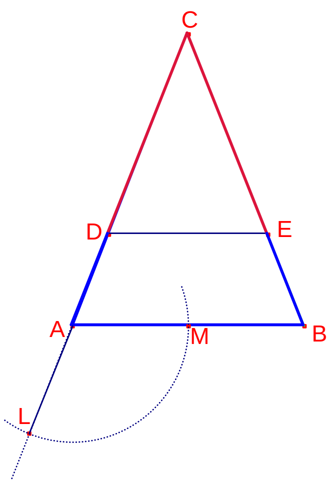
FLAT*landia*

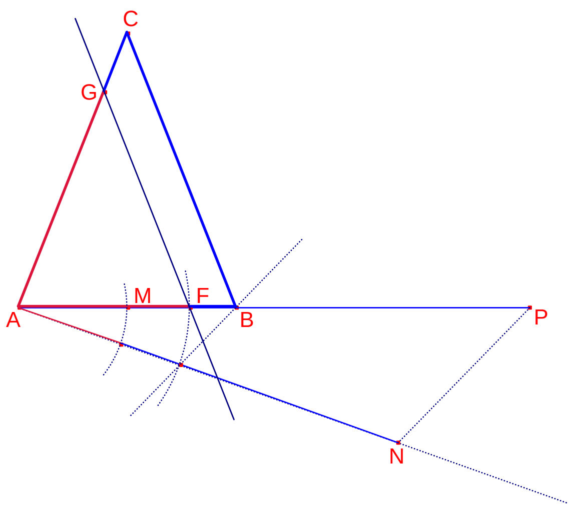
Il problema di Aprile 2006

a) In un triangolo isoscele ABC tracciare una corda DE parallela alla base AB in modo da dividere il perimetro in due parti uguali.
b) Provate ad ottenere lo stesso risultato tracciando una corda FG parallela a uno dei due lati congruenti.

Descrivere e motivare le costruzioni.



LC semiperimetro
D punto medio di LC



AN semiperimetro; BP=BC
Retta per B parallela a NP

Commento

Abbiamo ricevuto sei risposte dalle seguenti scuole:

- ***LS "G.B. Scorza", Cosenza (CS)***
- ***SM "Paisiello", Cinisello Balsamo (MI)***
- ***ITCG "Ruffini", Imperia (IM)***
- ***SM "C.A. Dalla Chiesa", San Genesio ed Uniti, (PV) – due risposte***
- ***ITI "Galileo Ferraris", San Giovanni La Punta (CT)***

Nel problema proposto si chiedeva di dividere in due parti uguali il perimetro di un triangolo isoscele, prima tracciando una corda parallela alla base, poi parallela a uno dei due lati congruenti. Si trattava quindi di procedere a una costruzione motivata o da una dimostrazione sintetica o da una verifica algebrica.
In quasi tutte le risposte gli studenti hanno interpretato correttamente il primo quesito, anche se con motivazioni non sempre esaurienti.
Il secondo quesito ha invece creato qualche difficoltà: c'è chi non lo ha risolto; c'è chi ha fatto ricorso alla risoluzione algebrica senza fornire la costruzione.
Pur essendo corrette, le risoluzioni mediante equazione individuano tramite una misura il punto da cui tracciare la parallela richiesta; si doveva comunque cercare un procedimento geometrico (riga e compasso) per determinare la posizione di tale punto.
L'unico studente che ha fornito una costruzione ben motivata ha "dimenticato" poi di trarre la dovuta conclusione.

Nelle figure che illustrano il testo del problema proponiamo la traccia di due possibili soluzioni alternative a quelle ricevute.

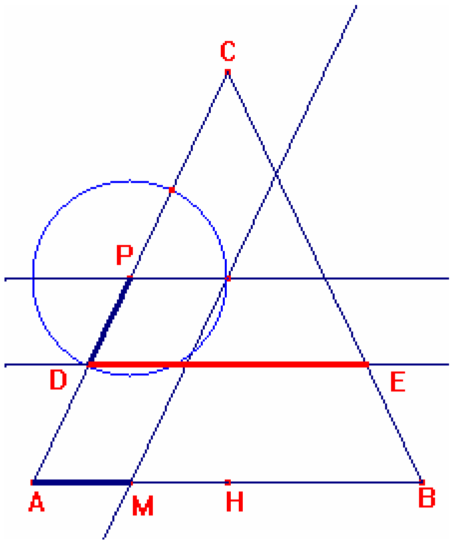
Abbiamo convenuto di presentare le seguenti risposte corredate dalle nostre osservazioni in parentesi quadra. Con la doppia parentesi quadra vengono indicate le parti omesse perché superflue o inopportune.

