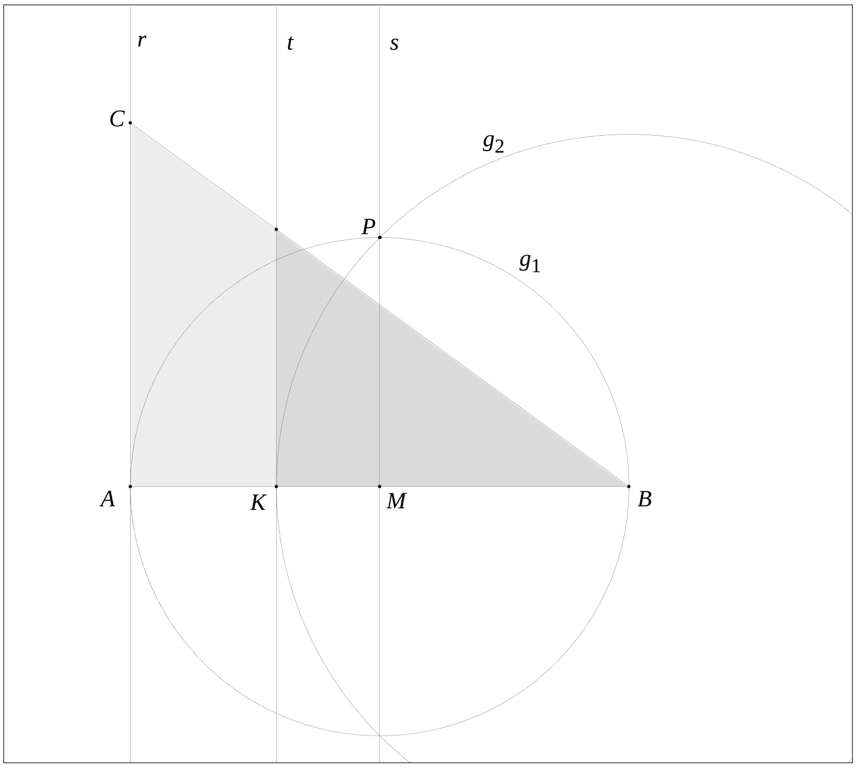
1. Suddivisione di triangoli

1.1 Il problema

proposto da Silvano Rossetto

La costruzione descritta dalla figura seguente divide il triangolo ABC, rettangolo in A, in due parti equiestese:



1) Precisare la costruzione e darne una dimostrazione;
2) estendere la costruzione in modo che il triangolo sia diviso in tre parti equiestese;
3) descrivere la successione dei segmenti BK_1, BK_2, BK_3, … , BK_n, ($K_n = A$) nella suddivisione del triangolo in n parti equiestese.

Si può estendere questa costruzione della divisione in aree equivalenti ad altre classi di triangoli?

Ci sono altre costruzioni, che rispettino altre condizioni, per la suddivisione del triangolo in aree equivalenti?

1.2 Suddividere un triangolo in parti equiestese

di Silvano Rossetto, Nino Anzalone, Aldo Boiti, Maria Batini, Giovanni Porcellano, Silvia Porretti, Gaetano Speranza

Il problema è suddiviso in cinque parti.

Parte prima: precisare la costruzione e darne una dimostrazione.

La prima richiesta del problema è di interpretare la figura (che si immagina trovata in un testo senza tante spiegazioni) e di darne una dimostrazione. Per chi usa *Cabri* è del tutto naturale pensare alla costruzione della figura con questo programma. Il problema può indicare un modo di proporre esercizi di geometria in laboratorio: si propone una figura con elementi caratterizzati da date proprietà, si chiede di costruirla con un software di geometria dinamica (interpretando ed esplicitando le dovute relazioni tra gli elementi della figura), sulla figura poi si esplorano ulteriori proprietà o relazioni.

Descriviamo la costruzione della figura con *Cabri*:

1) Disegnare il segmento AB;
2) portare per A la perpendicolare r ad AB;
3) su r prendere il punto C;
4) costruire M punto medio di AB;
5) disegnare la circonferenza g_1 di centro M e raggio MA;
6) costruire la perpendicolare s ad AB passante per M;
7) segnare il punto P, intersezione di s con la circonferenza g_1;
8) disegnare la circonferenza g_2 di centro B e raggio BP;
9) segnare il punto K, intersezione di g_2 con il lato AB;
10) costruire la perpendicolare t al lato AB passante per K.

La retta t divide il triangolo in due parti equivalenti: *Cabri* fornisce una conferma 'sperimentale' attraverso gli strumenti `poligono` e `area` che possiamo usare per mettere alla prova la congettura e passare poi alla sua dimostrazione.

Prima della dimostrazione possiamo anche cercare se il fatto che il triangolo ABC è retto in A (cioè il punto C è preso sulla retta r perpendicolare ad AB) è essenziale per la costruzione.

A questo scopo si può svincolare C dalla retta r. Con *Cabri* si usa lo strumento `Ridefinizione di un oggetto` del menù delle costruzioni.

Spostando C fuori dalla retta (fig. 1) si osserva facilmente che le due aree non sono più in relazione: tornano ad esserlo se la retta t viene presa parallela al lato AC e non perpendicolare al lato AB (fig. 2).

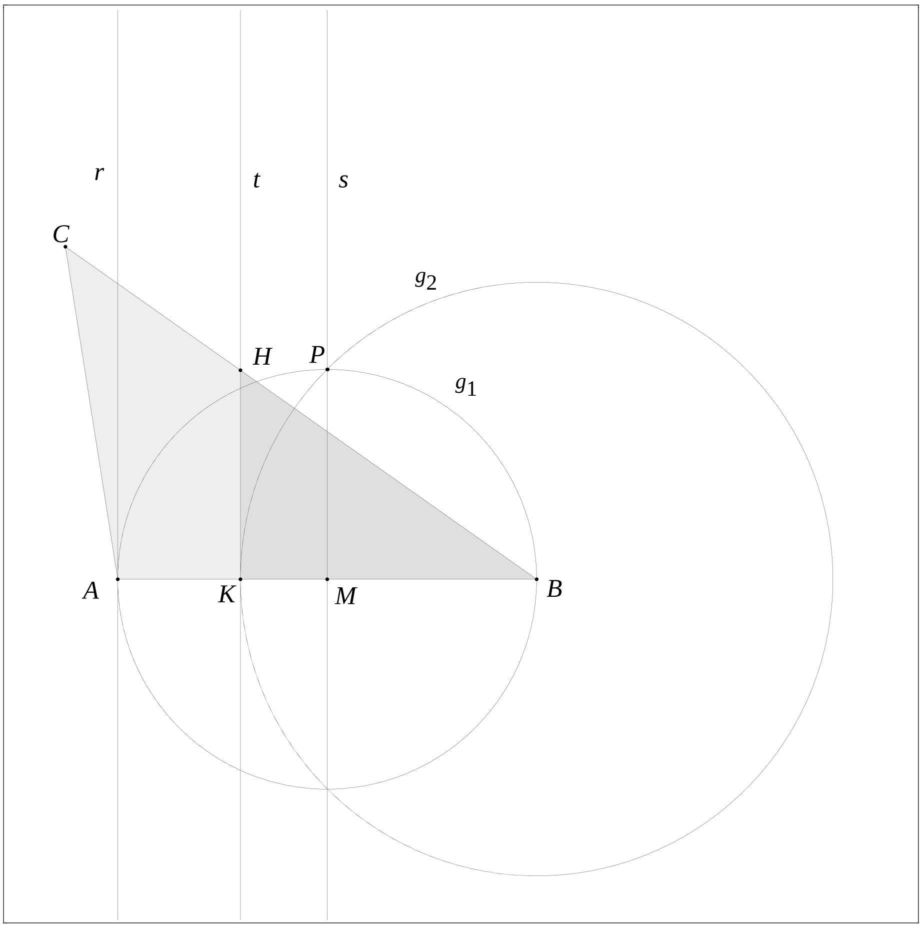


Figura 1

Questa osservazione apre la strada alle dimostrazioni di questo e dei punti successivi.

Studiamo il caso della figura 2, cioè il caso di un triangolo qualsiasi.

I triangoli ABC e KBH (H intersezione di t con BC) sono simili (lati paralleli): il rapporto delle aree è il quadrato del rapporto di similitudine.

