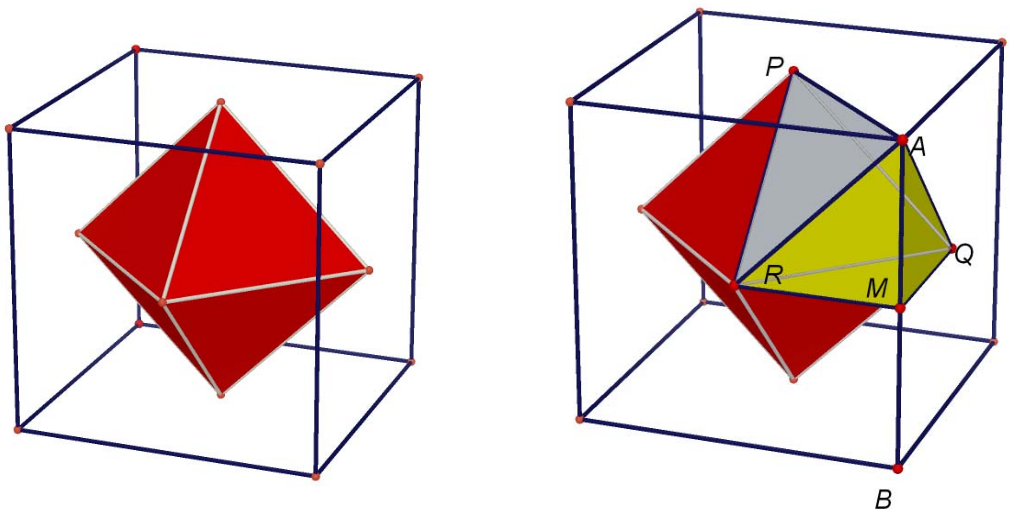
FLATlandia

PROBLEMA DI FEBBRAIO 2006

Congiungendo i centri delle facce (con uno spigolo in comune) di un cubo si ottengono gli spigoli di un poliedro.

1) Di quale poliedro si tratta? E' regolare?
2) Determinare il rapporto fra il suo volume e quello del cubo.



Nella figura a destra viene illustrata la scomposizione del cubo descritta da Elda Bistika (SM “C.A.Dalla Chiesa”): APRQ tetraedro regolare; MARQ piramide con tre triangoli rettangoli.

Commento

Abbiamo ricevuto cinque risposte e, contrariamente a quanto ci aspettavamo, sono più numerose quelle che provengono da scuole secondarie superiori.

- **LS “Aristosseno”**, Taranto (TA)
- **SM “C.A. Dalla Chiesa”**, San Genesio (PV)
- **LS “G.B. Scorza”** Cosenza (CS)
- **ITCG “Ruffini”** Imperia (IM)
- **ITI “G. Giorgi”** Brindisi (BR)

Il problema proposto era apparentemente facile: individuare il poliedro ottenuto considerando in modo opportuno come suoi vertici i centri delle facce di un cubo e dimostrare che si tratta di un ottaedro regolare; si chiedeva poi di calcolare un rapporto fra volumi.

Come talvolta accade quando la figura presenta evidenti proprietà, queste vengono assunte per vere senza o con scarse motivazioni. Non si chiede la pignoleria, ma almeno un breve accenno che giustifichi le affermazioni fatte.

E' noto che l'ottaedro formato da otto triangoli equilateri è regolare, ma ricordiamo agli studenti che **un poliedro è regolare se le sue facce sono poligoni regolari tutti congruenti e se i suoi angoloidi sono tutti congruenti fra loro**.

La seconda parte della definizione è stata disattesa, tranne che in una risposta. Poiché esistono criteri di congruenza per gli angoloidi triedri, bastava dividere quelli dell'ottaedro in due triedri per giungere alla conclusione.

Tutti hanno risolto correttamente il calcolo del rapporto richiesto.
Apprezzabili sono le abilità informatiche dimostrate dagli studenti degli istituti tecnici.

Giovanni Chiloiro
Classe 2D, LS "Aristosseno"
Risposta corretta e ben motivata nelle parti svolte; manca la parte riguardante gli angoloidi

1) Costruito il cubo di spigolo generico *l* , individuiamo i centri delle sue facce (sono i punti medi delle diagonali) e li congiungiamo.
Il solido ottenuto è un ottaedro regolare , formato da due piramidi a base quadrata appaiate per la base (fig. 1).

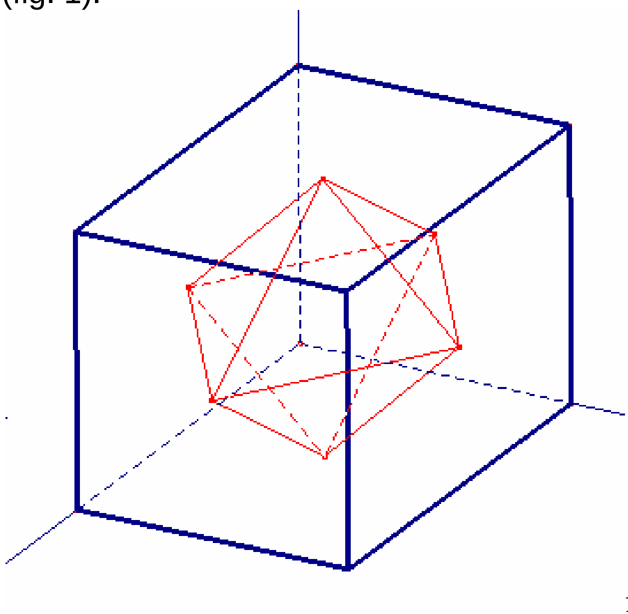


fig.1

Infatti , considerato il piano mediano orizzontale che divide il cubo in due parallelepipedi di altezza $l/2$, in ciascuno di questi parallelepipedi si individua la piramide che ha per base un quadrato (fig.1 e fig. 2).
Il lato di questo quadrato è ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele di lato $l/2$ (fig. 3), calcolabile col teorema di Pitagora :

$$l' = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

Se poi consideriamo l'altro piano mediano verticale (fig. 2), perpendicolare al precedente , possiamo determinare la misura degli spigoli laterali di una delle piramidi che formano il poliedro, applicando ancora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele i cui cateti misurano $l/2$:

$$s = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{l\sqrt{2}}{2} = l'$$

Da questo deduciamo che essendo gli spigoli laterali uguali a quelli di base , le facce del poliedro sono otto triangoli equilateri (di lato *l'*)e che quindi esso è un ottaedro regolare.

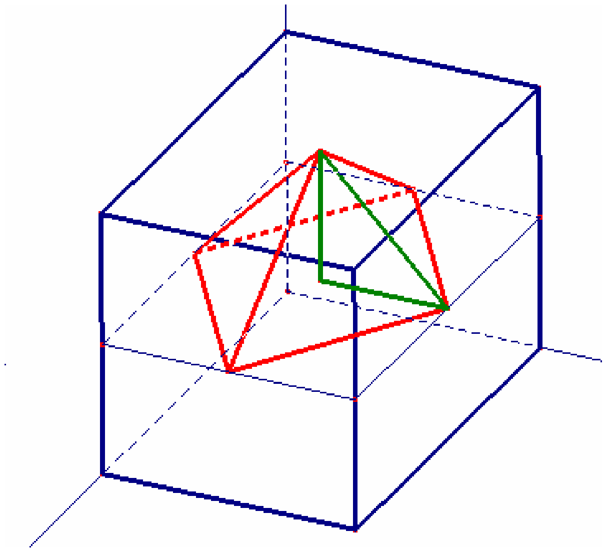


fig. 2 *sezione del cubo e del poliedro mediante un piano mediano orizzontale*

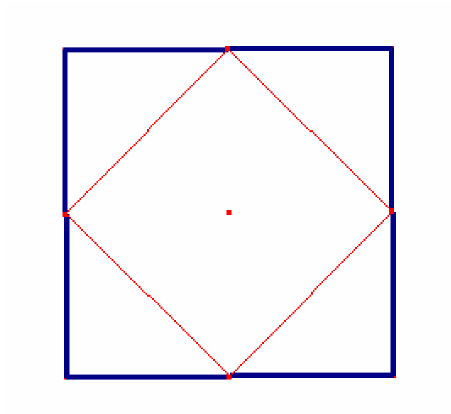


fig.3 *sezioni piane orizzontale e verticale*

2) Per il calcolo del rapporto fra i volumi del poliedro e del cubo , calcoliamo il volume dell'ottaedro come il doppio del volume della piramide che ha per base il quadrato di lato

l' = $\frac{l\sqrt{2}}{2}$ e per altezza *l*/2 :

V(ottaedro) = 2*V(piramide)*= $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (l')^2 \cdot \frac{l}{2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{6} l^3$

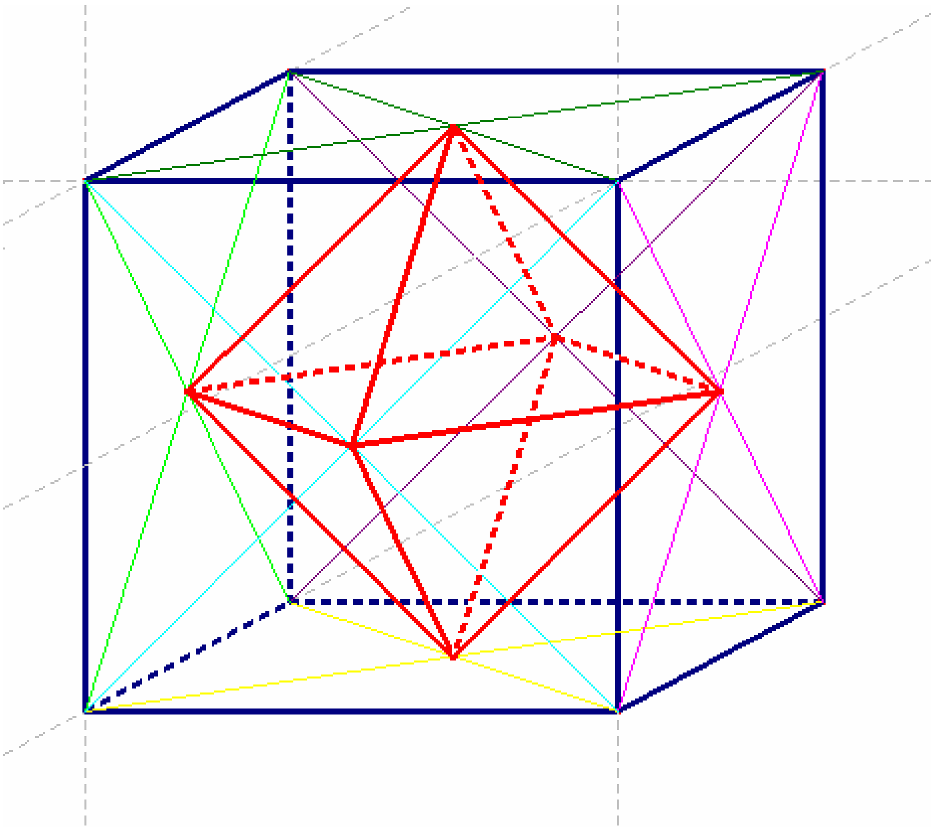
(si può anche osservare che il quadrato base della piramide ha come area la metà dell'area del quadrato base del cubo (fig. 3))

Essendo il volume del cubo V(cubo) = l^3 , il rapporto tra i volumi dei due solidi è dato da :

$$\frac{V(ottaedro)}{V(cubo)} = \frac{\frac{1}{6} l^3}{l^3} = \frac{1}{6} \ .$$

Elda Bistika, Classe 3 S
S.M.S. "C.A.Dalla Chiesa" di San Genesio ed Uniti (PV)

Le proprietà sono "raccontate"; lodevole il metodo di lavoro descritto e l'approfondimento sulla scomposizione del cubo



Per scoprire di quale poliedro si trattava, in classe abbiamo costruito il cubo usando delle cannucce di plastica unite tra loro con dei giunti sempre di plastica. Abbiamo quindi cercato di immaginare la forma del poliedro: la prima cosa che abbiamo notato è che i suoi spigoli erano tutti uguali perché ipotenuse di triangoli rettangoli isosceli aventi i cateti pari ad " $l/2$ " se indichiamo con " l " lo spigolo del cubo.

Abbiamo quindi costruito con altre cannucce lunghe circa $(l/2)\sqrt{2}$ il poliedro inscritto nel cubo: si tratta di un ottaedro regolare le cui facce triangolari sono triangoli equilateri aventi il lato lungo $(l/2)\sqrt{2}$.

A casa ho costruito con del cartoncino un modellino pari a metà cubo e a metà ottaedro inscritto ed alcuni modelli di piramidi pari ad un 1/8 del ottaedro ed ho osservato che il cubo di lato l può essere scomposto in:

- un ottaedro inscritto i cui vertici sono i centri delle facce del cubo e le cui facce sono triangoli equilateri di lato $(l/2)\sqrt{2}$.
- 24 piramidi triangolari (ogni piramide è 1/8 dell' ottaedro) non rette aventi quattro facce di cui tre che sono triangoli rettangoli isosceli di ipotenusa $(l/2)\sqrt{2}$ e due di queste facce sono perpendicolari alla base **[se si assume come base il triangolo equilatero di lato $(l/2)\sqrt{2}$, tali piramidi sono rette e regolari]**.
- 8 tetraedri regolari aventi come facce lo stesso triangolo equilatero dell'ottaedro.

Volume dell'ottaedro = $((l/2)\sqrt{2})^2 (l/2)(1/3)\,2 = l^3/6$

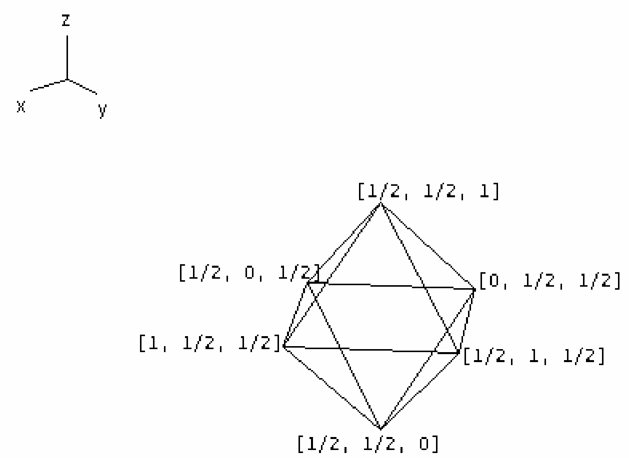
Volume del cubo = l^3

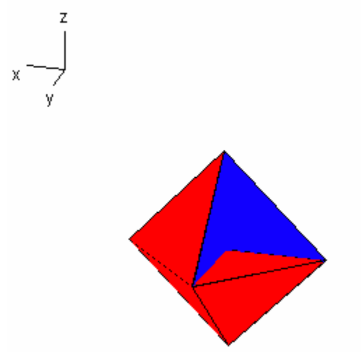
Il rapporto è 1/6.

Classe 3A Programmatori, ITCG “Ruffini”

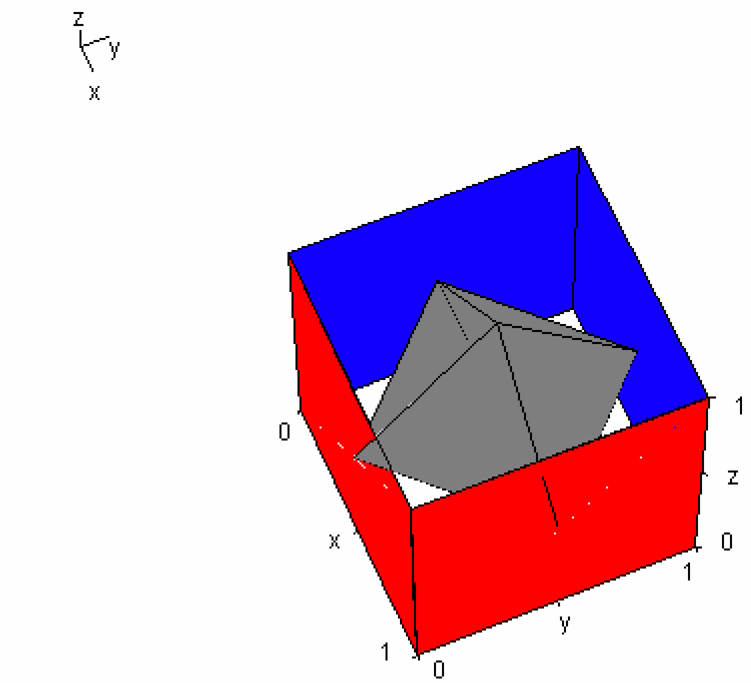
È l’unica risposta in cui si esamina la definizione completa di ottaedro regolare; si fa ricorso a simmetrie che non sono del tutto motivate e/o chiaramente descritte.

1) Il solido che si ottiene è un ottaedro (uno dei 5 solidi platonici). Le sue facce sono otto triangoli equilateri congruenti e i suoi diedri sono congruenti; è un solido regolare. I suoi vertici sono infatti corrispondenti due a due in una simmetria centrale coincidente con il centro di simmetria del cubo **[affermazione corretta, ma non motivata]**. E’ simmetrico rispetto ai tre piani perpendicolari **[paralleli]** alle facce opposte del cubo **[e passanti per il suo centro]**. In tali simmetrie i diedri si corrispondono **[quali e perché]** ed hanno dunque sezione normale congruente.
Abbiamo costruito con Derive un modello di tale ottaedro, ipotizzando che la costruzione sia basata su un cubo, di spigolo unitario, avente un vertice in (0,0,0) e tre spigoli concorrenti appartenenti agli assi cartesiani nello spazio.
Lo abbiamo fatto ruotare, ottenendo una visuale più chiara.





Con rotazione ed impostazione del punto di vista, abbiamo ottenuto la seguente figura.



2) Per il volume, applicando il teorema di Pitagora ad uno dei triangoli rettangoli che hanno per vertici due centri di facce concorrenti del cubo e il terzo vertice appartenente allo spigolo comune, intersezione con un piano perpendicolare a tale spigolo, abbiamo ottenuto che ogni spigolo dell'ottaedro misura $\sqrt{2\frac{l^2}{4}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ (se l è lo spigolo del cubo). Il volume dell'ottaedro è

$2(\frac{l\sqrt{2}}{2})^2 \frac{l}{2}\frac{1}{3} = \frac{l^3}{6}$ dunque è 1/6 del volume del cubo.