Soluzione proposta da:

LANCIA Sabrina, MOSCHETTO Enrico, PELLEGRINO Emanuele, ROMEO Matteo, TUDISCO Alberto
Classe 2A ITI "Galileo Ferraris", San Giovanni La Punta (CT)

Si riporta solo la prima parte, in cui si fornisce una costruzione correttamente motivata. Una proposta analoga hanno inviato Elda Bistika, SM "C.A. Dalla Chiesa" e Paola Tonussi, SM "Paisiello".

a. Hp $AC \cong BC$ Ts $\exists\ DE \,//\, AB \mid DC + CE \cong EB + AB + AD$



Sia H il punto medio della base AB ed M il punto medio del segmento AH $\Rightarrow$

$$AM \cong \frac{1}{4} AB \qquad (1)$$

Sia P il punto medio di AC. Mediante una rototraslazione (di centro P e vettore AM) riportiamo il segmento AM sul lato AC a partire da P dalla parte di A $\Rightarrow$

$$CD \cong CP + PD \cong \frac{1}{2} AC + \frac{1}{4} AB \qquad (2)$$

Affinché sia vera la tesi è necessario che il punto D (da cui tracciare la parallela DE alla base AB) sia preso ad una distanza CD da D che verifichi la relazione (2).

Infatti, sia DE // AB $\Rightarrow$ il triangolo CDE è isoscele (in quanto gli angoli alla base sono congruenti perché corrispondenti agli angoli alla base del triangolo ABC rispetto alle parallele DE e AB tagliate dalle trasversali AC e BC) $\Rightarrow$ $DC \cong CE$ $\Rightarrow$

$$DC + CE \cong 2\,DC \cong 2\left(\frac{1}{2} AC + \frac{1}{4} AB\right) \cong AC + \frac{1}{2} AB \qquad \textbf{(3)}$$

I segmenti EB e AD sono congruenti perché differenza di segmenti congruenti $\Rightarrow$

$$EB \cong CB - CE \cong CB - \left(\frac{1}{2} AC + \frac{1}{4} AB\right) \cong \frac{1}{2} AC - \frac{1}{4} AB$$

Allora: $EB + AB + AD \cong 2EB + AB \cong$

$$\cong 2\left(\frac{1}{2} AC - \frac{1}{4} AB\right) + AB \cong AC + \frac{1}{2} AB \qquad \textbf{(4)}$$

Confrontando (3) e (4) si ha la tesi.

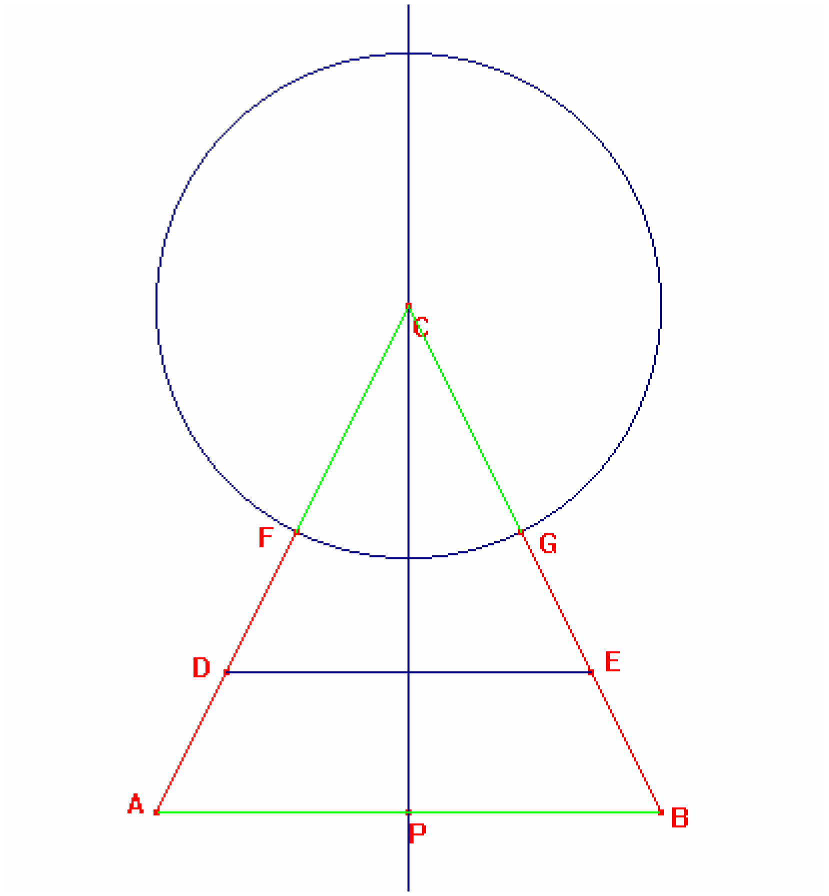
La seconda parte del problema (b) è stata risolta in due modi differenti: una prima soluzione ha sfruttato la similitudine dei triangoli, una seconda il teorema di Talete.

b. [[…]]

Soluzione proposta da

Francesco Bonalda e Alfredo Rivero
Classe 2S Scuola Media “C.A. Dalla Chiesa” San Genesio ed Uniti (PV)

Hanno risolto solo il primo punto con una soluzione molto semplice, che presenta però una omissione nelle motivazioni.



