FLAT*landia*

Il problema di Gennaio 2006

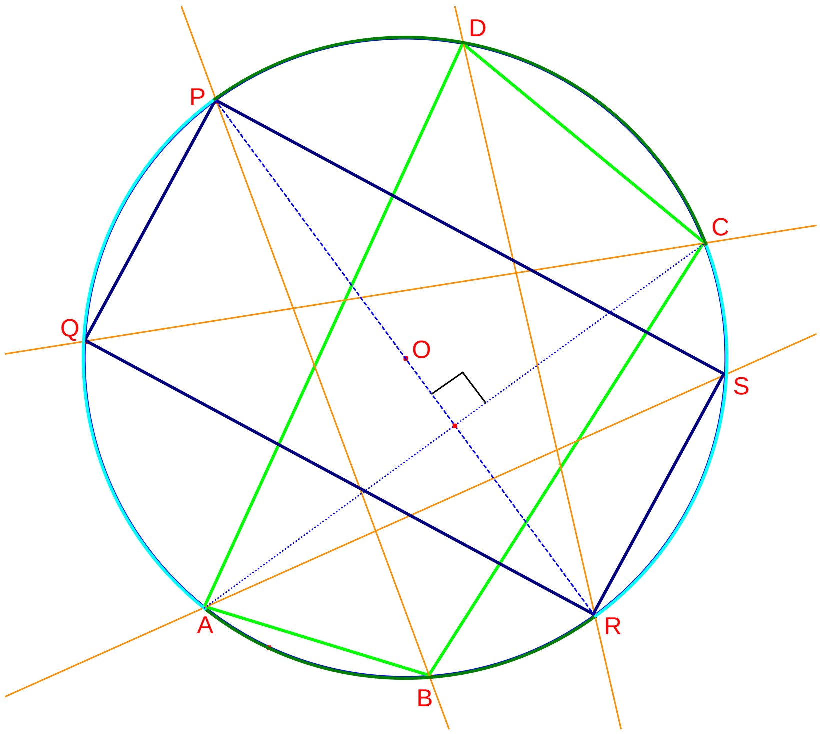
Sia ABCD un quadrilatero convesso inscritto in una circonferenza. Le bisettrici degli angoli interni A, B, C, D incontrano la circonferenza rispettivamente in S, P, Q, R.

1) Di che natura è il quadrilatero SPQR?

2) Quale relazione intercorre fra le diagonali dei due quadrilateri?

3) Indicare una o più ipotesi su ABCD affinché SPQR sia un quadrato.

Motivare le risposte.



Arco AR = arco RC
Arco CP = arco PA

Quindi
Arco AR + arco PA = ½ crf.
PR asse di AC

Commento

Sono giunte cinque risposte dalle seguenti scuole:

SM “Paisiello”, IC “Buscaglia”, Cinisello Balsamo (MI)
LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
ITI, LST “Berenini”, Fidenza (PR)
ITCG “Ruffini” Imperia (IM)
SM “C.A. Dalla Chiesa”, San Genesio ed Uniti (PV)

Diamo il benvenuto nel mondo di FLATlandia all’alunna della SM “Paisiello”, che, pur frequentando la seconda classe, si è cimentata con il problema di questo mese.

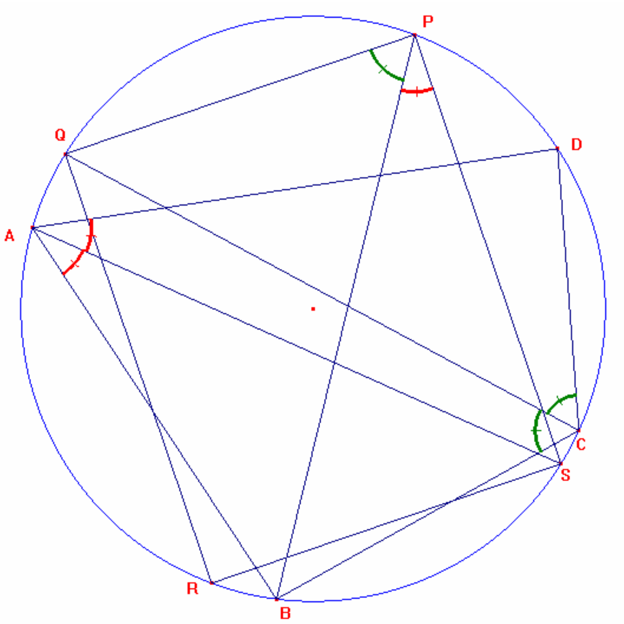
Abbiamo proposto ancora un problema sulla circonferenza, articolato in tre parti e avente come soggetto un qualunque quadrilatero inscritto.
Nella prima parte si doveva scoprire che le bisettrici dei suoi angoli interni incontrano la circonferenza in quattro punti, vertici di un rettangolo.
In tutte le risposte questa parte è stata risolta e motivata, con percorsi talvolta complessi o imprecisi nella esposizione.

