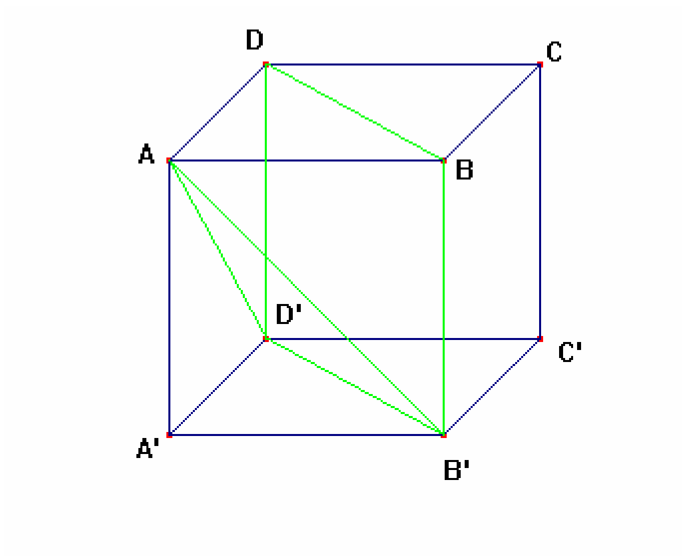
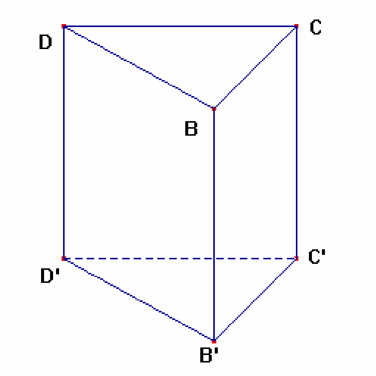
Soluzione proposta da:
Lukas Nannini
Classe 4A (corrisponde alla classe 1[a] della nostra scuola secondaria superiore)
Scuola media 1 Bellinzona (Svizzera)

1) Sezionamento del cubo:

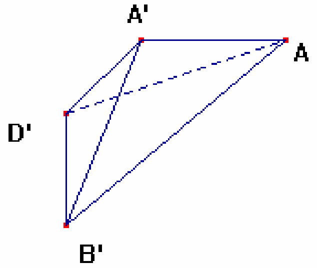


Da cui ricaviamo i seguenti solidi:

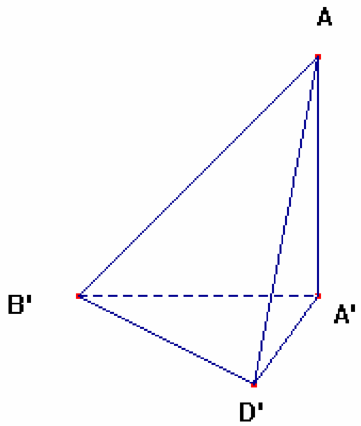
1.1) Un prisma [[…]] retto a base triangolare la cui base è congruente alla metà di una faccia del cubo.



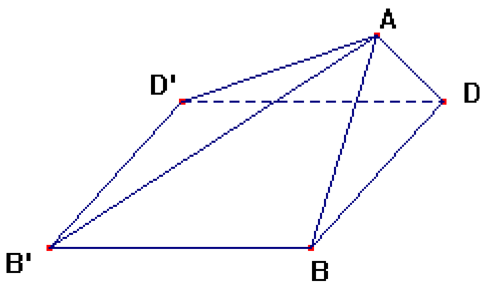
1.2) Una piramide triangolare retta che ha come base il triangolo equilatero AB'D' (poiché AB', AD' e B'D' sono le diagonali delle facce del cubo) e avente come facce laterali dei triangoli rettangoli congruenti fra loro e congruenti alla metà di una faccia del cubo.



La piramide può anche essere considerata una piramide triangolare non retta se prendiamo come base uno qualsiasi dei triangoli rettangoli e avrà come altezza lo spigolo del cubo.



1.3) Una piramide non retta a base rettangolare, difatti il triangolo ADB è perpendicolare al rettangolo DBB'D' e il piede dell'altezza del triangolo è il punto medio del segmento BD.



2) Rapporti

2.1) Il rapporto tra il volume del prisma e quello del cubo è, ovviamente, di $\frac{1}{2}$.

2.2) Considerando la prima piramide come una piramide triangolare non retta il suo volume sarà:

$$V = \frac{\frac{l^2}{2} \cdot l}{3} = \frac{l^3}{6}$$

quindi il rapporto tra il volume della prima piramide e quello del cubo è $\frac{1}{6}$

2.3) Per calcolare il volume della seconda piramide si può (in modo semplice) tener conto della metà del volume del cubo (togliendo quello del prisma) cioè $\frac{l^3}{2}$

Per trovare il volume della piramide, basta sottrarre da metà del volume del cubo il volume della piramide precedente:

$$V = \frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6} = \frac{l^3}{3}$$

quindi il rapporto tra il volume della seconda piramide e quello del cubo è $\frac{1}{3}$

Oppure, in un modo un po' più complicato, si può osservare che l'altezza della seconda piramide è $\frac{l}{2}\sqrt{2}$, infatti la diagonale BD (sulla quale si trova il piede dell'altezza) interseca l'altra diagonale AC nel suo punto medio.

Quindi il volume della seconda piramide è :

$$\mathrm{V} = \frac{l\sqrt{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{2}}{3} = \frac{l^3}{3}$$

Il rapporto tra il volume della seconda piramide e quello del cubo è $\frac{1}{3}$