FLATlandia

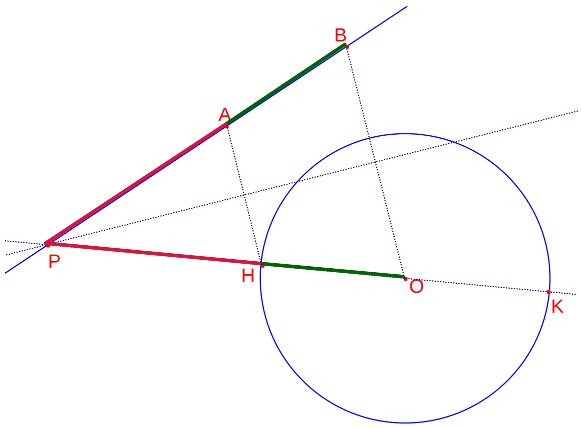
Il problema di Dicembre 2005

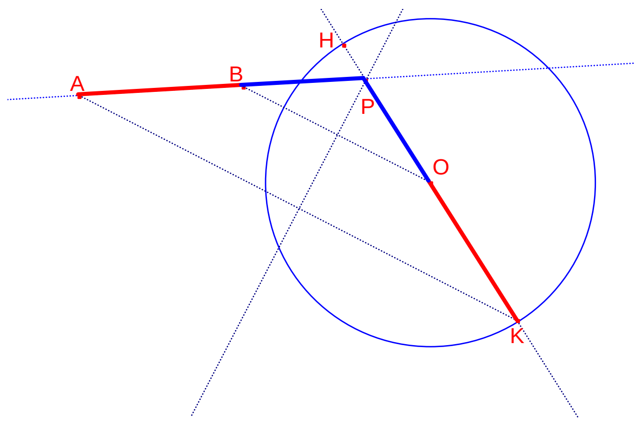
Si propone il seguente problema così come è stato formulato in un eserciziario di geometria:

Data una circonferenza di centro O ed un segmento AB congruente al raggio sopra una retta qualunque, l’asse del segmento OB incontra la retta in un punto che è equidistante da A e dalla circonferenza.

1) Dare una definizione motivata di distanza di un punto da una circonferenza.

2) Dimostrare l’affermazione del problema e verificare se, secondo la definizione del punto 1), l’enunciato del problema è valido per ogni posizione della retta e del segmento su di essa.





Commento

Abbiamo ricevuto nove risposte provenienti da sette scuole:
ITCG “Ruffini”, Imperia (IM)
LS “Aristosseno”, Taranto (TA)
ITI, LST “Berenini”, Fidenza (PR) – due risposte
SM “Brofferio”, Asti (AT) – due risposte
LS “Cremona”, Milano (MI)
LS “G.B. Scorza”, Cosenza (CS)
SM “C.A. Dalla Chiesa” S. Genesio (PV)

Il problema proposto (*data una circonferenza di centro O ed un segmento AB congruente al raggio sopra una retta qualunque, l'asse del segmento OB incontra la retta in un punto che è equidistante da A e dalla circonferenza*) ha offerto l'occasione per far riflettere gli studenti sul concetto di distanza. Nel suo enunciato originale il problema presentava, secondo noi, un uso ambiguo del termine "equidistanza". Infatti, riferendoci alle figure allegate al testo, quando esiste la intersezione P fra la retta che contiene AB e l'asse di OB si presentano le due possibilità PA=PH oppure PA=PK, ma solo nel primo caso si può affermare che P è equidistante da A e dalla circonferenza. Nelle risposte pervenute, una parte di studenti ha esaminato la validità dell'affermazione nel caso in cui l'estremo A e l'intersezione P siano dalla stessa parte rispetto l'estremo B, vedi la figura 1. Alcuni hanno preso in esame l'altra possibilità concludendo che in tal caso l'affermazione del problema non è più vera, ma è comunque valida l'uguaglianza tra PA e la massima distanza di P dai punti della circonferenza, ossia PA=PK, vedi la figura 2.
Gli studenti della classe 3A dell'ITCG "Ruffini" hanno ampliato la loro ricerca giungendo ad una conclusione che commenteremo all'interno della loro risposta.
Riteniamo opportuno precisare inoltre che la definizione di distanza richiesta doveva essere operativa: ossia indicare come si ottiene il segmento PH giustificando la scelta del punto H come punto della circonferenza posto a minima distanza da P.

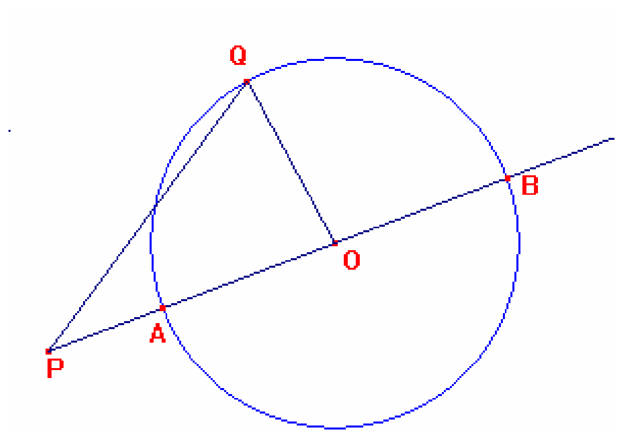
Presenteremo per intero le risposte che abbiamo ritenuto più complete e di altre le parti più significative. Le nostre osservazioni sono scritte in parentesi quadra. Con doppia parentesi quadra sono indicate le parti omesse.

Classe 2D, LS "Aristosseno"

Presentiamo la risposta completa in cui abbiamo omesso alcune parti ritenute superflue.

1.

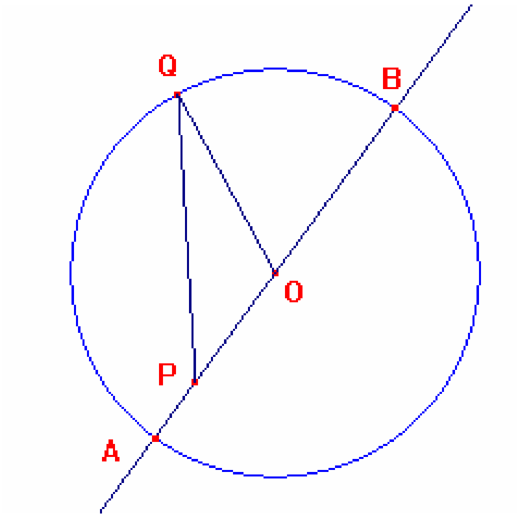
La distanza di un punto P da una circonferenza è definita come il segmento di lunghezza minima fra tutti i segmenti che congiungono il punto P, che non appartiene alla circonferenza, con i punti della circonferenza.
Se P non appartiene alla circonferenza , esso può essere esterno oppure interno ad essa.
1° caso) P è esterno alla circonferenza



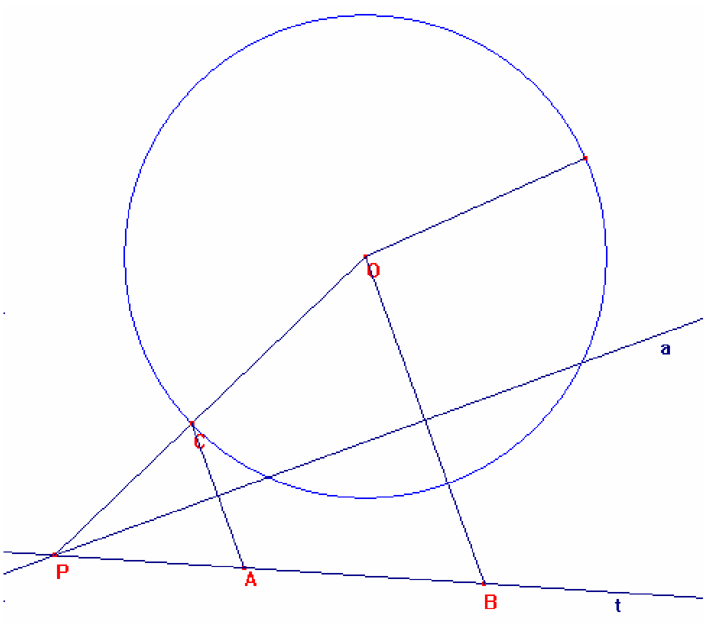
Congiungendo P con il centro della circonferenza e indicati con A e B i punti intersezione della semiretta PO con la circonferenza, occorre verificare che il segmento PA è minore di qualunque altro segmento che congiunge P con un altro punto (Q) della circonferenza.
Nel triangolo POQ si ha : PQ > PO – OQ (disuguaglianze triangolari) e poiché OQ = OA = r

(raggio della circonferenza) risulta : PQ > PO – r = PA .
(E’ immediato constatare che PA < PB) .

2° caso) P è interno alla circonferenza



Tracciato il diametro passante per P e detti A e B i suoi estremi il segmento PA è la distanza di P dalla circonferenza . Esso è minore di qualsiasi altro segmento che congiunge P con un punto (Q) della circonferenza .E’ infatti PQ > PA perché nel triangolo POQ risulta PQ > OQ - OP e
OQ = OA = r (raggio della circonferenza) per cui PQ > r - OP = PA .
(Anche in questo caso è evidente che PA < PB) .
Se P coincide con il centro O della circonferenza la sua distanza dalla circonferenza è ovviamente uguale al raggio r di questa.



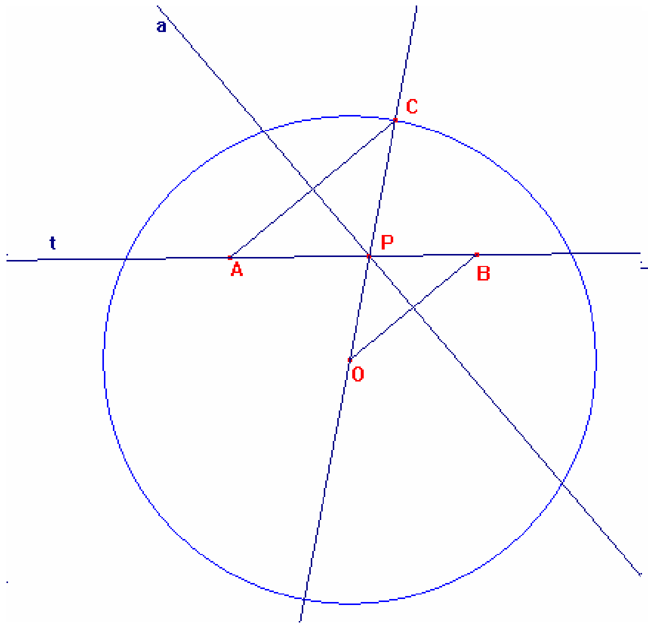
2.
Considerata la retta t e su di essa il segmento AB congruente al raggio r della circonferenza data , l’asse del segmento OB interseca la retta t nel punto P . Questo punto è equidistante da A e dalla

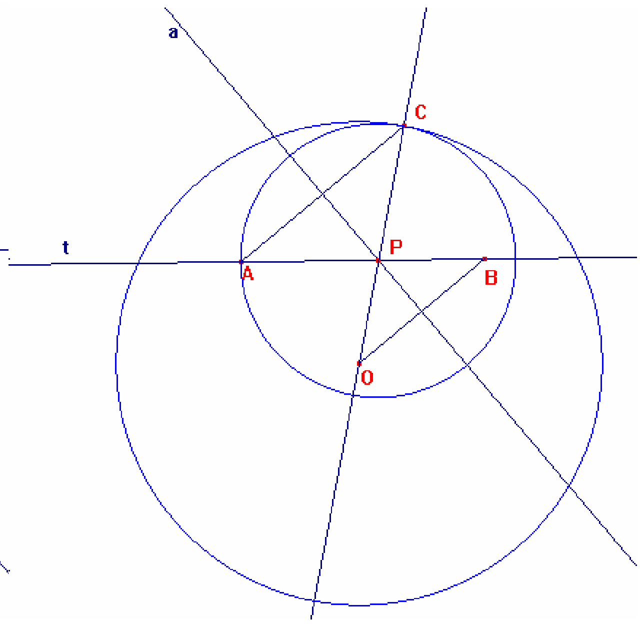
circonferenza , ovvero è PA = PC perché l'asse a di OB è luogo dei punti equidistanti dagli estremi di OB e quindi PO = PB (il triangolo BPO è isoscele) e OC = AB = r per cui :
PC = PO – OC = PB – AB = PA (differenze di segmenti congruenti)
[[…]]

La proprietà è vera per tutte le posizioni della retta t eccetto quando la retta t è parallela all'asse a **[cioè quando OB è perpendicolare alla retta t]**, mentre il segmento AB può assumere tutte le posizioni per le quali PO = PB > r e PA < PB (cioè il punto P precede B nel verso secondo cui A precede B)

Sia la retta t secante la circonferenza **e** P interno alla circonferenza. Si ha anche in questo caso PA = PC perché PO = PB in quanto P appartiene all'asse di OB e perciò :
PA = AB – PB = OC – OP = PC (con AB = OC = r raggio della circonferenza) e quindi differenze di segmenti congruenti.
[[…]]

La retta t può assumere tutte le posizioni tranne quella per cui è **parallela** all'asse a **[OB perpendicolare alla retta t]**, il segmento AB tutte quelle per cui PO = PB < r (cioè il punto P è interno al segmento AB).





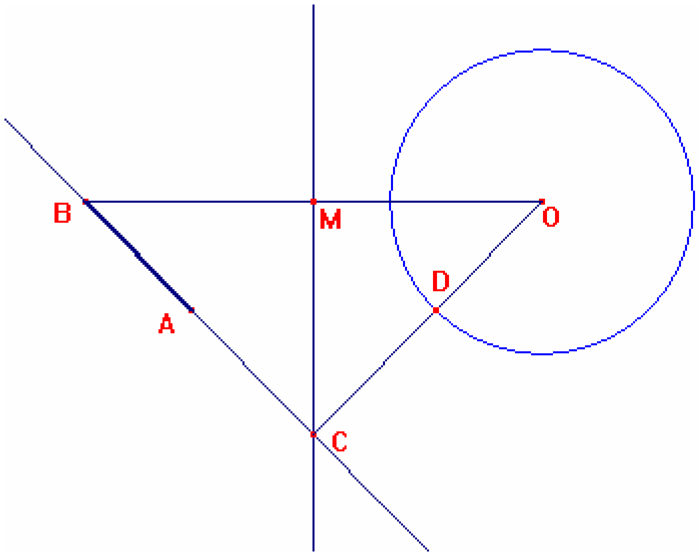
Alfonso Scarpino, 1G, LS “G.B. Scorza”

Di questa risposta presentiamo la seconda parte, in cui l’esposizione è concisa, ma esauriente.

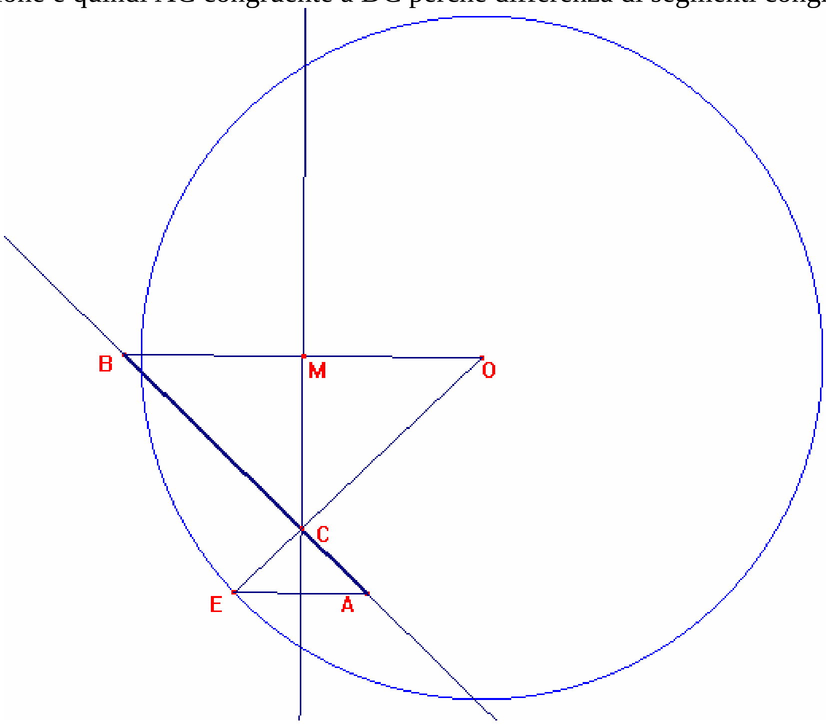
1.

[[…]]

2.

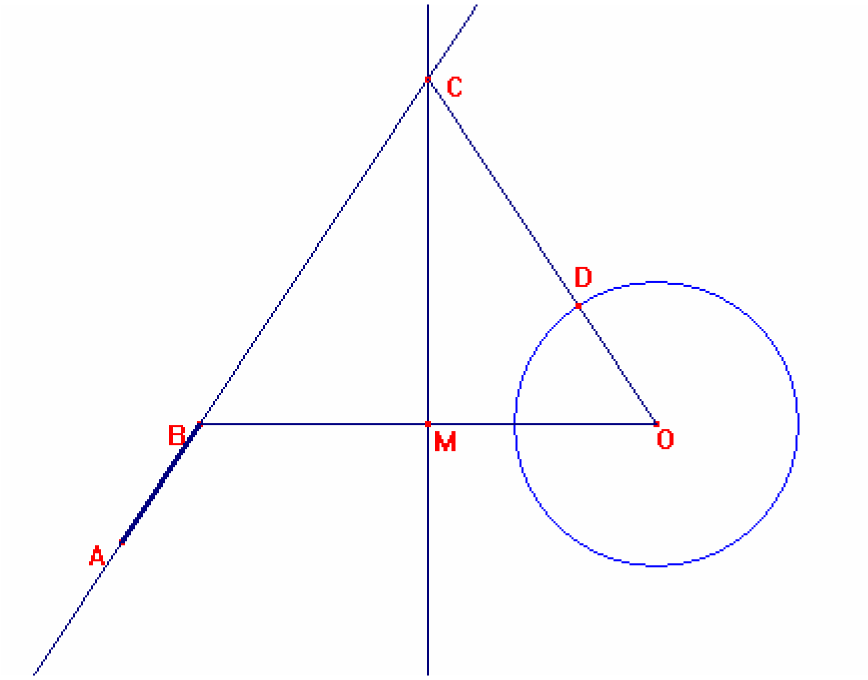


Data una circonferenza di raggio qualsiasi, **tracciamo** un segmento AB, esterno ad essa e congruente al raggio, e poi tracciamo la retta per A e B. Tracciamo il segmento OB e poi il suo asse che intersecherà la retta AB nel punto C. Congiungiamo C con O e sia D l’intersezione di tale segmento con la circonferenza. Vogliamo dimostrare che AC è congruente a DC. Infatti BC è congruente ad OC, perché C appartiene all’asse del segmento OB e quindi è equidistante da B e da O. Inoltre AB è congruente ad OD per costruzione e quindi AC congruente a DC perché differenza di segmenti congruenti (BC e OC , AB e OD).



Nel caso in cui il punto A sia interno alla circonferenza, l'enunciato risulta ancora vero, ma CE è congruente a CA perché differenza dei segmenti rispettivamente congruenti AB e OE , BC e OC.

Tale enunciato non è sempre valido. Infatti non si verifica se l'angolo ABO è retto (e quindi la retta AB, **[perpendicolare al segmento OB, risulta parallela all'asse di OB]**) od ottuso (perché il segmento AB è il prolungamento del lato obliquo del triangolo isoscele OBC e quindi DC è minore del lato OC, congruente a BC, che, a sua volta, è minore di AC), come si vede in figura.



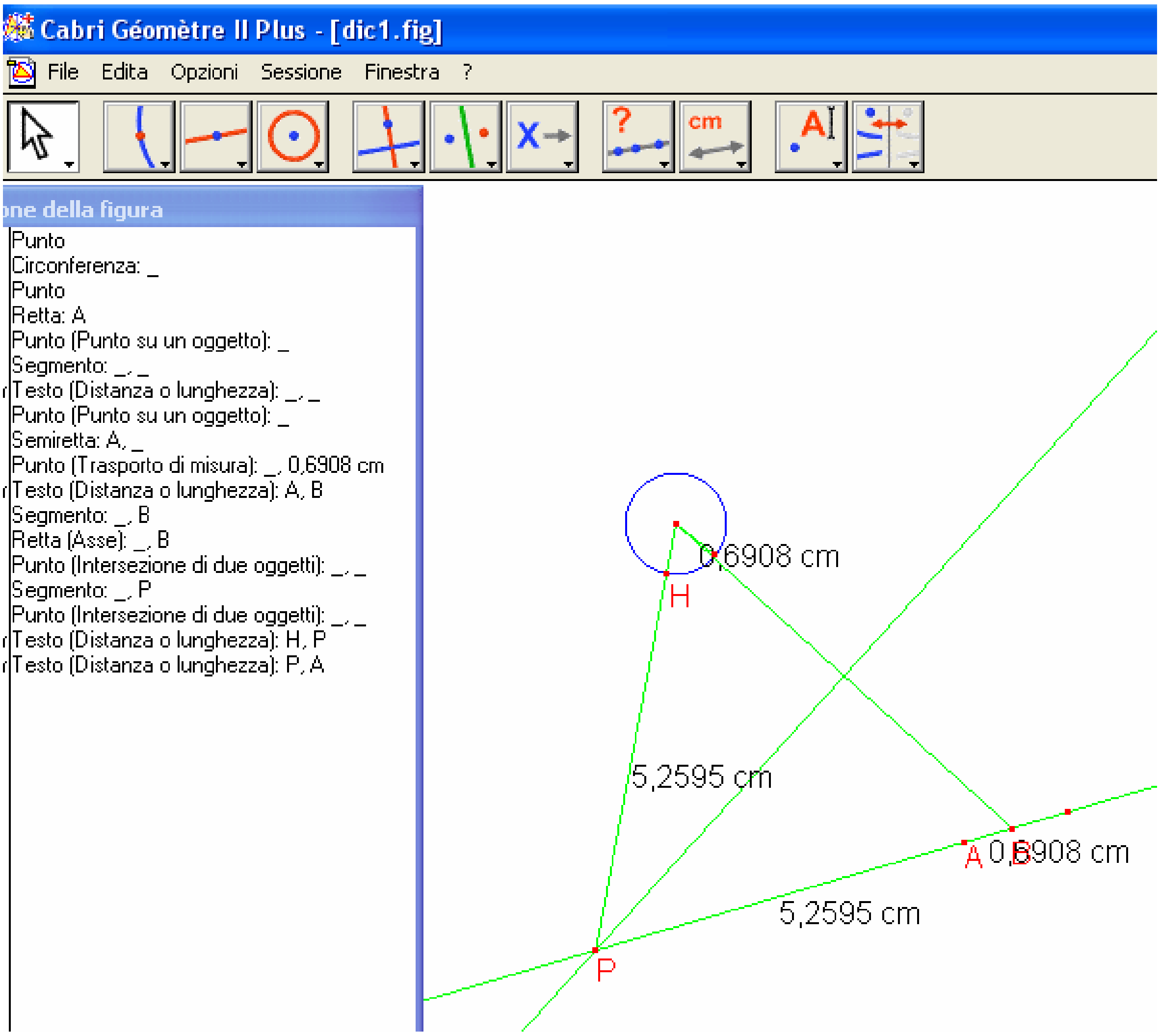
Classe 3A Programmatori, ITCG “Ruffini”

Presentiamo la seconda parte corredata da alcune nostre osservazioni.

Abbiamo affrontato il problema in classe ed in laboratorio con l’uso di Cabri.
Esponiamo la cronaca del lavoro svolto ed infine la conclusione a cui siamo pervenuti.

Prima parte
[[…]]

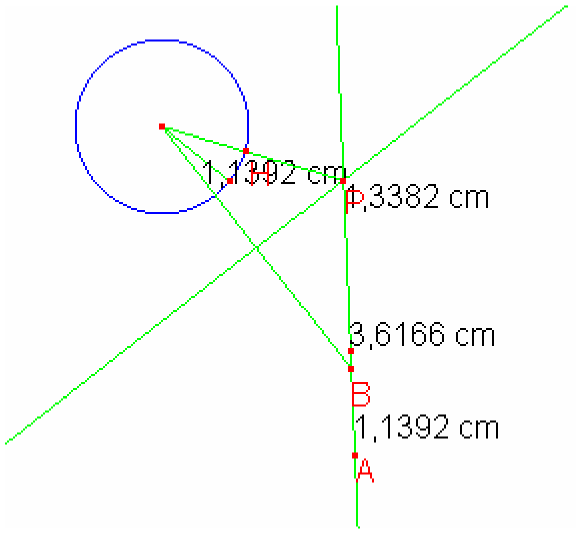
Seconda parte
1) Abbiamo considerato la retta r esterna alla circonferenza
Abbiamo costruito la figura richiesta, utilizzando il trasporto di misura, così come si vede dalla figura seguente :



Spostando il puntatore ed effettuando verifiche sperimentali, ci siamo accorti che **in due diverse situazioni la proprietà non era valida:**

1. **quando l’allineamento PAB si modifica in PBA**
2. **quando il punto P non esiste perché l’asse di OB è parallelo alla retta r,**

come si vede dalla figura seguente:

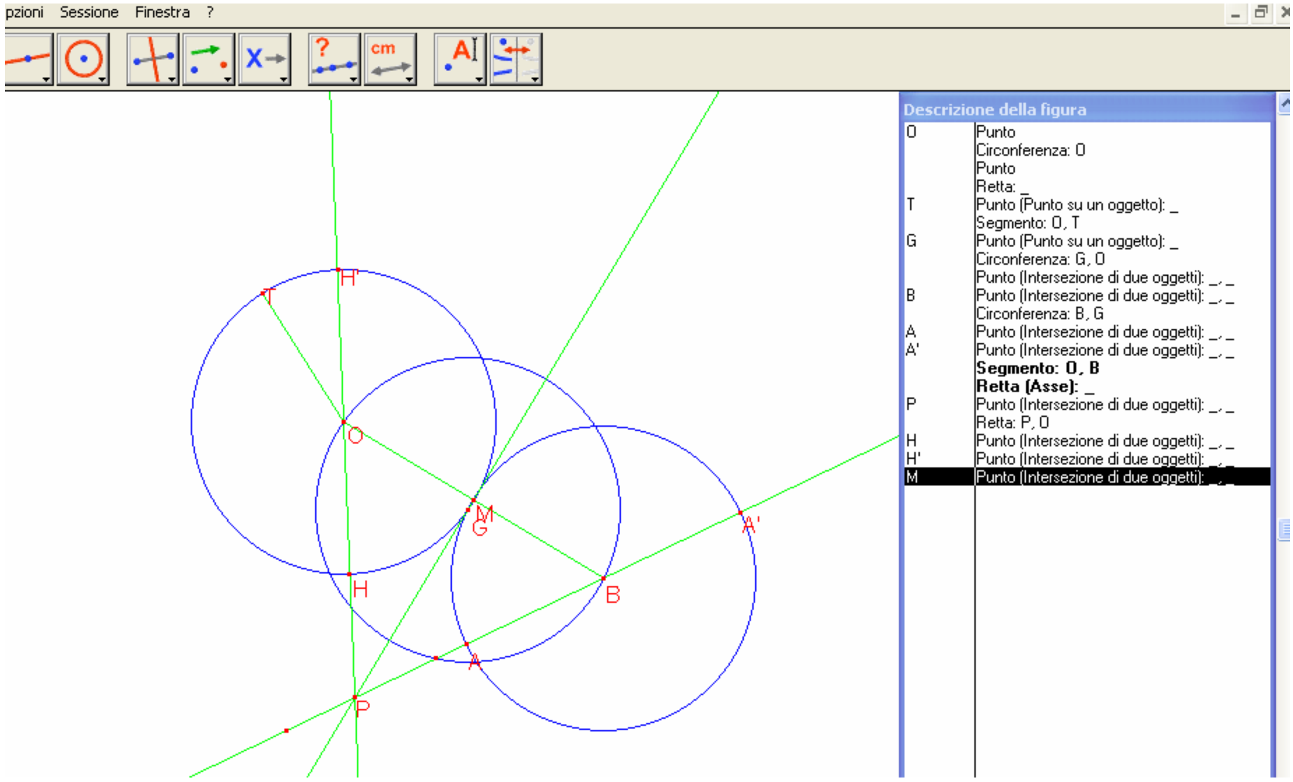


Abbiamo proseguito in classe, cercando una dimostrazione generale.

Qualcuno di noi ha pensato di costruire il segmento AB in questo modo:

Data la circonferenza *C* e la retta r ad essa esterna, si prenda un raggio OT; si consideri una circonferenza con centro G su *C* e raggio OT; si chiami B il punto di intersezione di questa circonferenza con r; poi si tracci una circonferenza di centro B e raggio BG; sia A una delle due intersezioni con la retta r **[questa costruzione non ha carattere generale, vale solo quando la circonferenza di centro G incontra la retta r]**; si tracci l'asse del segmento OB ottenendo P e poi la distanza PH. Si osserva che A ed H sono corrispondenti in una simmetria di asse PM, mentre P è punto unito nella stessa simmetria. E' dimostrato così che PH = PA **[conclusione affrettata].**

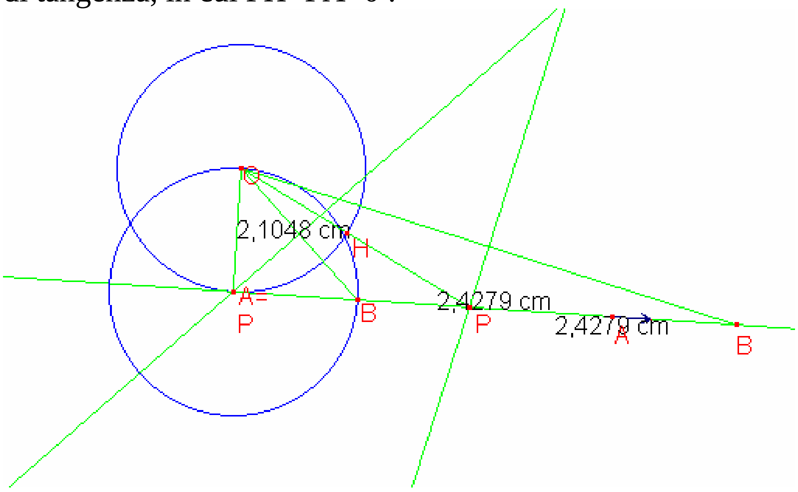
Ancora in laboratorio abbiamo infine fatto la costruzione, osservando che la proprietà vale ancora se **[anziché la]** distanza tra P e *C* si considera PH' e si prende A' in modo che l'allineamento sia PBA' :

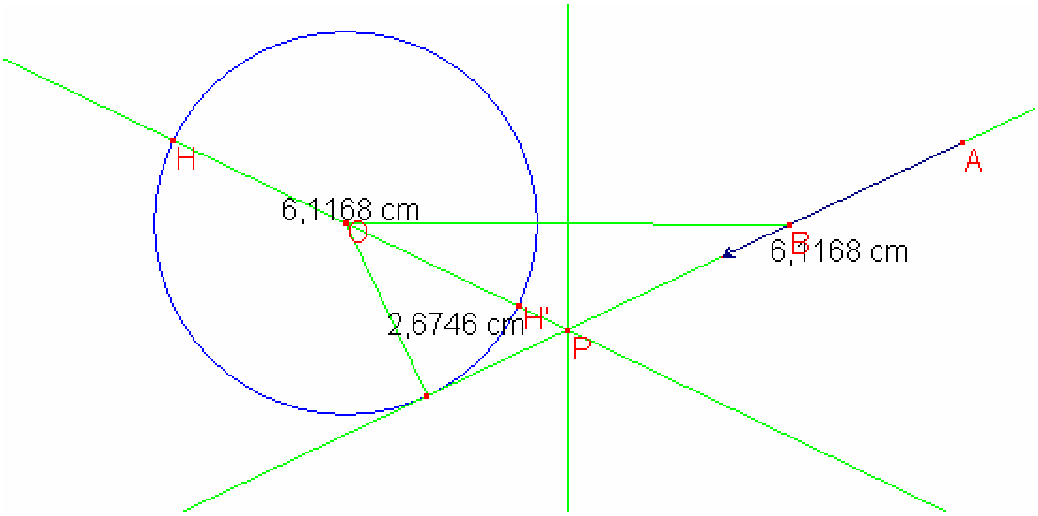


[[…]]

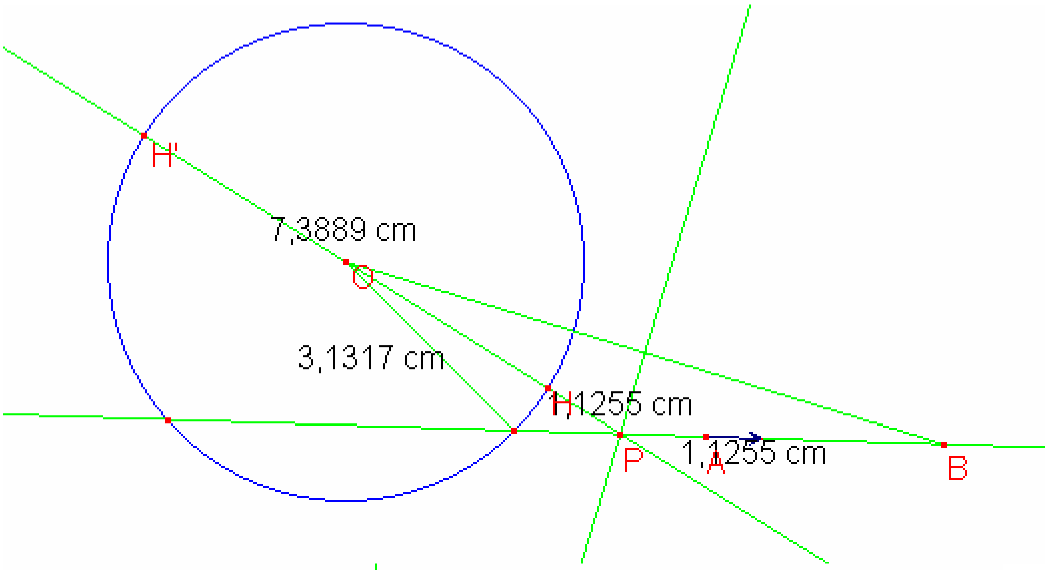
In conclusione:
dati una circonferenza *C* di centro O ed un suo punto esterno P, se PH è la distanza di P da *C* con H punto di intersezione tra *C* e **<u>il segmento</u>** PO, **si può dimostrare che PH =PA con A e H corrispondenti nella simmetria assiale di asse OB.**
Questa proprietà non vale se l'asse di OB è parallelo ad r .

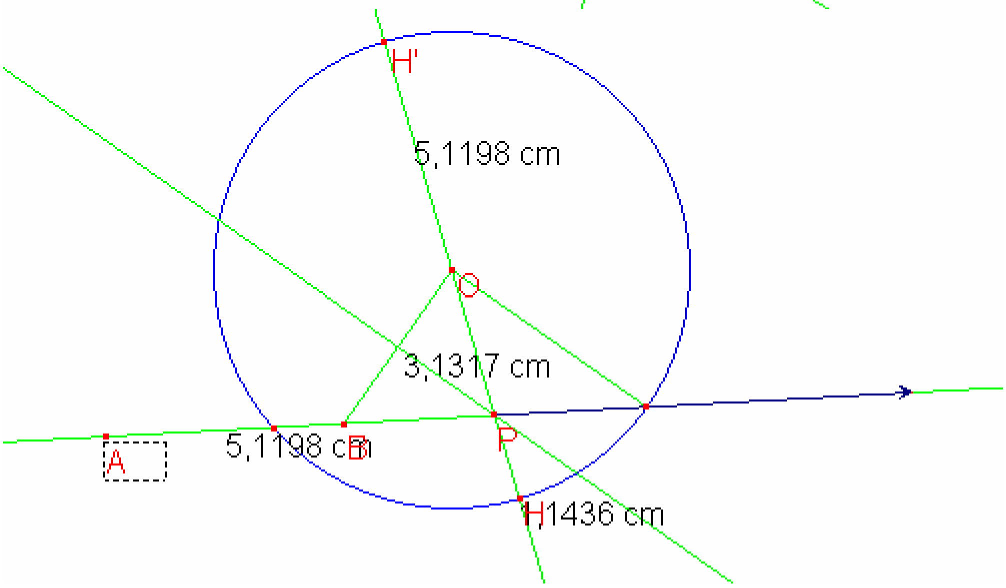
<u>2) Abbiamo considerato la retta r tangente alla circonferenza</u>
Siamo pervenuti alle stesse conclusioni del punto precedente, con il caso particolare di P=A punto di tangenza, in cui PH=PA=0 :





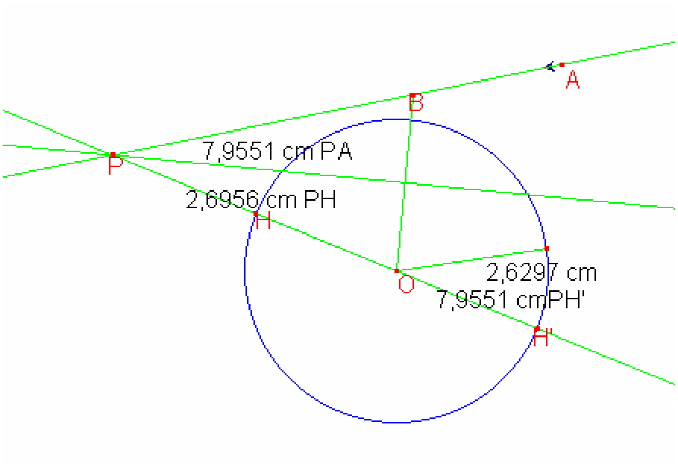
<u>2) Abbiamo considerato la retta r secante la circonferenza</u>
Siamo pervenuti alle stesse conclusioni del punto 1) :

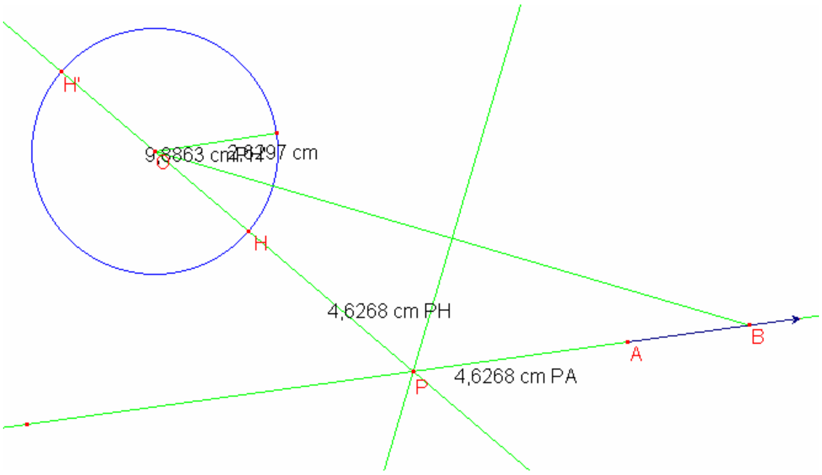




CONCLUSIONE
Sia data una circonferenza *C* di centro O ed una retta ad essa esterna o tangente o secante.
- riportiamo su r un segmento AB congruente con il raggio di *C*
- uniamo B con O e tracciamo l'asse di OB
- indichiamo con P il punto di intersezione tra r e tale asse
- [[…]] [siano H e H', con PH<PH', le intersezioni della retta PO con *C*]
si presentano due situazioni fondamentali:
- B compreso tra A e P
oppure
- A compreso tra B e P

Nel primo caso si ha:
PA=PB+BA=PO+OH'=PH', tenuto conto che l'asse del segmento OB è luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi e che AB=OH'=raggio di *C* per costruzione.
Nel secondo caso si ha
PA=PB-AB=PO-OH=PH,
come illustrato dalle figure seguenti e come sperimentabile nel file dicgenerale, spostando la retta r





La proprietà non vale quando P non esiste ovvero quando l'asse di OB è parallelo ad r, ossia OB perpendicolare ad r.

Così facendo però non si può identificare la distanza fra P e *C* con PH, perché PH non sarebbe unica e avremmo una contraddizione con la definizione : **[[…]]**
[Abbiamo omesso la definizione qui riportata perché contiene un errore, probabilmente di trascrizione; inoltre è citato l'autore, ma non il testo da cui è tratta]

Abbiamo cercato ancora e la prof. ci ha indicato il libro "Che cos'è la matematica?" di Courant Robbins"

A pag. 497, il testo parla di <u>distanza minima e di distanza massima</u> di P da *C*, come due segmenti perpendicolari a due tangenti della curva.

Abbiamo capito che, se la curva è una circonferenza, tali distanze minima e massima sono proprio i segmenti che abbiamo indicato nella precedente spiegazione, infatti un diametro è sempre perpendicolare alle tangenti nei suoi estremi!
[Le distanze di cui parla il testo citato non sono le definizioni di due distinte distanze di un punto da una curva, ma i valori minimo e massimo, se esistono, assunti dalla funzione "distanza di un punto assegnato da un generico punto di una curva"]

Elda Bistika, 3S, SM “C.A. Dalla Chiesa”

Si presenta l’intera risposta anche se non completamente esauriente, poiché proviene da una scuola media inferiore.

1. La distanza di un punto P da una retta è il segmento di perpendicolare condotto dal punto alla retta.
   Si definisce distanza di un punto P da una circonferenza **[P esterno]** il segmento differenza tra il segmento PO (dove O è il centro della circonferenza) e il raggio OC della circonferenza dove C indica l’intersezione del segmento OP con la circonferenza.
   Questo segmento PC è la distanza perché mandando la tangente alla circonferenza in C, tale tangente risulta perpendicolare al raggio OC e quindi anche al segmento differenza PC essendo O, C, P allineati.