Nella seconda si chiedeva di trovare il legame fra le diagonali dei due quadrilateri facilitando così la risposta al terzo quesito: quando quel rettangolo diventa un quadrato?
Non abbiamo chiesto esplicitamente di dimostrare che ogni diagonale del quadrilatero dato è perpendicolare ad una diagonale del rettangolo (e ne è anche l’asse), confidando nell’aiuto del software Cabri che quasi tutti i partecipanti usano. In proposito così scrivono le alunne della SM di San Genesio “ Abbiamo verificato con Cabri che la relazione che intercorre tra le diagonali dei due quadrilateri è di perpendicolarità …”. Non hanno giustificato tale scoperta, ma a loro lo perdoniamo.
Abbiamo convenuto di presentare tre delle risposte ricevute, essendo le altre maggiormente incomplete nella risoluzione e/o nelle motivazioni.

Classe 2D, LS “Aristosseno”

E’ la sola risposta in cui si dimostra che le diagonali del quadrilatero dato sono anche gli assi di quelle del rettangolo.

1) Se il quadrilatero convesso ABCD non è un quadrilatero particolare, il quadrilatero SPQR è un rettangolo. Essendo infatti ABCD inscritto nella circonferenza, in esso gli angoli opposti sono supplementari:



$\alpha + \gamma = \beta + \delta$ =180° (essendo $BAD = \alpha, ABC = \beta, BCA = \gamma, CDA = \delta$) .
Poiché la bisettrice di un angolo alla circonferenza divide l’arco su cui insiste in due archi congruenti , si hanno le seguenti uguaglianze fra gli archi : $DS \cong SB$ (AS è bisettrice di BAD)e $QD \cong BQ$ (CQ è bisettrice di BCD)
Gli angoli alla circonferenza che corrispondono a tali archi sono congruenti :

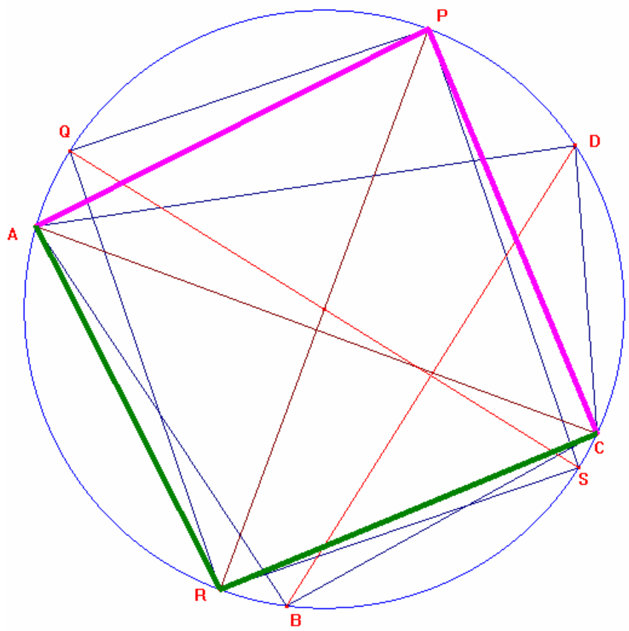
$BPS \cong BAS \cong \dfrac{\alpha}{2}$ (insistono entrambi sull’arco BS)