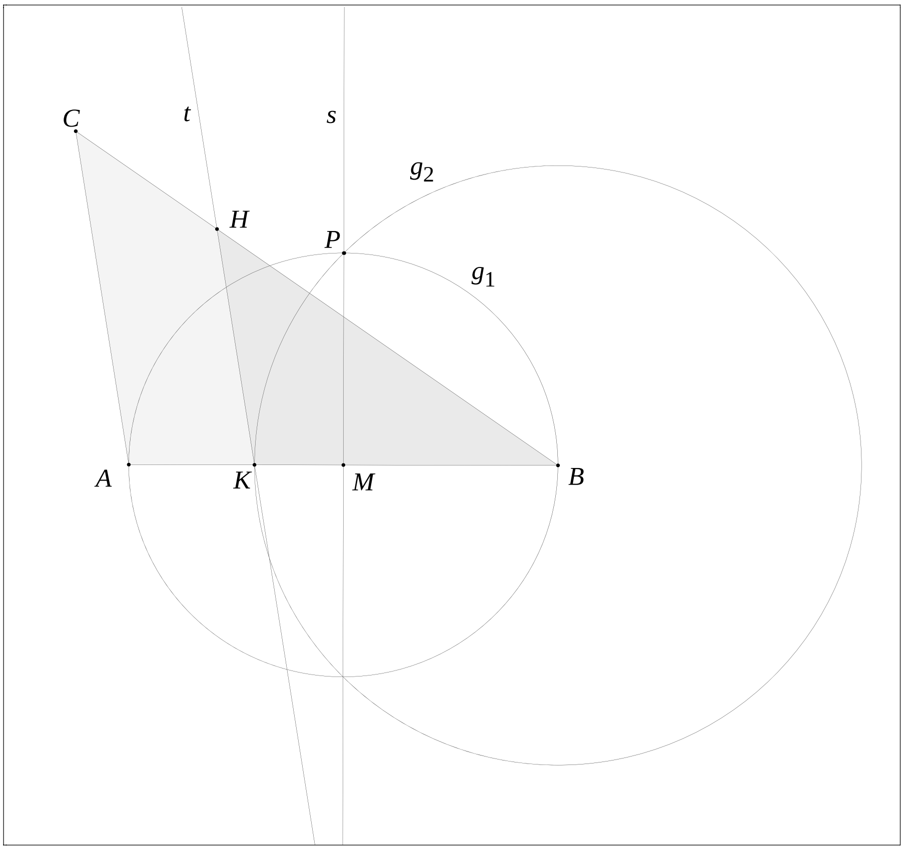


Figura 2

Calcoliamo il rapporto di similitudine dei due triangoli *ABC* e *KBH*:

$$\frac{KB}{AB}=\frac{PB}{AB}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}AB}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e quindi, passando al quadrato, l'area del triangolo *KBH* è metà dell'area del triangolo *ABC*.

Seconda parte: estendere la costruzione in modo che il triangolo sia diviso in tre parti equiestese.

Ripartiamo dal generico triangolo *ABC*. Dividiamo il lato *AB* in tre parti uguali (fig. 3).

Descriviamo la costruzione della figura con *Cabri*:

1) Disegnare un punto C non appartenente alla retta r passante per A e B;
2) disegnare la retta s passante per A e C;
3) disegnare la circonferenza g_1 di centro C e raggio AC;
4) segnare il punto $D \neq A$, intersezione di r con la circonferenza g_1;
5) disegnare la circonferenza g_2 di centro D e raggio DC;
6) segnare il punto $E \neq C$, intersezione di s con la circonferenza g_2;
7) disegnare la retta t passante per B ed E;
8) costruire la retta t_1 passante per D e parallela a t;
9) segnare il punto M_1, intersezione di t_1 con r;
10) costruire la retta t_2 passante per C e parallela a t;
11) segnare il punto M_2, intersezione di t_2 con r.

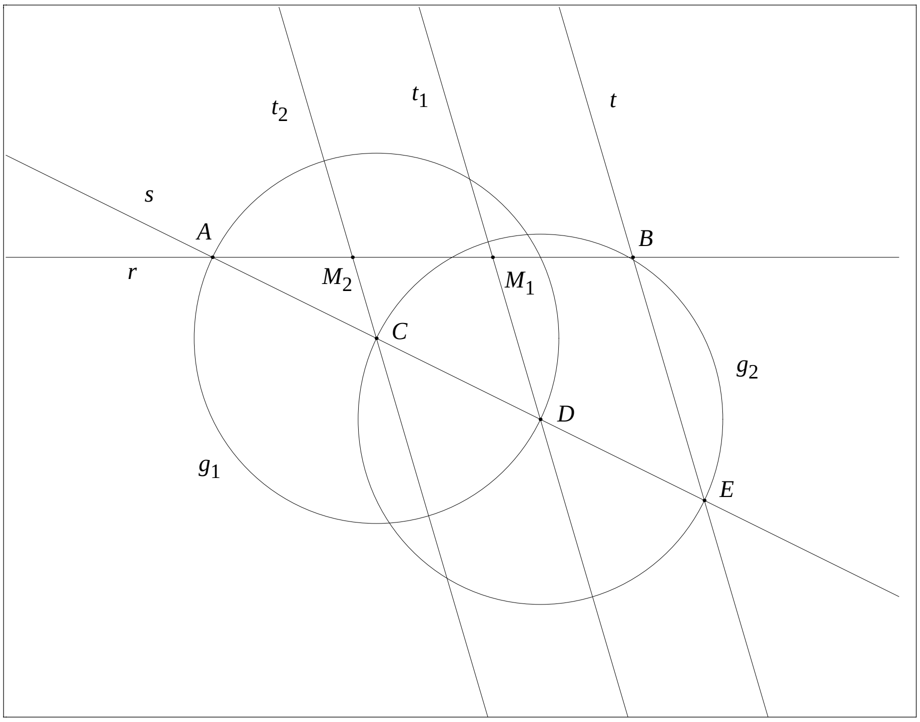


Figura 3

Tracciamo la circonferenza g di diametro AB. Portando per M_1 ed M_2 le perpendicolari ad AB, si segnano i punti P_1 e P_2 loro intersezioni con la circonferenza g (fig. 4). Puntando in B si tracciano le circonferenze g_1 e g_2 che intersecano AB in K_1 e K_2. Dimostriamo che le parallele per K_1 e K_2 al lato AC dividono il triangolo in tre parti equiestese.

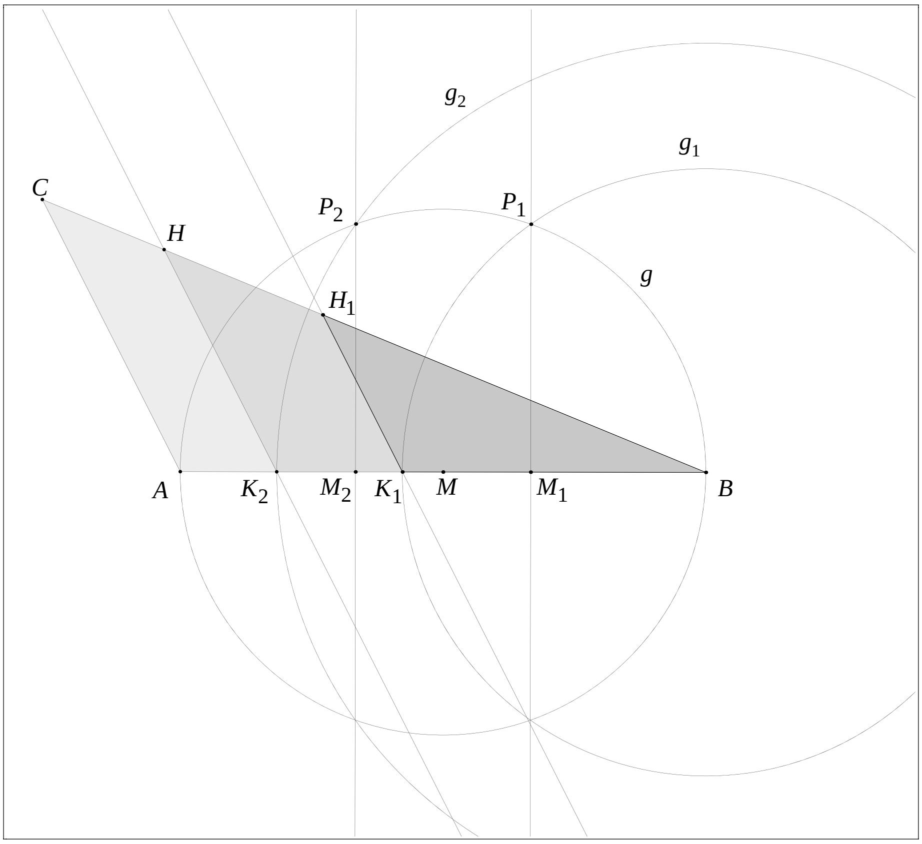


Figura 4

Poiché il problema chiede che le aree dei tre triangoli BK_1H_1, BK_2H_2, BAC siano in rapporto 1/3, 2/3, 1, il rapporto tra i rispettivi lati dovrà essere:

$$\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3},\ 1$$

Ed infatti possiamo calcolare:

$$\frac{BK_1}{AB}=\frac{BP_1}{AB}=\frac{\sqrt{\left(BM_1\right)^2+\left(M_1P_1\right)^2}}{AB}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{3}AB\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(AB)^2}}{AB}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

e, in modo analogo,

$$\frac{BK_2}{AB}=\frac{BP_2}{AB}=\frac{\sqrt{\left(BM_2\right)^2+\left(M_2P_2\right)^2}}{AB}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\frac{2}{3}AB\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(AB)^2}}{AB}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Con questo è dimostrata la seconda parte.

Parte terza: descrivere la successione dei segmenti BK_1, BK_2, BK_3, … , BK_n ($K_n = A$) nella suddivisione del triangolo in n parti equiestese.

Chiedere che il triangolo sia segmentato in n parti equiestese, equivale a chiedere che i corrispondenti triangoli abbiano aree in rapporto: $1/n$, $2/n$, $3/n$, … , m/n, … , 1 con l'area del triangolo ABC dato.

Le basi di tali triangoli dovranno essere nei seguenti rapporti con il lato AB del triangolo dato:

$$\frac{\sqrt{n}}{n},\ \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{n}}{n},\ \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{n}}{n},\ \ldots,\ \sqrt{m}\,\frac{\sqrt{n}}{n},\ \ldots,\ 1$$

Per la dimostrazione possiamo calcolare, come sopra, l'm-esimo elemento della sequenza:

$$\frac{BK_m}{AB} = \frac{BP_m}{AB} = \frac{\sqrt{(BM_m)^2 + (M_m P_m)^2}}{AB} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{m}{n} AB\right)^2 + \frac{(n-m)}{n} \frac{m}{n} AB^2}}{AB} = \sqrt{\frac{m \cdot n}{3}} = \sqrt{m} \frac{\sqrt{n}}{n}$$

e constatare che corrisponde a quello atteso.

Quarta parte: Si può estendere questa costruzione della divisione in aree equivalenti ad altre classi di triangoli?

A questa domanda si è già risposto sopra osservando che il fatto che il triangolo sia rettangolo non ha relazione con la soluzione espressa. Il problema anzi si può riformulare nel modo seguente: dato un triangolo dividerlo in n parti equiestese con rette parallele ad uno dei lati.

Questa formulazione può suggerire una prima variante del problema: dato un triangolo lo si divida in due parti equiestese con una retta parallela rispetto a ciascuno dei tre lati (come in figura 5); dimostrare che il rapporto tra l’area del triangolo interno e quello dato è costante.

