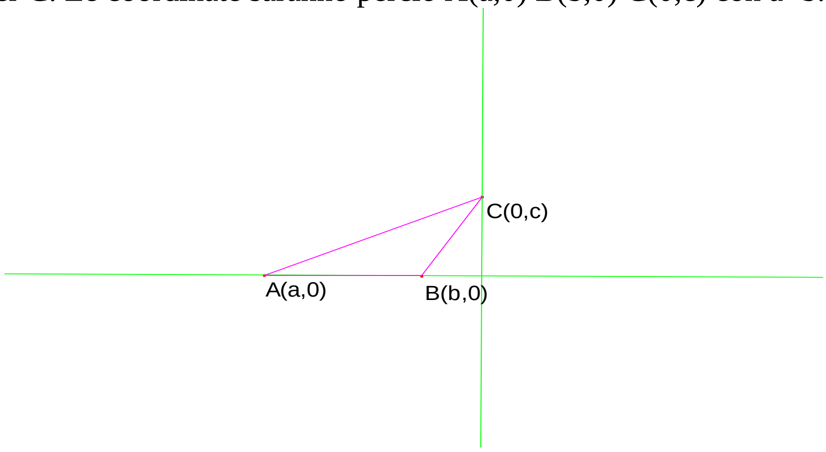
2. Abbiamo pensato che X avrebbe potuto essere il baricentro perché giaceva sulla mediana CC' e poi abbiamo verificato che è così con Cabrì.
[I triangoli CHX e XOC' sono simili, avendo congruenti gli angoli opposti di vertice X e gli angoli alterni di vertici C e C', con rapporto di similitudine 2. Il punto X è quindi il baricentro di ABC perché divide la mediana CC' in due parti tali che CX=2XC']

3. In ogni triangolo il baricentro, il circocentro, l'ortocentro sono allineati. Abbiamo anche ipotizzato che OX fosse la metà di HX e in seguito l'abbiamo verificato con Cabri e la nostra ipotesi era giusta. **[HX=2XO, perché lati corrispondenti nei triangoli precedentemente considerati].**

Soluzione proposta da:
Classe 3A Programmatori, ITCG "Ruffini"
Imperia (IM)

In questa risposta abbiamo apprezzato, con le riserve prima esposte, il lavoro informatico.

Punto 1.
a) Dato il triangolo ABC, scegliamo l'asse x coincidente con la retta AB e l'asse y perpendicolare ad AB passante per C. Le coordinate saranno perciò A(a,0) B(b,0) C(0,c) con a<b.



Avremo di conseguenza A'=M(BC)=$(\frac{b}{2},\frac{c}{2})$ B'=M(CA)=$(\frac{a}{2},\frac{c}{2})$ C'=M(AB)=$(\frac{a+b}{2},0)$

Congiungendo i punti medi dei lati di un triangolo si ottiene un segmento parallelo al terzo lato, dunque A'B' è parallelo ad AB, B'C' è parallelo a BC, C'A' è parallelo a CA

Per individuare l'ortocentro H troviamo l'intersezione di due altezze:

- retta per A perpendicolare a BC $y = \frac{b}{c}(x-a)$

[[- retta per B perpendicolare ad AC $y = \frac{a}{c}(x-b)$ **]] [non necessaria]**

[[Dal sistema $\begin{cases} y = \frac{b}{c}(x-a) \\ y = \frac{a}{c}(x-b) \end{cases}$ **]] [Calcolo superfluo, essendo una delle altezze sull'asse delle ordinate]**

si ottiene H$(0, -\frac{ab}{c})$

Per individuare l'ortocentro di A'B'C' troviamo l'intersezione di due altezze:

-retta per A' perpendicolare a B'C' $y - \frac{b}{2} = \frac{b}{c}(x - \frac{c}{2})$

- retta per C' perpendicolare ad A'B' e quindi all'asse x: $x = \frac{a+b}{2}$

Dal sistema $\begin{cases} y - \frac{c}{2} = \frac{b}{c}(x - \frac{b}{2}) \\ x = \frac{a+b}{2} \end{cases}$ si ottiene O$(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c})$

Calcoliamo CH=$\left|-\frac{ab}{c}-c\right|=\left|\frac{ab+c^2}{c}\right|$

Calcoliamo C'O=$\left|\frac{ab+c^2}{2c}\right|$

Quindi CH/C'O =2

b) O è il circocentro di ABC perché O appartiene alla retta per B' perpendicolare ad A'C' quindi perpendicolare ad AC (che è parallela ad A'C') ; B' è punto medio di AC perciò O appartiene all'asse di AC. Analogamente O appartiene all'asse di BC e all'asse di AB.

Punto 2

CC' nel triangolo ABC è la mediana relativa ad AB ed ha equazione: $\frac{y-c}{-c}=\frac{x}{\frac{a+b}{2}}$

L'equazione della retta HO è $\frac{y-\frac{ab+c^2}{2c}}{-\frac{ab}{c}-\frac{ab+c^2}{2c}}=\frac{x-\frac{a+b}{2}}{-\frac{a+b}{2}}$

Il punto X, ottenuto risolvendo il sistema fra queste due equazioni, ha quindi coordinate $(\frac{a+b}{3},\frac{c}{3})$

Esso coincide con il baricentro di ABC, che si può ottenere risolvendo il sistema tra le equazioni della suddetta mediana relativa ad AB e della mediana BB' relativa ad AC, ossia $\frac{y}{\frac{c}{2}}=\frac{(x-b)}{(\frac{a}{2}-b)}$

Punto 3

I punti notevoli baricentro, circocentro e ortocentro di un triangolo sono allineati su una retta detta di Eulero. Infatti le coordinate del punto X verificano l'equazione HO

[Vedi osservazione ai punti 2 e 3 della risposta precedente]

La figura ottenuta con Cabri illustra il problema: