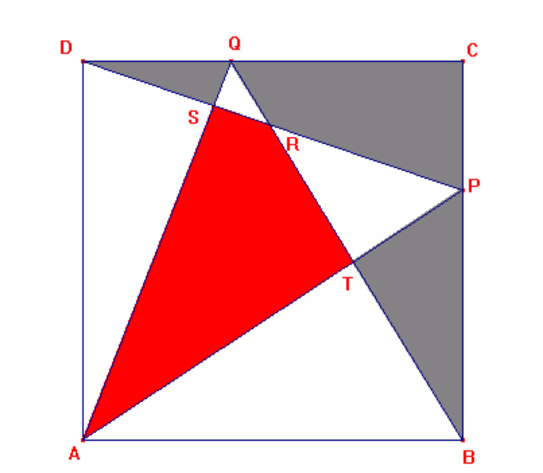
**Soluzione proposta da**
**Notaristefano Preethi, classe I G**
**Liceo "Aristosseno", Taranto**

**a)** Costruendo la figura del problema, osserviamo che i triangoli AQB ed APD, avendo basi e altezze congruenti , sono equiestesi e che l'area di ciascuno di essi è la metà di quella del quadrato ABCD.

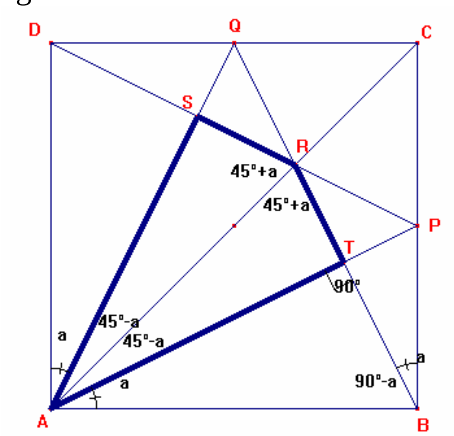



Poiché le figure che si ottengono dalla differenza di figure congruenti (o equiestese) sono equiestese, sottraendo da ciascuno dei suddetti triangoli il quadrilatero ATRS, possiamo dire che la somma delle aree dei triangoli ASD e TPR (indicate tra le parentesi tonde) è uguale alla somma delle aree dei triangoli ABT ed RQS , ovvero:

$$(ASD) + (TPR) \equiv (ABT) + (RQS)$$

Pertanto risulterà:
$(ATRS) \equiv (APD) - (ASD + TPR) \equiv (PCD + ABP) - (ABT + RQS) \equiv$
$\equiv (PCD - RQS) + (ABP - ABT)$
che è l'area colorata in grigio.

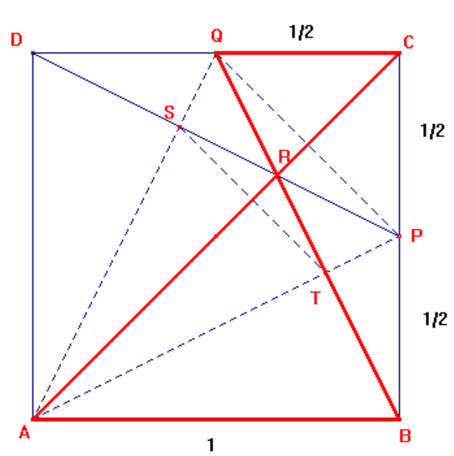
**b)** Nel caso particolare in cui i punti P e Q sono punti medi dei lati BC e CD, il quadrilatero ATRS è un deltoide, unione dei due triangoli rettangoli congruenti ATR ed ASR [*perché? Affermazione da dimostrare in modo esplicito, anche se messa in evidenza nella figura*] la cui ipotenusa, la diagonale AR, giace sulla diagonale AC del quadrato [*anche questa affermazione è da dimostrare, vedi commento*] e misura i 2/3 di AC (come spiegato in seguito) [*vedi commento*]. Il quadrilatero ATRS è inscrittibile e circoscrittibile ad una circonferenza, in quanto gli angoli opposti sono supplementari e la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due (sono a due a due congruenti i lati adiacenti) come si deduce dalla figura.



**c)** Per il calcolo della misura dell'area del quadrilatero ATRS , supponendo AB = 1 , calcoliamo anzitutto la misura di AP (che coincide con quelle di PD, di AQ e di BQ), applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABP: $AP = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$ (essendo BP = $\frac{1}{2}$) .

Poi calcoliamo la misura di AT applicando allo stesso triangolo il primo teorema di Euclide :

$$AT = \frac{AB^2}{AP} = \frac{1}{AP} = \sqrt{\frac{4}{5}} \quad .$$




Se congiungiamo infine T con S e P con Q, dalla similitudine dei triangoli ATS ed APQ (in tratteggio) si ha che:

$\frac{AT}{AP} = \frac{TS}{PQ}$ per cui :

$TS = \frac{4}{5}PQ = \frac{4}{5\sqrt{2}}$

(essendo $PQ = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ l' ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele PCQ i cui cateti misurano $\frac{1}{2}$)

Sono simili anche i triangoli ABR e CRQ (nella figura sono in rosso), AR = 2RC e quindi :

AR = $\frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

Pertanto: (ATRS) = $\frac{1}{2}AR \cdot TS = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{15}$ .