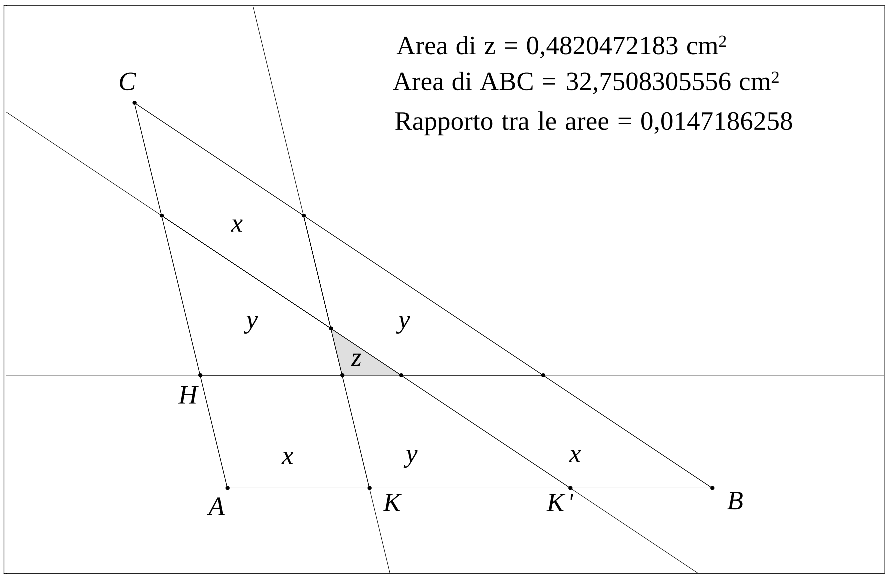


Figura 5

Il triangolo *ABC* viene diviso a metà tre volte dalle tre rette parallele ai lati.

Le tre rette dividono il triangolo in sette parti: 3 parallelogrammi (x), 3 trapezi (y) e il triangolo z. I tre parallelogrammi sono equiestesi infatti per la costruzione

$$AK = K'B = AB\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

e lo stesso vale per i segmenti corrispondenti sugli altri lati. Di conseguenza anche i trapezi (y) sono equiestesi (per differenza di aree).

Inoltre per la bisezione si ha: $x + 2y + z = 2x + y$; da cui segue la relazione $y + z = x$.

Dalle condizioni del problema si può ricavare il sistema (riga #1 del listato seguente, che riporta i calcoli svolti con *Derive*) e, dato che x è doppio dell'area del triangolo *AKH* (simile al triangolo *ABC*, riga #3), calcolare l'area di z posta uguale a 1 l'area di *ABC*.

#1: $\mathrm{SOLVE}\left(\left[y + z = x,\ y = \frac{1}{2} - 2\cdot x\right],\ [y, z]\right)$

#2: $\left[y = \frac{1 - 4\cdot x}{2} \wedge z = \frac{6\cdot x - 1}{2}\right]$

#3: $2\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

#4: $z = \frac{6\cdot x - 1}{2}$

#5: $z = \frac{6\cdot\left(2\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - 1}{2}$

#6: $z = \frac{17}{2} - 6\cdot\sqrt{2}$

#7: $z = 0.01471862577$

Quinta parte: Ci sono altre costruzioni, che rispettino altre condizioni, per la suddivisione del triangolo in aree equivalenti?

Le costruzioni più semplici, forse troppo, sono quelle della suddivisione in triangoli ottenuti dividendo la base in n parti uguali e unendo i punti con il vertice opposto…, oppure suddividendo il triangolo in n^2 triangoli uguali (e simili a quello dato) tagliandolo con rette equidistanti parallele ai lati.

Ci sono però altre condizioni che portano a costruzioni più intriganti e interessanti:

1. dividere il triangolo in due parti con una retta perpendicolare ad un lato; le tre rette perpendicolari ai lati, che dividono il triangolo a metà, concorrono nello stesso punto?

2. dato il triangolo e fissato un punto nel piano, tracciare la retta per il punto che divide il triangolo in due parti uguali.

1.3 Ipotesi di utilizzo didattico

di Silvano Rossetto

Il problema si propone come modalità di utilizzo del laboratorio d'informatica per svolgere con la classe un'attività di approfondimento: si propone una costruzione geometrica con una figura e qualche relazione essenziale. Si chiede di precisare la costruzione, di formulare congetture, di dimostrare qualche proprietà, di esplorare estensioni ecc.

Per questo problema è sembrato naturale l'utilizzo del programma di geometria dinamica *Cabri*.

Il problema si presta ad attività a diversi livelli scolastici. Si può proporre al biennio come applicazione della similitudine.

Nelle esperienze condotte si è notata una difficoltà degli allievi, dovuta anche al periodo e ai tempi disponibili, di risolvere autonomamente il problema. Sembra poi di osservare negli allievi una maggiore familiarità con il rapporto di similitudine (lineare) e una difficoltà a vedere il rapporto tra le aree. Nell'esplorazione delle estensioni, si può incappare in problemi che non si sanno risolvere, pur essendo espressi in termini del tutto elementari. Questo non deve essere temuto dall'insegnante come un pericolo, ma essere visto come una importante opportunità didattica per mostrare agli allievi anche questo aspetto della matematica e il fatto, che dovrebbe essere ovvio, che da una parte esistono ancora questioni aperte e dall'altra l'insegnante non è il depositario di una verità rivelata.