$BPQ \cong BCQ \cong \dfrac{\gamma}{2}$ (insistono entrambi sull’arco BQ)

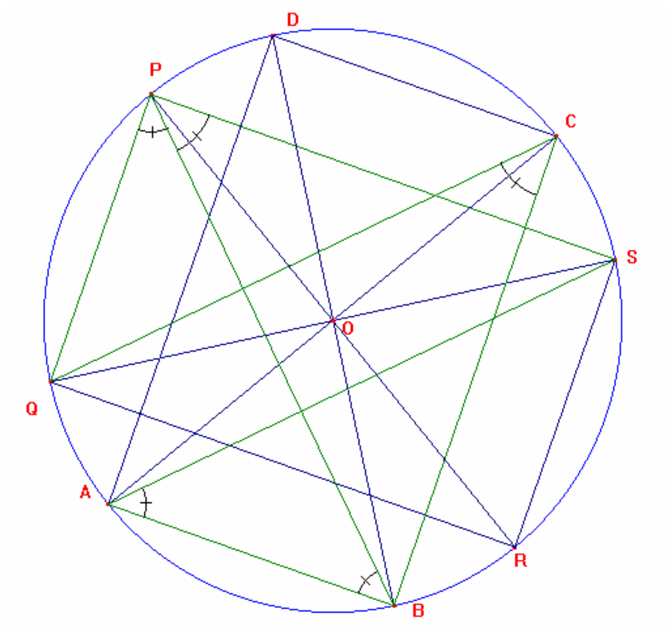
ed essendo $\alpha + \gamma = 180°$, è $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\gamma}{2} = 90°$ ovvero $BPS + BPQ = 90°$
Quindi l’ angolo QPS è retto ,il triangolo rettangolo QPS è inscritto nella semicirconferenza (la sua ipotenusa QS diagonale del quadrilatero SPQR è diametro della circonferenza) .
Ma il quadrilatero SPQR è inscritto nella circonferenza , perciò : PQR = 180°- QPS = 90°. Analoghe considerazioni ci portano a riconoscere che sono retti anche gli altri due angoli del quadrilatero SPQR ; esso è quindi un rettangolo.

2) Le diagonali del rettangolo SPQR sono gli assi della diagonali del quadrilatero ABCD.
Più precisamente, QS è asse di BD e PR è asse di AC .
Congiungendo infatti P ed R con A e con C e analizzando il quadrilatero APCR così ottenuto (deltoide) notiamo che , essendo BP la bisettrice dell’angolo ABC , essa divide l’arco AC in due archi AP e PC congruenti. Archi congruenti sottendono corde congruenti e allora risulta : $PA \cong PC$,

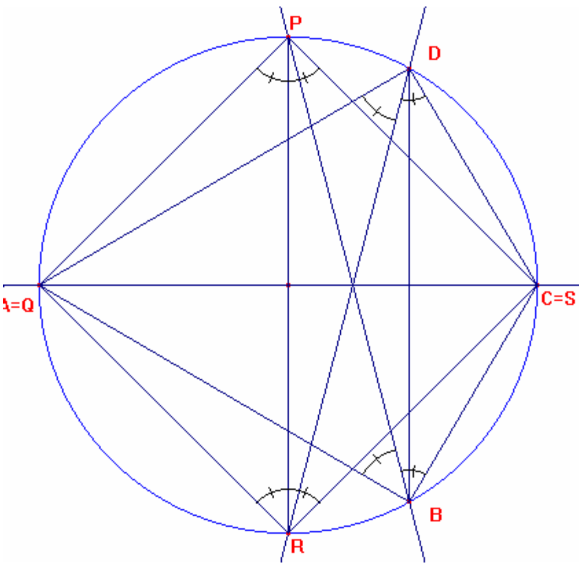
cioè P è equidistante da A e da C . Da parte opposta ad AC , similmente , essendo DR bisettrice dell'angolo ADC , gli archi AR ed RC sono congruenti e lo sono anche le corde AR ed RC .
Anche il punto R è equidistante da A e da C .
Il luogo dei punti equidistanti dagli estremi di un segmento è l'asse di quel segmento : perciò PR è asse di AC . Procedendo in modo analogo si trova che anche l'altra diagonale SQ del quadrilatero SPQR è asse della diagonale BD del quadrilatero ABCD.



