quaderni di CABRIRRSAE

Paolo Dall'Aglio e Daniele Gouthier

proble MATEMATICA mente

2000 - 2001

n° 20

Paolo Dall'Aglio
SISSA, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati
Daniele Gouthier
SISSA, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati

Released Information
Videoimpaginazione GRAPHICART - Via Fondazza, 37 - Tel. Fax (051) 30.70.73 - 40125 BOLOGNA

INDICE

INTRODUZIONE

Nell'ambito del progetto Fardiconto dell'IRRE-ER, si è articolata la seconda edizione di probleMATEMATICAmente, un'attività rivolta principalmente alle scuole superiori.
Ogni mese viene pubblicato all'indirizzo http://arci01.bo.cnr.it/capri/probmat un problema, gli studenti sono invitati a risolverlo e a inviare per posta elettronica la soluzione entro due settimane. Il mese successivo, col testo del nuovo problema, vengono pubblicate le risposte più interessanti accompagnate da un commento. In questo quaderno, sono riportati tutti i problemi del secondo anno, con le soluzioni pubblicate in rete e i commenti.

I problemi vengono scelti in modo da poter essere affrontati con strumenti matematici vari, con bagagli culturali anche molto diversi e potrebbero sembrare difficili allo studente perché, in generale non fanno riferimento a nessuna parte del programma scolastico in particolare, ma, potenzialmente, a tutte: cerchiamo di portare gli studenti fuori dalla gabbia degli esercizi per stimolare la ricerca di strumenti adatti a quel singolo problema.
Nonostante questo, va sottolineato che probleMATEMATICAmente non è il tentativo di proporre un altro metodo di insegnamento, ma vuole essere solamente uno strumento da affiancare a quelli tradizionali.

Nell'elaborazione del commento alle risposte ricevute, abbiamo cercato di mettere in evidenza la molteplicità degli approcci e di dare un ampio spazio alle soluzioni degli studenti, valorizzando quelle più interessanti. Le soluzioni vengono raggruppate a seconda della via seguita, inserendo integralmente quelle più chiare e complete di ciascun gruppo. In questo quaderno, le soluzioni sono esposte nei paragrafi su due colonne, per simulare la struttura ipertestuale della versione in rete.

Un'ultima considerazione va fatta su quanti hanno partecipato. Si è trattato soprattutto di singoli studenti, con un buon nucleo di affezionatissimi. Pensando all'attività, ci aspettavamo che potesse diventare uno strumento da usare in classe, ma, anche quest'anno, le risposte arrivate a nome di tutta una classe sono state davvero sporadiche. Da segnalare la partecipazione di alcuni appassionati di matematica.

Nel corso di questo secondo anno, abbiamo aperto una nuova sezione di probleMATEMATICAmente che raccoglie tutte le questioni rimaste aperte nell'affrontare i problemi. Naturalmente, invitiamo gli studenti a mandarci le loro soluzioni di questi nuovi problemi. L'ultimo paragrafo di questo quaderno raccoglie i problemi ancora aperti.

NOTA ALLA VERSIONE STAMPATA

Rispetto alla versione in rete, in questo quaderno abbiamo curato alcuni dettagli. Mentre nel riportare i testi degli studenti in rete abbiamo sempre cercato di non apportare modifiche, qui ci siamo permessi di correggere qualche errore e anche di migliorare qualche frase. Alcune figure sono state modificate, per esempio unificando la notazione o correggendo qualche imprecisione.

RINGRAZIAMENTI

All'IRRE-ER che ci offre lo spazio in rete e la collaborazione per realizzare mensilmente probleMATEMATICAmente, va la nostra gratitudine.
Un grazie di cuore ad Annamaria Arpinati che ha fortemente voluto la nostra attività, a Franca Noè che ci ha spianato la strada con Flatlandia e al professor Barozzi che ha fatto da supervisore per i contenuti matematici.
La collaborazione tecnica di Alberto Mingardi è stata preziosa, alleviandoci molti problemi di gestione informatica.
Una citazione va poi fatta alle biblioteche della SISSA (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati) e dell'ICTP (International Center of Theoretical Physics) di Trieste presso le quali sono state fatte molte delle ricerche bibliografiche essenziali all'attività.

proble MATEMATICA mente

2000 - 2001

Paolo Dall'Aglio e Daniele Gouthier

Ecco le scuole che hanno partecipato almeno una volta

1 - LS Galilei Adria, RO
2 - LS Leonardo da Vinci Gallarate, VA
3 - LS Galilei, Catania
4 - LS Fanti Carpi, MO
5 - LS Boggio Lera, Catania
6 - ITG Ruffini, Imperia
7 - LC Russell, Roma
8 - ITC Fossati, La Spezia
9 - LS Vittorio Veneto, Milano
10 - LS Pitagora Rende, CS
11 - IPSSAR Artusi Forlimpopoli, FC

La partecipazione degli studenti

	classe	risposte inviate
Alberto Cornia	V	xxxxxx
Enrico Tombetti	III	xxxxxx
Daniele Urzì	III	xxxxx
Maurizio Melchiorre		xxxx
Valentina Mantovan	IV	xxx
Francesco Marino	III	xxx
Francesco Panizzoli	III	xxx
Orazio Federico Aiello	IV	xx
Classe 3A Progr. ITG Ruffini IM		xx
Lorenzo Marchini	IV	xx
16 persone		x
3 classi		x

Bibliografia

[CR] R. Courant, H. Robbins,
Che cos'è la matematica?,
Bollati Boringhieri, 1971

[KRA] S.G.Krantz,
Techniques of problem solving,
AMS, 1997.

[LAR] L.C. Larson,
Problem solving through problems,
Springer-Verlag, 1983.

[OLI] AA.VV.,
XXXVI olimpiadi di matematica (selezione italiana di Cesenatico),
AgipPetroli, 1996.

[SNS] AA.VV.,
I problemi di matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa,
Bollati Boringhieri, 1985

[UD] AA.VV.,
Venti anni di gare matematiche,
Mathesis, sezione di Udine, 1997

[UMI] *Notiziario dell'Unione Matematica Italiana*, 1998 - 2000.

Problemi aperti

Nel corso dell'attività di probleMATEMATICAmente, abbiamo proposto agli studenti alcune questioni nate dalle soluzioni che loro hanno inviato ai nostri problemi. Non sono questioni originali, ma sono nello spirito di quest'attività. Le richiamiamo qui per chi volesse dire la sua. La prima di queste è stata poi risolta ed è riportata nel quaderno 1999-2000. Ecco quelle ancora aperte.

1. Tratta dal problema ottobre 2000:
dato un triangolo, se lo divido in 16 triangolini tutti uguali tra di loro, questi sono necessariamente simili al triangolo iniziale?
Si noti che un triangolo equilatero può essere diviso in 2, 3, 6 triangoli uguali tra loro ma non equilateri. Che succede con 16?
E in generale?

2. Suggerita da Daniele Urzì a margine della soluzione del problema maggio 2001:
dimostrare se, dato un triangolo ABC e la circonferenza a esso circoscritta, esiste sempre un punto P dell'arco AB tale che $PA + PB = PC$

3. Tratta dal problema novembre 2001:
date nello spazio due rette incidenti o sghembe r ed s, descrivi il luogo dei punti P tali che la somma delle distanze di P dalle due rette sia minore o uguale a 1

Ottobre 2000

- **Dato un triangolo *T* considera un rettangolo *R* inscritto che abbia area massima. Quindi dividi il triangolo in 16 triangolini T_i simili a *T* e uguali fra loro. In ciascuno di questi prendi un rettangolo R_i come sopra. Prova che l'area di R è la somma delle aree dei rettangoli R_i.**
- **In questo teorema ci sono delle *ipotesi superflue*, prova a eliminarle.**
- **Più difficile: la stessa proprietà vale se al posto del rettangolo *R* consideri un'ellisse inscritta *E*. Provalo.**

Problema tratto da [LAR] (1)

Abbiamo ricevuto cinque risposte da:
Alberto Cornia 5B, LS Fanti, Carpi, (MO);
Francesco Marino e Francesco Panizzoli, 3 LC Russell, Roma;
Enrico Tombetti, 3C, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA);
Daniele Urzì, 3B, LS G.Galilei, Catania;
Umberto Villa, 4I, LS Vittorio Veneto, Milano.

Un bentornato a Villa e un benvenuto ai quattro nuovi partecipanti.
La prima parte del problema è stata affrontata da tutti, con alterne fortune.

1 ■ Si poteva partire in alcuni modi diversi: Alberto Cornia ha ricordato che i rettangoli di area massima sono quelli che si ottengono con i punti medi dei lati del triangolo. Sarebbe stato meglio dimostrarlo, ma è un fatto abbastanza noto.

Alberto Cornia

Si dimostra che esistono tre rettangoli *R* di area massima; sono quelli che hanno per basi i segmenti congiungenti i punti medi dei lati e per altezze la metà delle corrispondenti altezze, e la loro area è metà di quella di *T*.