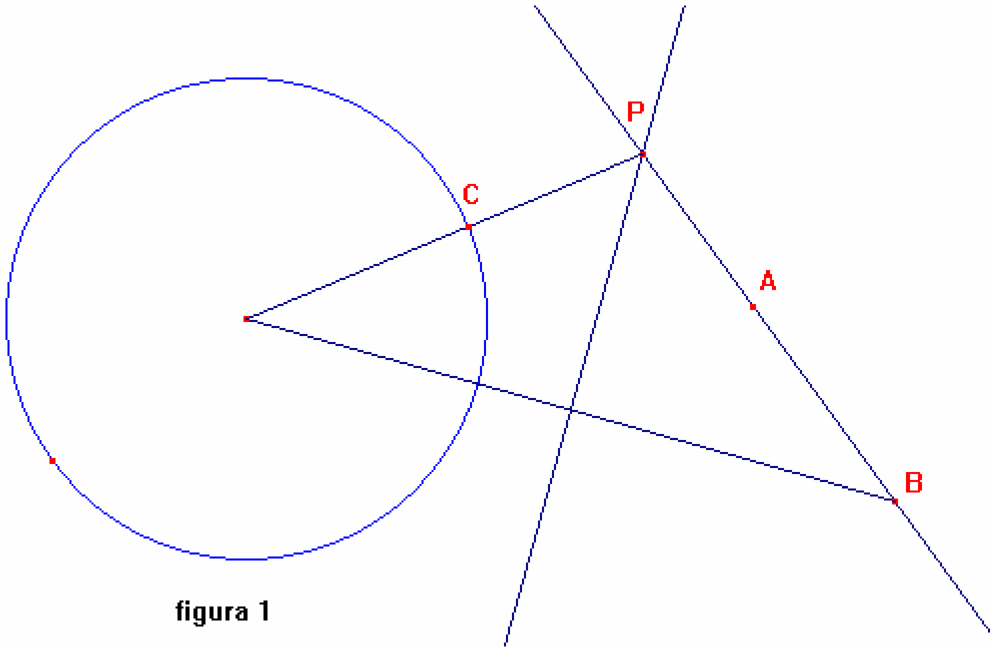


figura 1

2. Nel caso della figura 1 l’affermazione del problema è vera perché il punto P si trova sull’asse del segmento OB che per definizione è il luogo dei punti aventi uguale distanza dagli estremi del segmento, per cui PO = PB. Di conseguenza PC = PA per differenza di segmenti uguali: PC = PO – OC e PA = PB – AB essendo OC = AB = r.

3. Si verifica l’enunciato anche nel caso in cui la retta **interseca la** circonferenza e il segmento AB è interno ad essa oppure secante, se, nel caso di un punto P interno alla circonferenza, si definisce “distanza di un punto P dalla circonferenza”il segmento CP differenza tra il raggio OC e il segmento PO che unisce il punto P al centro O della circonferenza. Infatti PA e PC risultano uguali per differenza di segmenti uguali. Anche se la retta è tangente il punto P sarà sempre **[può essere]** equidistante dalla circonferenza e dal punto A.

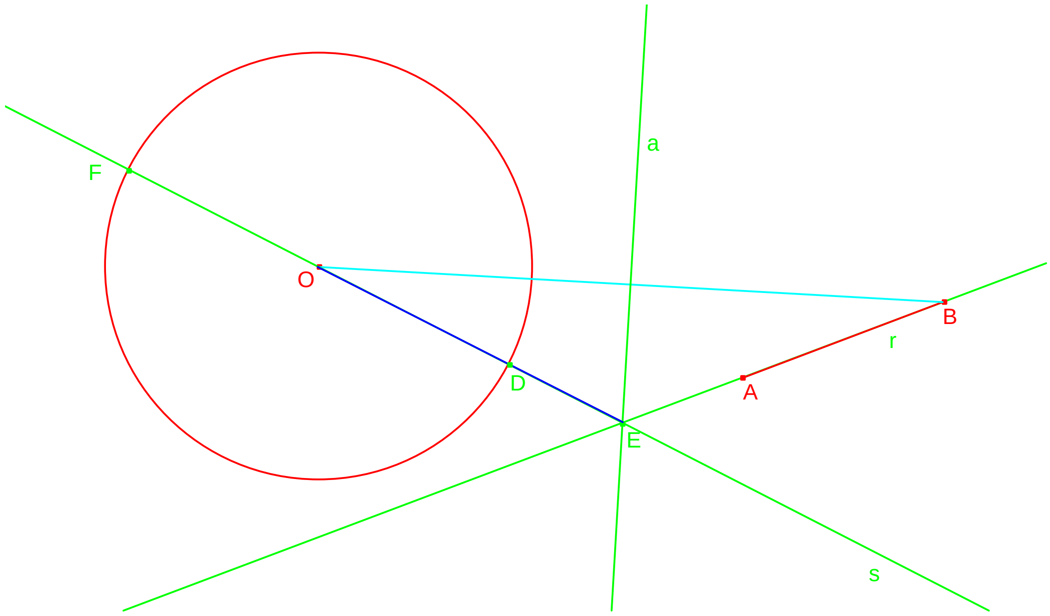
4. L’affermazione del problema non è però vera per qualsiasi retta o segmento AB uguale al raggio OC.
   L’affermazione non è vera nei casi in cui il punto B è compreso tra l’estremo A del segmento e il punto P d’intersezione dell’asse di OB con la retta. del segmento **[e inoltre quando OB è perpendicolare alla retta AB].**

Di Giambrone Vincenzo, Rainero Luca, Zandrino Enrico
Classe 3F, SM “Brofferio”

La prima parte, in cui si propone una definizione della distanza valida per ogni posizione del punto rispetto alla circonferenza.

1. DEFINIZIONE: la distanza di un punto (E) da una circonferenza è quel segmento (ED) posto sulla retta (s), passante per il centro (O) della circonferenza e per il punto dato, che unisce quest'ultimo all'intersezione più vicina (D) della retta con la circonferenza.

MOTIVAZIONE: ciò è vero perché la retta è perpendicolare alla tangente perciò il segmento sovracitato è la minore lunghezza tra il punto e la circonferenza.



2.
[[…]]