Abbiamo costruito il triangolo isoscele ABC. Abbiamo trovato il punto medio P della base AB.
Utilizzando il compasso costruiamo una circonferenza di centro C con apertura pari a metà di AB .
Chiamiamo F e G i punti di intersezione con i lati obliqui del triangolo.
Costruiamo i punti medi dei segmenti FA e GB e li chiamiamo D e E .
La corda DE divide in due parti uguali il perimetro del triangolo perché la somma di FC più CG è congruente ad AB mentre FD e GE sono congruenti ad AD e a EB perché D e E sono punti medi di FA e GB.

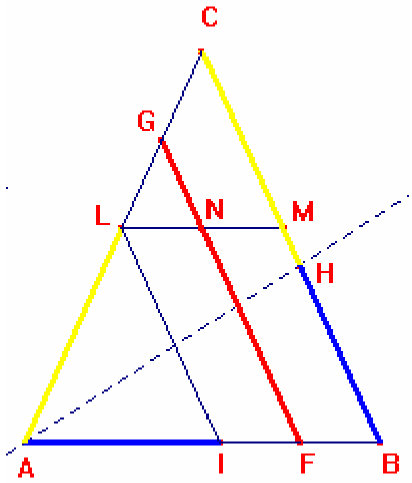
[Si deve inoltre dimostrare che DE è parallelo ad AB, considerando, per esempio, i triangoli isosceli ABC e DEC, con l’angolo al vertice C in comune, …]

Soluzione proposta da:
Alfonso Scarpino, classe 1G LS "G.B. Scorza"
Cosenza (CS)

Ha individuato un procedimento di costruzione valido sia per la prima che per la seconda parte del problema. Presentiamo la seconda con una nostra nota a conclusione del suo percorso.

a) [[…]]

b)



La dimostrazione è quasi identica al caso precedente, con l'unica differenza che questa volta abbiamo preso in considerazione la bisettrice di uno degli angoli alla base che perciò non è anche altezza e mediana.

Costruiamo la bisettrice dell'angolo BAC che, per il teorema della bisettrice dell'angolo interno di un triangolo, divide il lato BC nei segmenti BH e CH, rispettivamente proporzionali ai lati AB e AC; riportiamo questi due segmenti sui lati AB e AC, ottenendo così i segmenti AI e AL.

Possiamo affermare che il triangolo AIL è simile al triangolo ABC perché ha i lati AI e AL rispettivamente proporzionali ai lati AB e AC e l'angolo compreso in comune. I segmenti IL e BC sono paralleli, infatti se i due triangoli a cui appartengono sono simili allora hanno gli angoli corrispondenti congruenti, pertanto gli angoli AIL e ABC sono congruenti, ma visto che i lati AI e AB giacciono sulla stessa retta, i segmenti IL e BM dovranno obbligatoriamente appartenere a rette parallele e quindi essere a loro volta paralleli.

Se i segmenti AI e AL sono proporzionali ai segmenti AB e AC, allora anche le differenze tra AB e AI, e AC e AL (rispettivamente i segmenti IB e LC) sono proporzionali ai lati AB e AC; detto ciò costruiamo la parallela al segmento IB passante per il punto L.

Consideriamo ora il triangolo LMC: esso è simile al triangolo ABC per avere un angolo in comune e gli altri due congruenti per il teorema delle rette parallele tagliate da una trasversale; il segmento GN, congiungente i punti medi dei lati LM e LC, è parallelo al lato MC per una conseguenza del teorema di Talete.

Il quadrilatero IBML è un parallelogramma, infatti i lati IL e BM, come precedentemente dimostrato, sono paralleli e i lati IB e LM sono paralleli per costruzione, ne deriva che i segmenti IB e LM sono anche congruenti. Sempre per una conseguenza del teorema di Talete la congiungente dei punti medi F e N di due lati opposti di un parallelogramma è parallela agli altri due. Per l'unicità della parallela ad una retta per un punto, i segmenti GN e NF giacciono sulla stessa retta e quindi il segmento FG è quello richiesto **[in quanto risulta AF+AG=FB+BC+CG, perché somme di segmenti congruenti].**