Caso particolare: Se il quadrilatero ABCD è un rettangolo , risulta : $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$.
Le considerazioni sulle figure sono analoghe alle precedenti ma ora accade che : $BPS \cong BAS \cong \frac{\alpha}{2} = 45°$ (insistono sull'arco BS) e $BPQ \cong BCQ \cong \frac{\gamma}{2} = 45°$ (insistono sull'arco BQ) e quindi l'angolo QPS è retto e PB è la sua bisettrice.
Questo vale per gli altri angoli e perciò le diagonali del quadrilatero ABCD sono congruenti a quelle di SPQR (esse sono diametri) , sono reciprocamente assi le une delle altre e si incontrano tutte nel loro punto medio O , centro della circonferenza.
Inoltre i lati dei due rettangoli ABCD ed SPQR sono ora paralleli a due a due , essendo gli angoli congruenti BPS e ABP alterni interni delle rette di AB e PS tagliate dalla retta di BP .



3) Se ABCD è un deltoide , formato da due triangoli rettangoli congruenti che hanno l'ipotenusa AC (diagonale di ABCD) in comune , il quadrilatero SPQR (che ora è CPAR) è un quadrato.
Infatti , AC è una bisettrice di ABCD e coincide con la diagonale QS mentre le altre bisettrici, dimezzando angoli retti ,dividono ciascuna delle due semicirconferenze in due archi congruenti .
In questo caso le diagonali AC e QS coincidono (PR è asse di AC e QS = AC è asse di BD) e BD e PR sono parallele fra loro (entrambi perpendicolari ad AC).



Se ABCD è un quadrato , il quadrilatero SPQR è anch'esso un quadrato .
In tal caso infatti i due quadrilateri coincidono (le bisettrici degli angoli di ABCD sono diametri perpendicolari fra loro e l'una è asse dell'altra).

(nelle ultime due figure il simbolo" = " sta per "coincide"

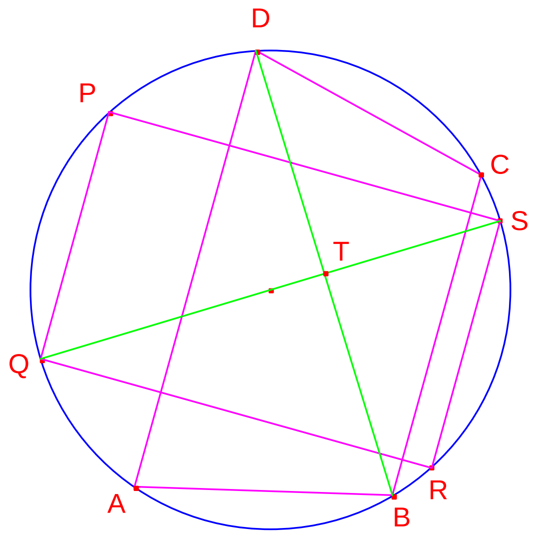
Classe 2B, ITI, LST “Berenini”

In questa risposta, in cui manca la figura che illustra il punto 1), si fornisce l’esposizione più completa del terzo quesito.

Risposta al problema di gennaio:

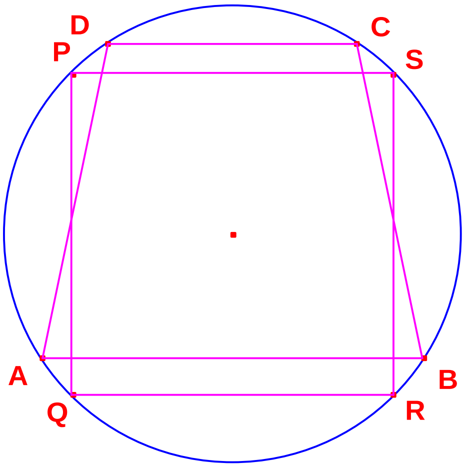
1. Il quadrilatero SPQR ottenuto dalle bisettrici degli angoli interni del quadrilatero convesso ABCD,è un rettangolo.
   Infatti, l’angolo PQC è congruente a PBC perché insistono sulla corda PC.
   L’angolo PBC è congruente a PBA perché PB è bisettrice.
   L’angolo CQR è congruente a CDR perché insistono sulla corda CR.
   L’angolo CDR è congruente a RDA perché DR è bisettrice.
   Pertanto l’angolo CQR sommato a CQP è congruente alla somma dell’angolo CDR e PBC i quali sono rispettivamente congruenti a metà di CDA e a metà di ABC. Essendo CDA e ABC angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza, la loro somma è un angolo piatto e quindi la somma di CQR con CQP è la metà di un angolo piatto e quindi il quadrilatero SPQR è un rettangolo.

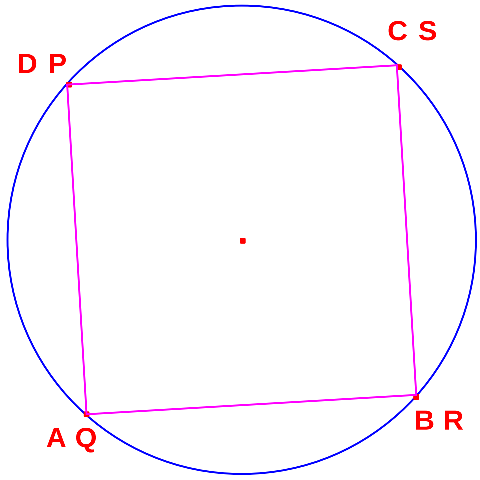
2. Le diagonali DB e QS sono perpendicolari e analogamente AC e PR.
   Infatti gli angoli DCQ e QCB sono congruenti perché il punto Q appartiene alla bisettrice dell’angolo DCB per costruzione, quindi, poiché ad angoli congruenti corrispondono corde congruenti, QD è uguale a QB. Di conseguenza gli angoli QDT e DST che sono angoli alla circonferenza che insistono sulle corde QB e QD congruenti, sono congruenti. QSD è un triangolo rettangolo perché QS è diametro quindi DQT è complementare di DSQ che è congruente a QDT. Quindi se DQT è complementare di QDT, poichè la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, risulta che DTQ è un angolo retto e DB è pertanto perpendicolare a QS.
   Analogamente la proprietà è valida per le altre diagonali AC e PR.

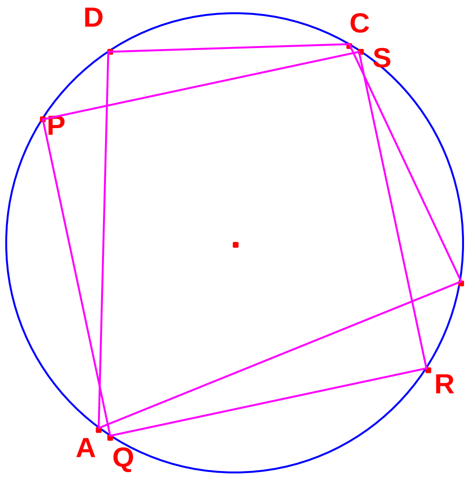


3. Se ABCD è un quadrilatero con diagonali perpendicolari (AC perpendicolare a BD) allora SPQR risulta essere un quadrato. In particolare questo caso si verifica se ABCD è un trapezio isoscele con diagonali perpendicolari, se è un quadrato o se è un deltoide.
   Per dimostrare tale affermazione supponiamo che ABCD sia un quadrilatero con le diagonali perpendicolari, cioè BD perpendicolare a CA .