Questo naturalmente vale anche per i rettangolini R_i rispetto ai triangolini T_i; quindi, poiché ognuno di questi ultimi ha area *1/16* di quella di *T*, ognuno dei rettangolini R_i avrà area *1/32* di quella di *T*, e quindi *1/16* di quella di *R*: poiché i rettangolini sono *16*, la somma delle loro aree dà proprio l'area di *R*.

2 ■ In alternativa, poteva bastare dimostrare che l'area massima è la metà di quella del triangolo (così ha fatto Daniele Urzì). Poteva essere sufficiente osservare, anche senza determinare il rettangolo, che il valore dell'area massima deve essere unico.

Daniele Urzì

Sia *ABC* il triangolo *T* e *PQRS* un rettangolo *R* inscritto con *PQ* su *AB*. Dette *b* e *h* le dimensioni di *T*, dimostriamo che l'area massima di *R* è *bh/4*.

Chiamiamo *b'* la base *SR* del triangolo *SRC* e *x* la sua altezza *CH*, essendo simili i triangoli *ABC* e *SRC* si ha *b:b'=h:x*, che implica *b'=bx/h* inoltre è *SP=h-x*. L'area del rettangolo *R* è allora

$$A = SR \cdot SP \mapsto A = (bx/h)(h-x)$$

La funzione da massimizzare è quindi

$$y = (-b/h)x^2 + bx$$

L'equazione a essa associata ha per soluzioni *0* e *h* (*h*>0); il suo grafico è una parabola passante per i punti *A(0,0)* e *B(h,0)*, avente la concavità verso il basso. Il vertice *V* della parabola è il punto di ordinata massima:

$$y_{max} = A_{max} = y_V = -\Delta/4a = bh/4$$

Sui rettangoli di area massima inscritti in un triangolo, va anche notato che in genere sono tre, appoggiati uno su ciascun lato. Il rettangolo è unico solo se il triangolo è ottusangolo.

3 ■ Un'altra buona dimostrazione è quella di

Enrico Tombetti

Chiamando con *x* l'area del triangolo *T* e con *y* l'area del rettangolo *R*, il loro rapporto sarà *x/y*.

Siccome i *16* triangolini T_i sono uguali fra loro e la somma delle loro aree equivale all'area del triangolo *T*, la loro area sarà *x/16*.

Dato che i rettangolini R_i sono stati inscritti nei triangolini T_i con lo stesso criterio con cui il rettangolo *R* è stato inscritto in *T* il rapporto tra le aree di T_i e R_i sarà uguale al rapporto tra le aree di *T* e di *R*. ⇨

(1) Si veda bibliografia

segue **3**

Chiamando con z l'area dei *16* rettangolini T_i si può scrivere la seguente proporzione: $x:y = (x/16):z$ da cui si ricava $z = y/16$. Si può ben notare che $16z = y$. c.v.d.

La seconda parte era, forse, la più complessa, dal momento che a scuola raramente ci si esercita sull'importanza delle ipotesi. Nessuna delle risposte, a questo proposito, è veramente soddisfacente. Alcune sono molto generiche. Solo due risposte propongono degli indebolimenti in modo corretto (anche se incompleto): Urzì nota (ma non dimostra) che i triangolini possono essere anche solo simili e non necessariamente uguali;

4 ■ Cornia elimina anche l'ipotesi che i triangolini siano *16* provando che il risultato vale anche con *n* triangolini simili.

Alberto Cornia

Un'ipotesi superflua è che i triangolini siano *16*: possono essere in qualsiasi numero, purché siano tutti simili a T.
Inoltre non è necessario che i triangolini debbano essere uguali fra loro: è sufficiente la similitudine con T. Infatti, in ognuno degli n triangolini T_i così risultanti l'area R_i sarà sempre la metà; e la somma delle metà di aree che complessivamente hanno l'area di T sarà pari alla metà dell'area di T (per la proprietà associativa dell'addizione, infatti,

$$1/2A(T_1) + 1/2\,A(T_2) + \dots + 1/2\,A(T_n) = 1/2\,(A(T_1) + A(T_2) + \dots + A(T_n))\,) = 1/2\,A(T)$$

Un enunciato molto generale poteva essere: dato un triangolo T considera un rettangolo R inscritto che abbia area massima. Dividi il triangolo in n triangolini T_i qualsiasi. In ciascuno di questi prendi un rettangolo R_i come sopra. Allora l'area di R è la somma delle aree dei rettangoli R_i.

La dimostrazione si basa sul fatto che l'area del triangolo è sempre il doppio dell'area del rettangolo (come hanno notato Cornia e Tombetti). E quindi si ha $Area(R) = 2\,Area(T) = 2\,\{Area\,(T_1) + \dots + Area(T_n)\} = Area(R_1) + \dots + Area(R_n)$. c.v.d.

5 ■ Per quanto riguarda la terza parte, quella sull'ellisse, solo Cornia ha proposto una soluzione corretta. Notiamo che la sua dimostrazione è esatta solo assumendo l'ipotesi che i triangolini siano simili a T.

Alberto Cornia

Un'ellisse inscritta di area massima avrà area pari a k volte quella di T, con $0 < k < 1$; se ci sono più ellissi di questo genere, avranno ovviamente area uguale (il valore massimo dell'area dell'ellisse inscritto in un dato triangolo può essere naturalmente uno solo).
Se si ricavano dei triangolini T_i simili a T, le ellissi di area massima inscritte in ognuno dei triangolini avranno quindi area pari a k volte quella di T_i. Come sopra, dunque,

$$kA(T_1) + kA(T_2) + \dots + kA(T_n) = k(A(T_1) + A(T_2) + \dots + A(T_n)) = kA(T).$$

Anche in questo caso, però, l'ipotesi della similitudine è superflua e il teorema più generale è il seguente: dato un triangolo, considera un'ellisse E inscritta che abbia area massima. Dividi il triangolo in n triangolini qualsiasi. In ciascuno di questi considera un'ellisse di area massima. Allora la somma delle aree delle ellissi piccole è l'area di *E*.

Dimostrazione: dato il triangolo *T* considera una trasformazione affine che lo manda in un triangolo equilatero *T'*. Allora l'ellisse *E* viene mandata nell'ellisse *E'* di area massima (che quindi è una circonferenza). *E'* ha area massima dal momento che una trasformazione affine conserva il rapporto tra le aree. Pertanto anche il rapporto tra l'area dell'ellisse e l'area del triangolo è costante, *k*, e non dipende dal triangolo. Allora si può scrivere
$Area(E) = k\ Area(T) = k\ \{Area\ (T_1) + \ldots + Area(T_n)\} = Area(E_1) + \ldots + Area(E_n)$.
c.v.d.

Nota: è interessante osservare che questa dimostrazione non funziona per provare la prima parte. Infatti, il rettangolo viene mandato dalla trasformazione affine in un parallelogramma. Se invece del rettangolo di area massima si considera un parallelogramma di area massima (e questi invece che tre sono infiniti), si ha ugualmente il teorema e la dimostrazione dell'ellisse vale. Ecco allora che anche l'ipotesi "rettangolo di area massima" può essere indebolita in "parallelogramma di area massima".

In conclusione, l'affermazione di Tombetti che "dividendo *T* in *16* triangolini tra loro uguali essi sono necessariamente simili a *T*" fa pensare. Ad esempio, un triangolo equilatero può essere diviso in *2*, *3*, *6* triangoli uguali tra loro ma non equilateri. Che succede con *16*? e in generale?

Novembre 2000

Risolvi l'equazione *3x - [x] = 8*. Ricorda che *[x]* indica la parte intera di *x*, ovvero il più grande numero intero minore o uguale a *x* (per esempio *[6,2] = 6*).
Cosa sai dire dell'equazione a*x* + *b[x] = c*, al variare di *a, b, c* numeri interi?

Tratto da [UD]

Hanno risposto in sei:
Antonio Bevacqua, 3A, LS Pitagora, Rende, (CS)
Alberto Cornia, 5B, LS Fanti, Carpi, (MO)
Emanuele Spadaro, LS Galilei, Catania
Daniele Urzì, 3B, LS Galilei, Catania
Gianpiero Caruso, 3A, LS Boggio Lera, Catania
e un anonimo (tutti i partecipanti sono pregati di includere sempre nome, cognome, classe, scuola e città nel testo della soluzione che ci mandano).

A nostro parere, il problema era abbastanza interessante perché permetteva risoluzioni e considerazioni parziali diverse. Lo si può notare proprio leggendo le sei soluzioni arrivate.
Per chiarezza di esposizione, dividiamo il nostro commento in quattro parti:

(I) Il caso particolare. Cioè, studiare l'equazione *3x - [x] = 8*.
(II) Il caso generale. Cioè, studiare immediatamente *ax + b[x] = c* e vedere la prima parte come una semplice applicazione.
(III) L'analisi del grafico di *f(x) = ax + b[x]*, per ragionare su come devono comportarsi le soluzioni. Come sempre, l'osservazione del grafico serve per farsi un'idea, fare congetture e considerazioni **ma non** è una soluzione completa.
(IV) Un sottoproblema. Cioè, studiare quante sono le soluzioni di *ax + b[x] = c*.

1 ■ Per questa prima parte (I), un buon esempio di soluzione, corretta e ben esposta, è quella di Alberto Cornia.

Alberto Cornia
Ponendo $[x] = n$, si avrà che $x = n + k$, con k compreso fra 0 (incluso) e 1.
Si ottiene allora: $3(n + k) - n = 8$, da cui $3k = 8 - 2n$.

È chiaro che, dovendo essere il primo membro intero (perché il secondo membro è la somma di due valori interi), k può assumere solo i valori 0, $1/3$, $2/3$.
Per $k = 0$ si ha $n = 4$, da cui $x = 4$; per $k = 1/3$ non c'è alcuna soluzione (poiché n non risulta intero); per $k = 2/3$ si ha $n = 3$, da cui $x = 11/3$.

2 ■ L'approccio proposto da Daniele Urzì (II) è il più completo e permette di vedere il primo caso come un semplice esempio.

Daniele Urzì
Si voglia risolvere l'equazione $ax + b[x] = c$, al variare di a, b, c numeri interi. Poniamo $x = [x]+k$, dove $[x]$ indica la parte intera di x e k la differenza $x - [x]$; si noti che è

$$0\leqslant k<1 \quad \textbf{(1)}$$

Premesso ciò, sostituendo $[x] + k$ a x si ottiene:

$$[x]=(c-ak)/a+b \quad \textbf{(2)}$$

Osserviamo che il primo membro di questa relazione è un numero intero, allora, al secondo membro, $c - ak$ deve essere un multiplo intero di $a + b$. Supponendo sempre $a > 0$, dalla **(1)** si ottiene:

$$0\leqslant ak<a \mapsto -a<-ak\leqslant 0 \mapsto c-a<c-ak\leqslant c \quad \textbf{(3)}$$

quindi tutti i numeri $c - ak$ vanno cercati fra i multipli interi di $a + b$ nell'intervallo
$(c -a, c]$. Una volta trovato $c - ak$ è possibile determinare k e $[x]$ e quindi x. Chiaramente, le soluzioni dell'equazione $ax + b[x] = c$ sono tante quanti sono i multipli interi di $a + b$ nell'intervallo $(c - a, c]$.
Ad esempio, risolvere l'equazione $3x - [x] = 8$: ponendo $x = [x] + k$, in virtù della **(2)** otteniamo $[x] = (6-3k)/2$; essendo $a = 3 > 0$ per la **(3)** si ha $5 < 8 - 3\alpha \leqslant 8$.
Allora tutti i numeri $8 - 3k$ sono i multipli interi di 2 nell'intervallo $(5,8]$:

$$8-3k_1 = 6 \quad k_1 = 2/3 \mapsto [x_1] = 3 \mapsto x_1 = 3+2/3 = 11/3$$

$$8-3k_2 = 8 \mapsto k_2 = 0 \mapsto [x_2] = x_2 = 4$$

Tutte le soluzioni proposte trascurano (o svolgono in modo frettoloso) l'analisi conclusiva dei casi particolari e del numero di soluzioni. Ad esempio, solo Emanuele Spadaro osserva che ci possono essere infinite soluzioni (nel caso in cui sia $a + b=0$). A questo proposito notiamo che tutti hanno diviso allegramente per $a + b$, senza escludere che fosse $a + b=0$.

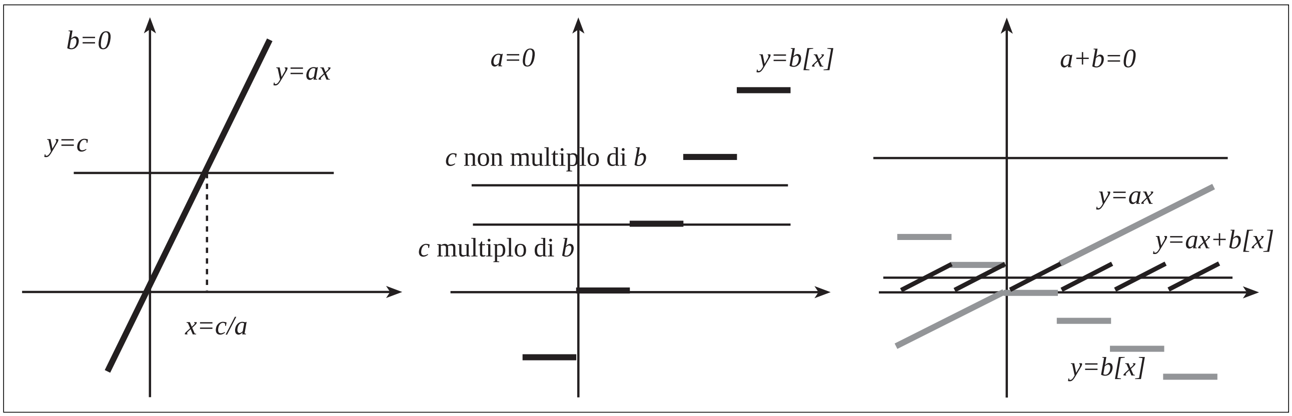
Emanuele Spadaro

Nel caso $a + b = 0$ si vede che deve essere $a > c \geqslant 0$ e in tal caso il sistema è verificato per ogni k (e in questo caso, com'è facile notare, le soluzioni sono infinite $x = k + h = k + c/a$ con k qualsiasi, che sono tutti numeri con la parte decimale uguale a c/a).

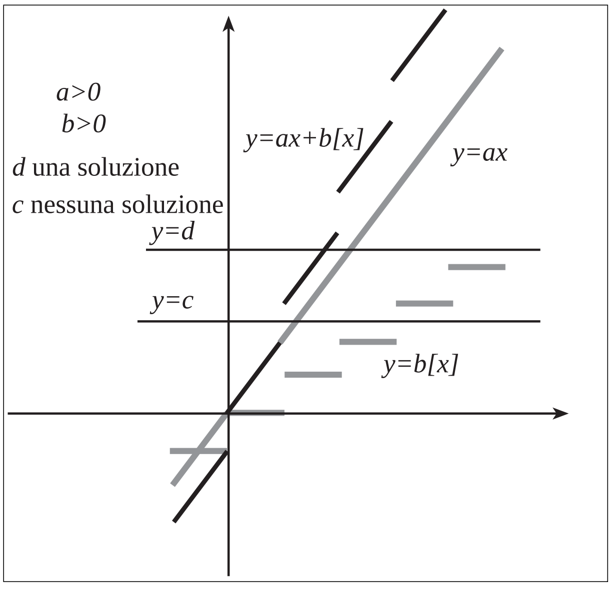
Se non fosse stato così, qualcuno avrebbe sicuramente adottato la strategia (spesso ricca di informazioni) di studiare alcuni casi particolari. Qui si possono considerare i tre casi

$b = 0$ $\qquad\qquad$ $a = 0$ $\qquad\qquad$ $a + b = 0$.

Se $b = 0$, la soluzione c'è ed è unica: $x = c/a$.
Se $a = 0$, non ci sono soluzioni, a meno che c sia un multiplo di b. In questo caso tutti i punti dell'intervallo $[c/b, c/b + 1)$ sono soluzioni dell'equazione.
Se $a + b = 0$, non ci sono soluzioni, a meno che c/a non appartenga all'intervallo $[0,1)$. In questo caso le soluzioni sono $x_k = k + c/a$, con k un numero intero.
(III). Ispirati dai casi particolari, si può adottare il seguente approccio grafico al problema: è evidente che i tre casi particolari sono rappresentati dai tre grafici seguenti

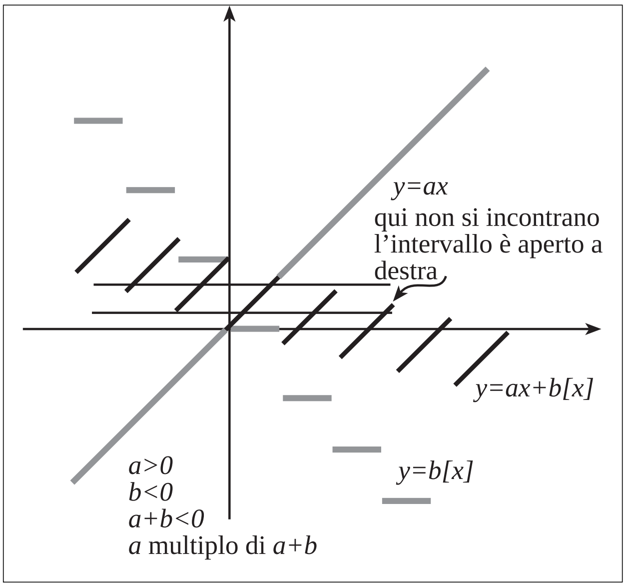


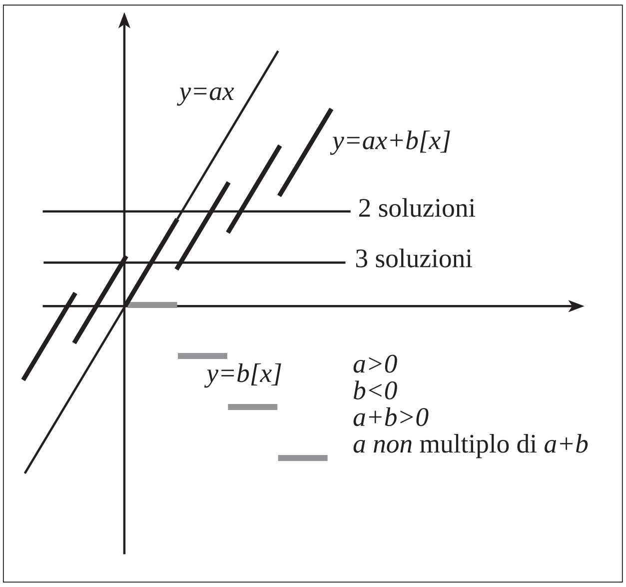
Nel seguito, supporremo allora che siano diversi da zero a, b e $a + b$. In particolare non è restrittivo supporre $a > 0$ (altrimenti si cambia segno a tutta l'equazione). In generale, il problema che vogliamo considerare è quello di intersecare il grafico di $f(x) = ax + b[x]$ con la generica retta orizzontale di equazione $y = c$.



Se anche b è positivo, il grafico di $f(x)= ax + b[x]$ diventa

Dal quale si vede che le soluzioni sono nessuna o una, a seconda di quanto vale c.
Se invece b è negativo, il grafico di $f(x) = ax + b[x]$ è





Sulla base di questo, si vede che: esiste sempre almeno una soluzione; il numero di soluzioni oscilla tra due valori n e $n+1$, dove n dipende solo da a e da b.

(IV) Da queste osservazioni, può partire l'analisi del numero delle soluzioni di $ax + b[x] = c$.
Come ha fatto notare Gianpiero Caruso,

Data l'equazione

$$ax + b[x] = c \quad (1)$$

ponendo

$$x = [x] + k \qquad \text{per } k \in R \qquad 0 \leqslant k < 1$$

e sostituendo alla (1) si ottiene

$$k = \frac{c - (a+b)[x]}{a}$$

da cui

$$0 \leq \frac{c - (a + b[x])}{a} < 1$$

o in altri termini

$$\frac{c-a}{a+b} < [x] \leq \frac{c}{a+b}$$

$[x]$ è, quindi, un intero il cui valore è compreso nell'intervallo

$$\left]\frac{c-a}{a+b}, \ \frac{c}{a+b}\right]$$

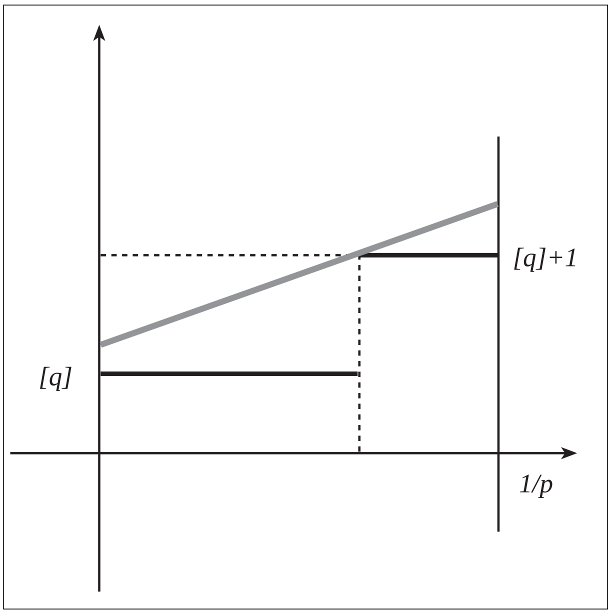
le soluzioni sono date dagli x la cui parte intera $[x]$ appartiene all'intervallo $((c - a)/(a + b), c/(a + b)]$. Come prima cosa, osserviamo che non ci sono due soluzioni con la stessa parte intera. Allora, il numero di interi nell'intervallo $((c - a)/(a + b), c/(a + b)]$ è proprio il numero delle soluzioni. Tale numero è dato da $N(c)= [c/(a + b)]-[(c - a)/(a + b)]$ se $a > 0$ e $a + b > 0$ (l'altro caso è analogo).
Infatti,

$$[(c - a)/(a + b)] + 1$$

è il più piccolo intero nell'intervallo e

$$[c/(a + b)]$$

è il più grande.
Poniamo ora $z = c - a$, $p = 1/(a + b)$ e $q = a/(a + b)$. Allora, riscriviamo la funzione $N(c)$ come $N(z)= [pz + q] - [pz]$ e proviamo a disegnarne il grafico. Come prima cosa, si può notare che N è una funzione periodica di periodo $1/p$ (infatti, la parte intera è una funzione periodica di periodo 1...). Allora è sufficiente disegnarne il grafico in $[0, 1/p)$.
In questo intervallo, la parte intera di pz vale sempre 0 e quindi la funzione si riduce a $N(z)= [pz +q]$. E questa vale $[q]$ o $[q]+1$. Il che significa che il numero delle soluzioni è dato da $[a/(a + b)]$ o da $[a/(a + b)]+1$.



In conclusione, il problema si prestava a tre soluzioni tutte interessanti e ad alcune considerazioni non banali sul numero delle soluzioni, che forse possono non essere alla portata di tutti. Abbiamo ritenuto utile inserirle comunque, per mostrare come sia importante che, nel risolvere un problema, si facciano anche altre osservazioni, diverse dalla semplice ricerca delle soluzioni (che spesso, semplice non è).

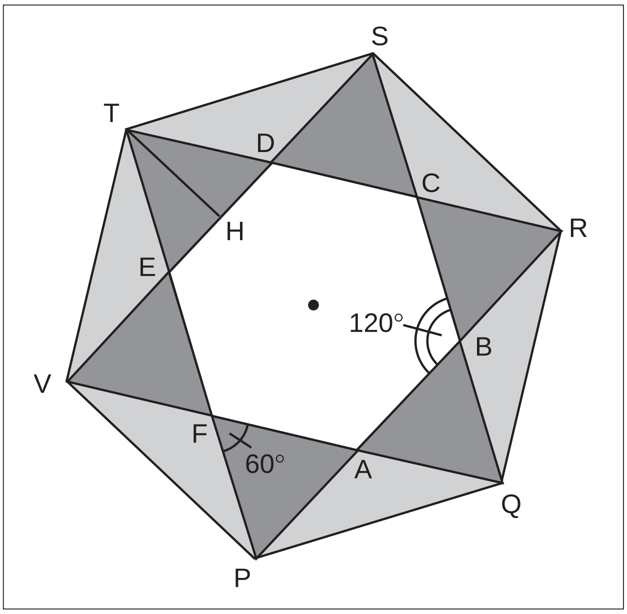
Dicembre 2000

Il valore dell'area di un esagono regolare *E* è *1*. Prolunga i lati dell'esagono fino a che si intersecano. Mostra che le sei intersezioni formano nuovamente un esagono regolare (detto esagono inviluppo). Quante volte bisogna ripetere l'inviluppo per ottenere un esagono la cui area valga almeno *2000*?
Se al posto dell'esagono scegli un ottagono, quanti inviluppi servono?

Tratto da [UMI]

Sono arrivate sette risposte:
Orazio Federico Aiello, 4A pni, LS Boggio Lera, Catania;
Ludovica Chiodera, 3B, LS Galilei, Adria (RO);
Alberto Cornia, 5B, LS Fanti, Carpi (MO);
Giancarlo Di Pietro;
Laura Nallin, 3B, LS Galilei, Adria (RO);
Enrico Tombetti, 3C, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA);
Daniele Urzì, 3B, LS Galilei, Catania.

La prima parte si poteva risolvere in due modi: calcolando il lato (oppure l'apotema) dell'esagono inviluppo oppure scomponendo l'inviluppo in triangoli equivalenti tra loro.
Per il primo metodo, riportiamo la soluzione di Enrico Tombetti che è ben esposta senza bisogno di figure, ma che curiosamente manca del calcolo per trovare il lato dell'esagono inviluppo, che si può fare così: se l è il lato dell'esagono di area 1 e l_1 quello dell'inviluppo, allora $l_1=\sqrt{3}l$
Infatti con riferimento alla figura di Daniele Urzì



nel triangolo TSD, $TD = DS = l$ e $TS = l_1$. Inoltre gli angoli valgono $120°$ e $30°$. Allora
$TS = 2TD \cos 30° = TD\sqrt{3}$. Poiché le aree stanno tra loro come i quadrati dei lati, allora
$A_1 = 3A$.

1 ■ Enrico Tombetti
Consideriamo il triangolo che ha come base un lato dell'esagono *E* e come altri due lati i segmenti che congiungono gli estremi dello stesso lato con il punto intersezione dei prolungamenti dei due lati consecutivi in *E*.
Tale triangolo ha gli angoli alla base di *60°* (sono ⇨

2 ■ Per quanto riguarda l'identificazione di triangoli equivalenti, una buona esposizione è quella di Laura Nallin. Inoltre, la Nallin è stata l'unica che ha dimostrato in modo completo che l'esagono inviluppo è regolare: infatti perché un poligono sia regolare è necessario che siano uguali tutti i lati e tutti gli ⇨

segue **1**

angoli esterni dell'esagono) quindi è equilatero.
Se ora prendiamo due di questi triangoli equilateri costruiti su due lati consecutivi di *E* e colleghiamo i vertici non in *E* otteniamo un nuovo triangolo che è isoscele (i lati uguali sono congruenti al lato di *E*), con un angolo di *120°* (è opposto al vertice di un angolo di E) e due angoli di *30°*.
Si costruiscono così sei triangoli isosceli tra loro congruenti e le loro basi costituiscono l'esagono inviluppo.
Gli angoli interni di questo esagono sono tutti di *120°* (*30°+60°+30°*) perciò esso è regolare. La sua base misura $\sqrt{3}$ volte il lato di *E*.
Visto che il lato dell'esagono inviluppo è $\sqrt{3}$ volte il lato di *E*, la sua area sarà $(\sqrt{3})^2$, cioè *3*, volte l'area di *E*.
Al secondo esagono inviluppo l'area sarà $3^2 = 9$; al sesto inviluppo sarà $3^6 = 729$; al settimo inviluppo sarà $3^7 = 2187$.
Bisogna dunque ripetere *7* volte l'inviluppo per ottenere un esagono la cui area valga almeno *2000*.

---

3 ■ Per concludere che servono proprio 7 inviluppi per arrivare a un'area maggiore di 2000 facciamo riferimento alla soluzione di

Orazio Federico Aiello
L'area di *C* è uguale a quella degli altri triangoli. L'esagono inviluppo è quindi formato da 6x3=18 triangoli equivalenti tra di loro. L'esagono originario ne era composto di *6*.
Se l'area dell'esagono originale è *1* per sapere quante volte bisogna ripetere l'inviluppo per ottenere un esagono regolare la cui area valga almeno *2000* è necessario trovare l'esponente della potenza in base *3* che sia maggiore o uguale a *2000*.

$$3\geqslant 2000$$
$$\log 3^x \geqslant \log 2000$$
$$x\log 3\geqslant \log 2000$$
$$x\geqslant (\log 2000)/\log 3$$
$$x\geqslant 6{,}9$$

Bisogna ripetere l'inviluppo almeno *7* volte.

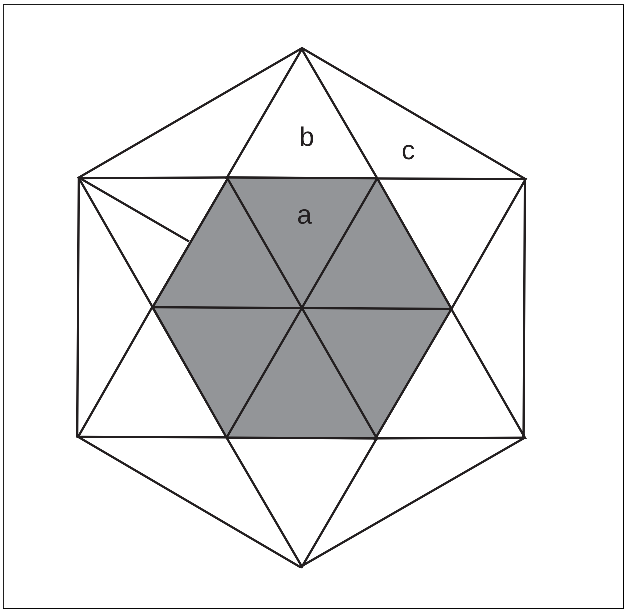
4 ■ Infine, un buon calcolo del lato dell'ottagono inviluppo è quello proposto da

Alberto Cornia
Nel caso dell'ottagono, considero la "stella" formata dall'ottagono di partenza e dai triangolini *AA'B*, *BB'C*, *CC'D*, ecc. (che sono tutti isosceli e rettangoli).
Considero poi i triangolini ottusangoli *A'BB'*, *B'CC'*, ecc.
Se *x* è il lato dell'ottagono di partenza, ognuno dei cateti dei triangolini rettangoli (e quindi ognuno dei lati uguali dei rettangoli ottusangoli) misurerà $x/\sqrt{2}$.
Poiché l'angolo ottuso dei triangolini ottusangoli è *135°*, col teorema di Carnot trovo che la base dei triangoli ottu-

segue **2**

angoli (condizione questa che nessun'altro ha esplicitamente verificato).

Laura Nallin



I triangoli *a* sono tutti isometrici tra loro e sono equilateri (ciò si capisce anche dalla costruzione), sono isometrici ai triangoli *b* tra loro isometrici (equilateri per costruzione).
I triangoli *c* sono tra loro isometrici per il primo criterio d'isometria, hanno isometrici i due lati isometrici (essendo isosceli) che sono i prolungamenti dell'esagono iniziale e l'angolo tra questi compreso che è l'opposto dell'angolo interno dell'esagono.
Quindi l'esagono ottenuto ha tutti i lati isometrici.
Per la somma di angoli isometrici possiamo dire che tale esagono è anche equiangolo, poiché i suoi angoli sono la somma dei due angoli di base dei triangoli isosceli *c* e di un angolo del triangolo equilatero *b*.
Concludendo, la figura trovata prolungando i lati dell'esagono iniziale è un esagono regolare.
Valutando la coppia dei triangoli *b*, *c* posso affermare che sono equiscomponibili (per chi non fosse abituato, la parola "equiscomponibile" va intesa come "equivalente", cioè con la stessa area) poiché hanno ugual base e uguale altezza; quindi il triangolo *c* è equiscomponibile al triangolo *b* che è equiscomponibile al triangolo *a*, hanno tutti area *1/6*, allora l'esagono ottenuto ha area *3*.

---

segue **4**

sangoli è $x\sqrt{(1+1/\sqrt{2})}$ che è il lato dell'ottagono inviluppo. Perciò il rapporto fra le aree degli ottagoni è $1+1\sqrt{2}$
Come nel caso precedente, l'area dell'n-esimo ottagono è $(1+1/\sqrt{2})^n$. Il primo valore per cui si supera *2000* è in questo caso *15* (l'area è circa *3044*).

Gennaio 2001

- **Mostra che esistono infinite coppie di numeri naturali consecutivi uno divisibile per *3* e l'altro per *7*.**
- **Cosa succede sostituendo a *3* e *7* i numeri *6* e *15*?**

Tratto da [UD]

Sono arrivate otto risposte:
- Orazio Federico Aiello, 4A pni, LS Boggio Lera, Catania
- Michela Casellato, 4B pni, LS Galilei, Adria (RO)
- Nicolò Crivellari, 4B pni, LS Galilei, Adria (RO)
- Valentina Mantovan, 4B pni, LS Galilei, Adria (RO)
- Davide Moretto, Mauro Piazzon, Paolo Sartori, 4A, LS Galilei, Adria (RO)
- Alberto Cornia, 5B, LS Fanti, Carpi (MO)
- Enrico Tombetti, 3C, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA)
- classe 2A, IPSSAR Artusi, Forlimpopoli.

Siamo contenti che di nuovo sia arrivata una soluzione elaborata da tutta una classe. Per di più una classe del biennio. Benvenuti!
Notiamo innanzitutto che per molti, di fronte a una dimostrazione intuitivamente semplice, riesce difficile riordinare le idee in maniera chiara. Alcune soluzioni si basano su buone idee ma sono scritte in modo confuso se non addirittura scorretto.
Anche l'uso del principio di induzione non è sempre appropriato: per mostrare che numeri come $7(3n+1)$ e $3(7n+2)$ sono consecutivi è sufficiente calcolare la differenza!
Un'ultima considerazione preliminare è che per risolvere il problema era sufficiente esibire infinite coppie. Un passaggio ulteriore (e non richiesto) era trovare tutte le possibili coppie.
Veniamo ora alla soluzione vera e propria. Per il primo caso citiamo le soluzioni di Tombetti e di Cornia che sono sostanzialmente identiche, ma la prima è più completa e affronta tutti i casi mentre la seconda è più elegante.

1 ■ Enrico Tombetti

Un numero divisibile per 3 è del tipo: $3n$ con $n \in N$. Un numero divisibile per 7 è del tipo: $7m$ con $m \in N$. Affinché i due numeri siano consecutivi devono verificare una delle due condizioni seguenti:
1a) $3n+1 = 7m$
1b) $3n-1 = 7m$.
Nel caso 1a: $n = (7m-1)/3$ $n = 2m + (m-1)/3$ La condizione è soddisfatta per $m = 1 + 3k$ con $k \in N$. In tal caso:

$$n=2(1+3k)+(1+3k-1)/3=2+6k+k=2+7k$$

Dunque tutte le coppie di numeri naturali consecutivi $3(2+7k)$; $7(1+3k)$ con $k \in N$ soddisfano la condizione. Esse sono infinite quanto i valori di k. Il primo numero è divisibile per 3, il secondo per 7. Nel caso 1b:

$$n=7m+1/3=2m+(m+1)/3$$

La condizione è soddisfatta per $m = 3k -1$ con $k \in N$. In tal caso:

$$n=2(3k-1)+(3k-1+1)/3=6k-2+k=7k-2$$

Dunque tutte le coppie di numeri naturali consecutivi $7(3k-1)$; $3(7k-2)$ con soddisfano la condizione. Esse sono infinite quanto i valori di k Il primo numero è divisibile per 7, il secondo per 3.

2 ■ Alberto Cornia

Se chiamiamo i due numeri $3k$ e $7h$, si ha $3k = 7h - 1$. Scomponendo il secondo, si ottiene $3k = 6h + h - 1$. Basta quindi scegliere opportunamente h fra tutti i numeri che divisi per 3 danno resto 1 (della forma $3h' + 1$) per ottenere al secondo membro un numero divisibile per 3 ($3k = 6(3h' + 1) + (3h' + 1) - 1 = 21h' + 6$, quindi $k = 7h' + 2$: quindi si possono trovare opportuni k e h per ogni h' appartenente ai numeri naturali).
Si nota che i numeri cercati sono tutti della forma $21h' + 6$ e $21h' + 7$: quindi a partire della coppia $(6;7)$ se ne possono trovare infinite altre aggiungendo multipli di 21.

3 ■ Interessante è anche la soluzione di Valentina Mantovan che è l'unica a considerare anche le soluzioni negative, estendendo così ulteriormente la soluzione del problema.

Valentina Mantovan

IPOTESI: *n* divisibile per *3*; *n+1* divisibile per *7*.
TESI: Esistono infinite coppie *(n;n+1)*.
DIMOSTRAZIONE: La prima coppia ordinata *(n;n+1)* in cui il valore *n>0* è *(6;7)*.
Il problema si può dimostrare usando le progressioni aritmetiche di ragione $|d|=21$ che è divisibile sia per *3* che per *7*. $n_k = n+(k-1)d$ con $k \in Z$
$(n+1)_k$ è anch'esso divisibile per 7. Pertanto si ottiene una nuova coppia ordinata $(n_k; (n+1)_k)$ cioè:

$$(n+(k-1)d;\ n+1+(k-1)d)$$

Succede quindi che essendo n divisibile per *3* e *(k-1)d* divisibile per *3* allora n_k è anch'esso divisibile per 3.

$$(n+1)_k = n+1+(k-1)d \qquad \text{con } k \in Z$$

Succede quindi che essendo *(n+1)* divisibile per *7* e *(k-1)d* divisibile per *7*, allora $(n+1)_k$ è divisibile per *7*.
Es. con *k=8* ottengo la coppia ordinata *(153;154)*
con *k=-3* ottengo la coppia ordinata *(-78;-77)*

Ragionamento analogo si può fare per la coppia ordinata *(n;n+1)* in cui *n* sia divisibile per *7* e *n+1* sia divisibile per *3*.

4 ■ Molto semplice e accurata è l'esposizione della

Classe 2A

Trovando per tentativi le coppie *(6,7)*, *(27,28)* e *(48,49)*; abbiamo notato che per passare a una coppia a quella successiva occorre aggiungere *21*. *21* è il minimo comune multiplo di *3* e *7*.
Successivamente abbiamo osservato che la somma di due multipli di *3* è a sua volta un multiplo di *3* e altrettanto per *7*; pertanto da ogni coppia di numeri aventi le caratteristiche richieste è sempre possibile ottenerne un'altra con le medesime caratteristiche.
Abbiamo in questo modo dimostrato che le coppie sono infinite.

Una soluzione diversa (presa dal volume Vent'anni di gare matematiche, a cura della Mathesis e presente nella nostra bibliografia) è la seguente: dato un numero naturale *n>1*, uno solo dei tre numeri *n-1*, *n*, *n+1* è divisibile per *3*. Essendo *7* primo con *3*, ogni suo multiplo *7k* è divisibile per *3* se e solo se lo è *k*. Sia dunque *n = 7k* un multiplo di *7*, con *k* primo con *3*. Non essendo *n* divisibile per *3*, deve esserlo uno (e uno solo) dei due numeri *n-1*, *n+1*. Per ogni *k* primo con *3* si ha così una soluzione del nostro problema: queste sono poi infinite, essendo tali i possibili valori di *k*.
Infine si poteva ragionare anche come segue: sia *n* un multiplo di *7* (*n = 7k*), allora o *n* o *n-1* o *n+1* è un multiplo di *3*. Le coppie cercate corrispondono ai casi in cui *n* non è multiplo di *3*. Se le coppie fossero in quantità finita, da un certo punto in poi tutti i multipli di *7* sarebbero anche multipli di *3*. E questo è falso.

5 ■ Alla seconda parte del problema hanno risposto bene Musetto&Pizzon&Sartori, la classe 2A e Tombetti.

Classe 2A

Non è possibile ottenere nessuna coppia di numeri naturali consecutivi il primo divisibile per *6* e il secondo divisibile per *15* in quanto tali numeri dovrebbero essere divisibili per *3* e i multipli di *3* non possono essere consecutivi.

---

6 ■ Fuori tempo massimo è arrivata la risposta di Daniele Urzì che in via del tutto eccezionale inseriamo lo stesso perché tenta una generalizzazione.

Daniele Urzì

Dobbiamo dimostrare che esistono infinite coppie di numeri naturali consecutivi ($n;\ n+1$) divisibili il primo per *3* ed il secondo per *7*. Poniamo $n = 3x$ e $n + 1 = 3x + 1$; partendo da una coppia nota di tali numeri, cerchiamo di costruirne infinite altre: per $x = 2$ si ottiene $n = 6$ e $n + 1 = 7$, la coppia *(6;7)* soddisfa la proprietà stabilita. Tutte le coppie ($n;\ n + 1$), con $n \in N$, si possono esprimere nella forma $(6+3z\ ;\ 7+3z)$, con $z \in N$ Sicuramente $6 + 3z$ è divisibile per *3*, ma affinché il suo successivo $7 + 3z$ sia divisibile per 7 è necessario che entrambi i termini della somma siano multipli di 7, perciò deve essere $z=7v$, . Facendo la sostituzione si ottengono le infinite coppie di numeri naturali consecutivi ($6+21v;\ 7+21v$) che sono quelle cercate. Se volessimo invece che *n* sia divisibile per *7* e *n*+1 per *3*, partendo dalla coppia *(14;15)*, con il metodo esposto otteniamo le infinite altre $(14 + 21v\ ;\ 15 + 21v)$. Se a *3* e *7* sostituiamo *6* e *15* il problema è impossibile: dovendo essere i due numeri consecutivi, essi sono primi fra loro, cioè non hanno divisori comuni oltre l'unità; ma se fossero l'uno divisibile per *6* e l'altro per *15*, avrebbero un divisore comune che è *3*, e ciò è assurdo. In generale, ritengo, ma non dimostro, che dati due numeri naturali *a* e *b*, diversi da *0* e primi fra loro, esistono infinite coppie di numeri naturali consecutivi divisibili l'uno per *a* e l'altro per *b* se esiste almeno una coppia di tali numeri (il problema sta nell'individuare una coppia di questi numeri, poi con il procedimento esposto se ne possono ottenere infinite altre): ma quando *a* e *b* sono primi fra loro esiste sempre almeno una coppia di questi numeri? Per quanto detto prima, se *a* e *b* non sono primi fra loro il problema è impossibile.

Febbraio 2001

Verifica che per tutti i numeri reali *x* e *y* vale la disuguaglianza

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2} \geq \sqrt{4+(x+y)^2}$$

Sai dire quando la disuguaglianza è stretta (> senza uguale) e quando è un'uguaglianza?
In analogia alla disuguaglianza appena verificata, sapresti dire di cosa è maggiore

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}\ ?$$

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}+\sqrt{1+w^2}$$

Tratto da [LAR]

Sono arrivate sei risposte:
Classe 3A programmatori, ITG Ruffini, Imperia
Matteo Zanirato, 5 pni, LS Galilei, Adria (RO)
Valentina Mantovan, 4B pni, LS Galilei, Adria (RO)
Alberto Cornia, 5B, LS Fanti, Carpi (MO)
Enrico Tombetti, 3C, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA)
Maurizio Melchiorre, appassionato di matematica.