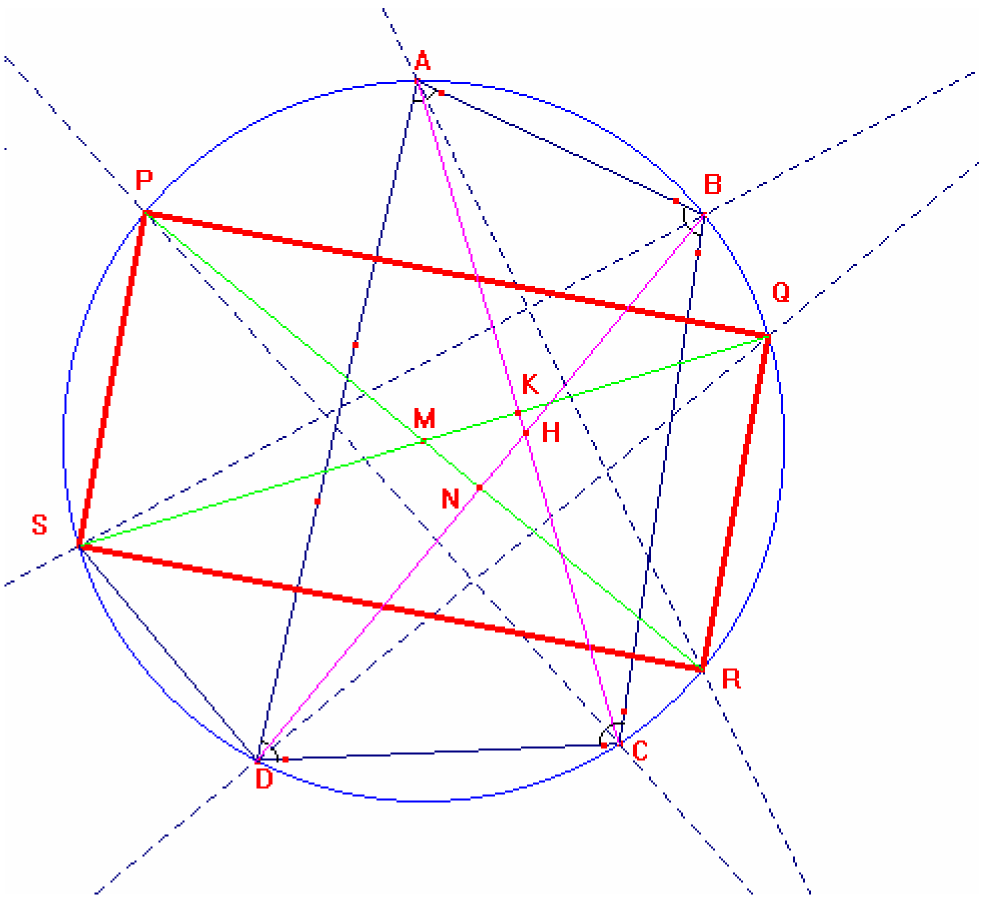
Per quanto visto alla risposta numero 2, BD è perpendicolare a QS e CA perpendicolare a QR.
Pertanto supponendo che AC sia perpendicolare ad BD e applicando la proprietà transitiva risulta:
QS perpendicolare BD
BD perpendicolare AC
AC perpendicolare PR
Quindi QS perpendicolare PR e quindi il rettangolo SPQR è un quadrato.







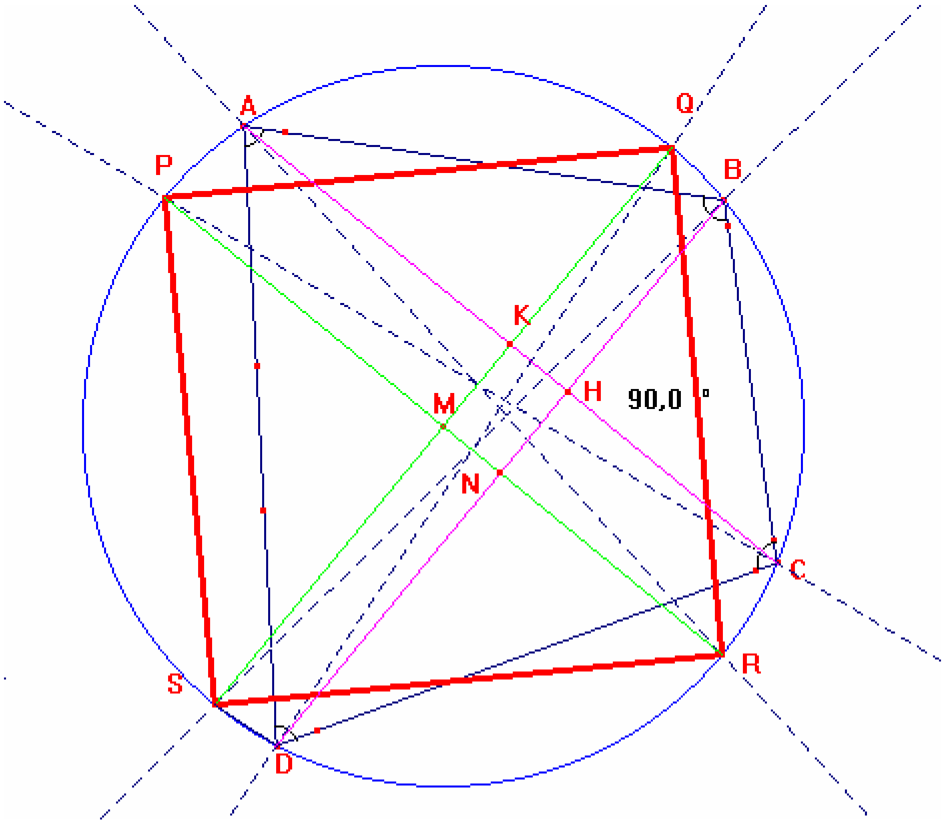
Elena Bistika e Giulia Brambati
Classe 3S, SM "C. A. Dalla Chiesa"
Presentiamo tutta la risposta, anche se carente nella seconda parte.



1) Gli angoli DAB + DCB=180° e anche ABC + ADC=180° sono supplementari perchè angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza e sono uguali gli angoli DAR=RAB , ABS=SBC , BCP=PCD, CDQ=QDA per costruzione (poiché AR , BS, CP e DQ sono bisettrici): da questo si deduce che PCD + DAR =90° così come SBC + CDQ=90° perché angoli formati dalle bisettrici di angoli supplementari.
Nella figura ci sono molte coppie di angoli di uguale ampiezza tra cui:
SPC=SBC perché insistono sullo stesso arco SC
CPQ=CDQ perché insistono sullo stesso arco CQ
PQD=PCD perché insistono sullo stesso arco PD
DQR=DARperché insistono sullo stesso arco DR
Dai dati sopra ricavati possiamo dire che l'angolo:
SPQ= SPC + CPQ = SBC + CDQ= 90° ; quindi il triangolo SPQ è un triangolo rettangolo ed è inscritto in una semicirconferenza e quindi SQ è un diametro.
Consideriamo ora l'angolo:
PQR = PQD + DQR = PCD + DAR = 90°; il triangolo PQR è dunque rettangolo e PR è quindi diametro della circonferenza.

Pertanto il quadrilatero PQRS avendo per diagonali due diametri della stessa circonferenza, cioè due segmenti di uguale lunghezza che si incontrano nei rispettivi punti medi, è sicuramente un rettangolo.

2) Abbiamo verificato con Cabrì che la relazione che intercorre tra le diagonali dei due quadrilateri è di perpendicolarità: BD è perpendicolare a PR ed AC è perpendicolare a SQ



3) Chiamiamo M, K, H, N i punti d'intersezione rispettivamente dei segmenti PR e SQ, dei segmenti AC e SQ , dei segmenti DB e AC, dei segmenti BD e PR.

Ipotizziamo che il quadrilatero ABCD abbia le diagonali perpendicolari allora il quadrilatero SPQR risulta essere un quadrato perché:

KHN=90° per ipotesi

MKH=90° perché al punto 2 abbiamo detto che AC è perpendicolare a SQ

MNH=90° perché sempre al punto 2 abbiamo detto che BD è perpendicolare a PR

Consideriamo il quadrilatero MKHN, se sommiamo gli angoli interni finora trovati otteniamo 270°, di conseguenza KMN=360°-270°=90°. Quindi le diagonali di SPQR sono perpendicolari e uguali perché diametri e quindi il quadrilatero SPQR è un quadrato.