Siamo contenti che anche questa volta sia arrivata una soluzione elaborata da tutta una classe. E un benvenuto anche al primo "appassionato" che partecipa.
Tutte le soluzioni pervenute erano corrette a parte qualche piccola imprecisione qua e là.
Tra tutte scegliamo quella di Cornia, per la sua precisione e completezza.

1 ■ Alberto Cornia

PRIMA PARTE

Elevo al quadrato i termini della disequazione di partenza:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2} \geq \sqrt{4+(x+y)^2}$$

$$1+x^2+1+y^2+2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} \geq 4+x^2+2xy+y^2$$

$$2\sqrt{(1\_x^2)(1+y^2)} \geq 2+2xy$$

$$\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} \geq 1+xy$$

Elevo nuovamente al quadrato:
$1+x^2+y^2+x^2y^2 \geqslant 1+x^2y^2+2xy$
$x^2+y^2-2xy \geqslant 0$
$(x-y)^2 \geqslant 0$
Quindi la disuguaglianza si riduce a un'uguaglianza per $x = y$, e vale in senso stretto in tutti gli altri casi.
Nel primo caso è possibile elevare al quadrato senza porre limitazioni o condizioni particolari, perché sia i radicandi (e quindi anche la loro somma) che, ovviamente, i radicali sono certamente positivi. Nel secondo elevamento al quadrato il secondo membro può essere minore di *0* o no: nel primo caso la disequazione è subito verificata (essendo il primo membro sicuramente maggiore di *0*), altrimenti si procede elevando al quadrato come è stato fatto.

TERZA PARTE

Passiamo all'ultima disequazione proposta. Applichiamo i risultati già verificati nella prima parte: otteniamo in questo modo delle maggiorazioni successive dell'espressione proposta.

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2} \geq \sqrt{4+(x+y)^2} = 2\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{1+z^2}+\sqrt{1+w^2} \geq \sqrt{4+(z+w)^2} = 2\sqrt{1+\left(\frac{z+w}{2}\right)^2}$$

Sommando membro a membro e utilizzando nuovamente la disuguaglianza della prima parte si ha

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}+\sqrt{1+w^2} \geq 2\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}+2\sqrt{1+\left(\frac{z+w}{2}\right)^2} \geq$$

$$\geq 2\sqrt{4+\left(\frac{x+y+z+w}{2}\right)^2} = 2\sqrt{4+\frac{(x+y+z+w)^2}{4}} = \sqrt{16+(x+y+z+w)^2}$$

Anche in questo caso le uguaglianze valgono per $x = y$, per $z = w$ e per $x + y = z + w$, e quindi, complessivamente, per $x = y = z = w$. In tutti gli altri casi vale la disuguaglianza in senso stretto.

SECONDA PARTE

Per analogia con le due disuguaglianze dimostrate, possiamo ipotizzare che valga la seguente:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+y^z} \geq \sqrt{9+(x+y+z)^2}$$

Applichiamo la disuguaglianza dimostrata nella prima parte:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+y^z} \geq \sqrt{4+(x+y)^2}+\sqrt{1+y^z}$$

Basterà quindi dimostrare che vale la disuguaglianza:

$$\sqrt{4+(x+y)^2}+\sqrt{1+y^z}\geq\sqrt{9+(x+y+z)^2}$$

Eleviamo al quadrato:

$$4+(x+y)^2+1+z^2+2\sqrt{\left[4+(x+y)^2\right](1+z^2)}\geq 9+(x+y+z)^2$$

Sviluppando e riducendo i termini simili si arriva alla disuguaglianza:

$$2\sqrt{4+x^2+2xy+y^2+4z^2+x^2z^2+2xyz^2+y^2z^2}\geq 4+2xy+2xz$$

Dividiamo per due ed eleviamo nuovamente al quadrato:
$4+x^2+2xy+y^2+4z^2+x^2z^2+2xyz^2+y^2z^2 \geqslant 4+y^2z^2+x^2z^2+x^2z^2+4xy+4xz+2xyz^2$

Eliminando i termini simili si giunge infine alla disuguaglianza $(x+y-2z)^2 \geqslant 0$ che dimostra la tesi.

E' da notare che l'uguaglianza vale nel caso in cui $x = y$ e $2z = x + y$, vale a dire $x = y = z$. Anche in questo caso gli elevamenti al quadrato sono consentiti, per gli stessi motivi già indicati nei punti precedenti.

Le disuguaglianze possono essere facilmente generalizzate al caso di più variabili $x_1, x_2, ..., x_n$ secondo la formula:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+x_i^2}\geq\sqrt{n^2+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

Il segno di uguaglianza vale per $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

2. Ci sembra interessante anche citare il lavoro della classe 3A che propone una soluzione geometrica alla quale abbiamo affiancato la figura di Maurizio Melchiorre.

Classe 3A

Abbiamo inizialmente verificato la disuguaglianza

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\geq\sqrt{4+(x+y)^2}$$

per via algebrica, elevando entrambi i membri al quadrato, senza porre ovviamente condizioni per la realtà , essendo tutti i radicandi maggiori di zero. Abbiamo ottenuto:

$$1+x^2+1+y^2+2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\geq 4+x^2+y^2+2xy$$

da cui: $$2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\geq 2+2xy$$

e poi:
a) nel caso $1+xy \leqslant 0$ vera;
b) nel caso $1+xy > 0$, elevando al quadrato:
$(1+x^2)(1+y^2) \geqslant 1+x^2y^2+2xy$ e ancora
$1+x^2y^2+x^2+y^2 \geqslant 1+x^2y^2+2xy$
ossia $x^2+y^2-2xy \geqslant 0$ cioè $(x-y)^2 \geqslant 0$

L'uguaglianza è vera per $x = y$; in tutti gli altri casi è vera la disuguaglianza stretta.

Abbiamo tentato, per via algebrica, di rispondere agli altri quesiti, ma i calcoli troppo lunghi ci hanno fatto capire che doveva esistere una via più breve.

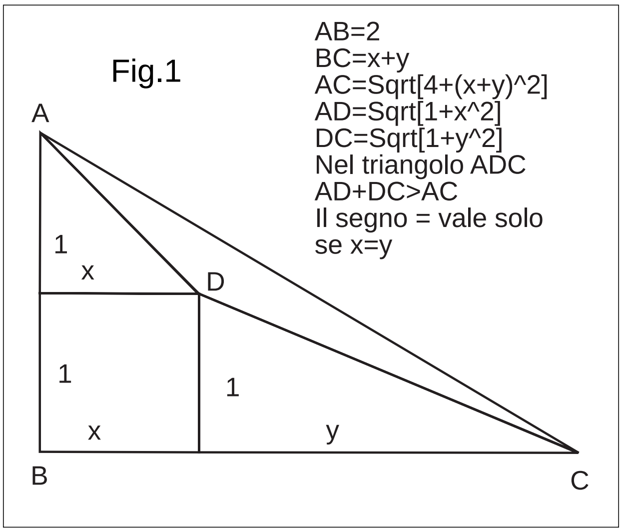
Abbiamo utilizzato la geometria, (vedi fig.1):

a) Verifichiamo la disuguaglianza facendo ricorso al teorema di Pitagora e precisamente

$$\overline{AD}=\sqrt{1+x^2}\qquad\overline{DC}=\sqrt{1+x^2}\qquad\overline{AC}=\sqrt{4(x+y)^2}$$

Grazie al teorema per cui in un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due, si ha

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\geq\sqrt{4+(x+y)^2}$$



b) In modo simile si estende la disuguaglianza al caso di tre radicali:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}\geq\sqrt{4+(x+y)^2}+\sqrt{1+z^2}\geq\sqrt{9+(x+y+z)^2}$$

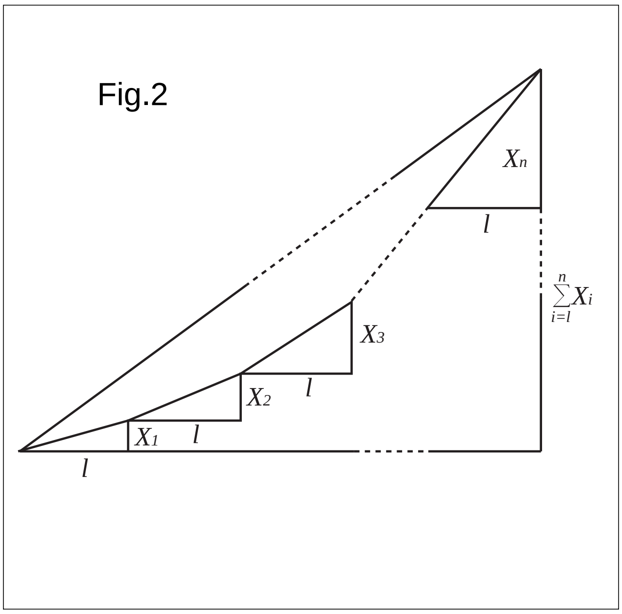
È evidente che nel caso di quattro radicali si avrà la disuguaglianza:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}+\sqrt{1+w^2}\geq\sqrt{16+(x+y+z+w)^2}$$

La disuguaglianza generale

$$\sum_{1=1}^{n}\sqrt{1+x_i^2}\geq\sqrt{n^2+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

congetturata da Cornia può essere dimostrata con la seguente figura:



Marzo 2001

Dati due punti *P* e *Q* in un angolo retto, trovare il cammino più breve che va da *P* a *Q* toccando prima l'uno e poi l'altro lato dell'angolo.

Tratto da [SNS]

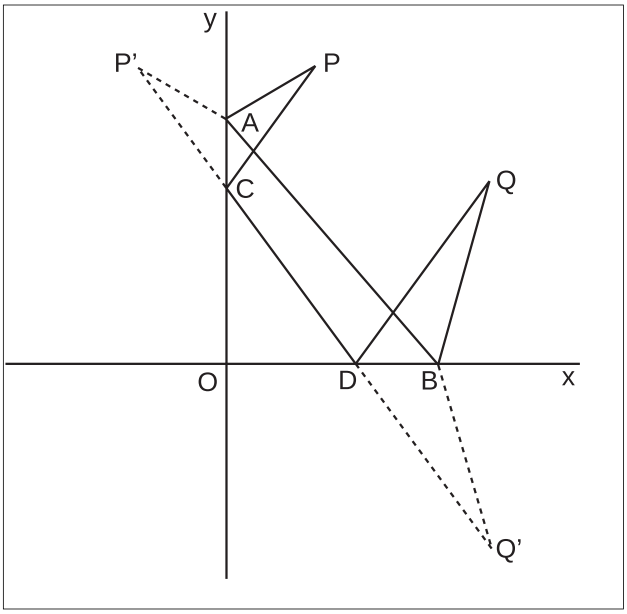
Sono arrivate sette risposte:
1. Classe 5A programmatori, ITG Ruffini, Imperia
2. Classe 4B, LS Galilei, Adria (RO)
3. Lorenzo Marchini, 4B, ITC Fossati, La Spezia
4. Alberto Cornia, 5B, LS Fanti, Carpi (MO)
5. Enrico Tombetti, 3C, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA)
6. Daniele Urzì, 3B, LS Galilei, Catania
7. Maurizio Melchiorre, appassionato di matematica.

Di queste, tre sono corrette. Una quarta enunciava la soluzione in modo esatto ma senza dimostrarla.

1 ■ La soluzione di Enrico Tombetti è ben descritta e aggiunge dettagli interessanti.

Enrico Tombetti

Faccio riferimento alla figura.1:

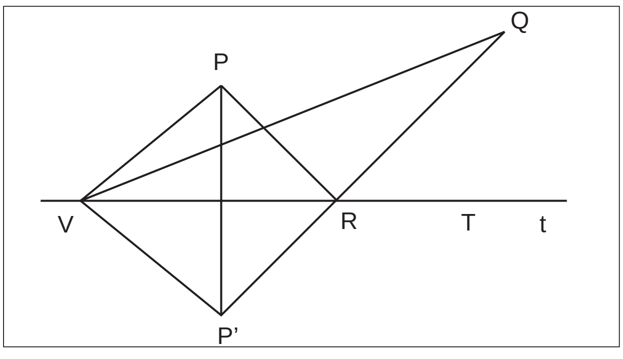


Prendiamo, come angolo retto, il primo quadrante di un sistema cartesiano ortogonale *Oxy* e in esso tracciamo i punti *P* e *Q*. Prendiamo poi due punti a caso: *A* sull'asse *y*, *B* sull'asse *x*. Tracciamo la poligonale aperta *PABQ*: essa è un cammino che va da *P* a *Q* toccando prima l'uno poi l'altro lato dell'angolo retto xOy. Tracciamo ora il segmento *AP'* simmetrico di *AP* rispetto all'asse *y*: ovviamente *AP'* è congruente ad *AP*. Con analogo criterio tracciamo il segmento *BQ'* simmetrico di *BQ* rispetto all'asse *x*: *BQ'* è congruente a *BQ*. Il cammino *P'ABQ'* risulta congruente al cammino *PABQ*. È ovvio che tra ⇨

2 ■ Un approccio diverso è quello di Daniele Urzì, che questa volta ci propone una soluzione che fa riferimento a testi classici e dimostra un problema più generale.

Daniele Urzì

Nella *Catottrica* Erone Alessandrino si occupa del problema di determinare il percorso di minima lunghezza che un raggio luminoso uscente da una sorgente *P* deve compiere per raggiungere uno specchio piano e poi l'occhio *Q* di un osservatore. Possiamo riformulare il problema in questo modo: dati due punti *P* e *Q*, giacenti in una stessa parte di piano rispetto ad una retta *t*, trovare il percorso minimo da *P* a *Q* toccando un punto *R* di *t*. Erone risolse così il problema: si unisca il punto *P'*, simmetrico di *P* rispetto a *t*, con *Q* determinando il punto *R* d'intersezione di *P'Q* con *t*. E' facile dimostrare che *PR+RQ* è il percorso minimo richiesto (fig.1): se *V* è un punto qualunque di *t*, si osservi che è *PR=P'R* e *VP=VP'*; da questo segue che *PR+RQ=P'R+RQ* e *VP+VQ=VP'+VQ*; ricordando che ogni lato di un triangolo è minore della somma degli altri due, si ha, relativamente al triangolo *VQP'*, la relazione *P'Q<VQ+VP'*, per cui *PR+RQ* è sempre minore di *VP+VQ*. Erone fa notare che l'angolo di incidenza ⇨

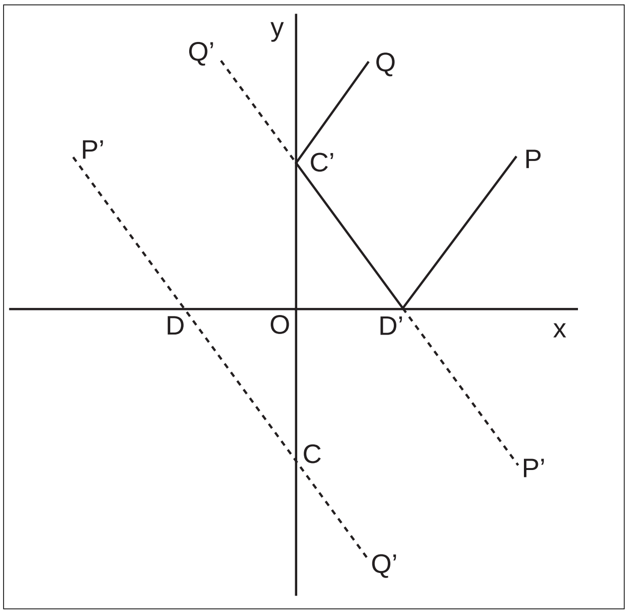


segue 1

tutti i cammini che vanno da *P'* a *Q'* quello più breve è quello che giace sulla retta per *P'Q'*. Tale cammino intercetta i punti *C* sull'asse *y* e *D* sull'asse *x*. Se pensiamo di spostare *A* in *C* e *B* in *D*, per la congruenza sopra dimostrata, il cammino più breve che va da *P* a *Q* tocca il lato *y* in *C* ed il lato *x* in *D*. Se *P* ha coordinate (x_p, y_p) e *Q* ha coordinate (x_q, y_q) la lunghezza del cammino più breve vale:

$$\sqrt{\left(x_p + x_q\right)^2 + \left(y_p + y_q\right)^2}$$

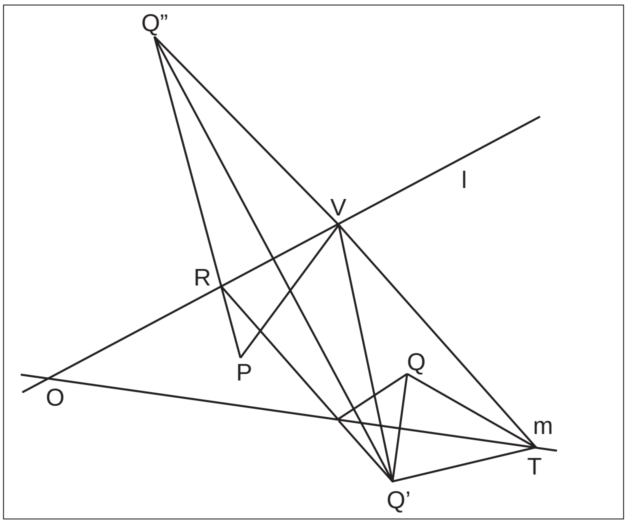
Vale la pena di notare che gli angoli *PCy* e *OCD* sono congruenti, così come sono tra loro congruenti *ODC* e *xDQ*. Inoltre gli angoli *OCD* e *ODC* sono complementari. I segmenti *PC* e *QD* sono paralleli tra loro. Immaginando gli assi *x* ed *y* la rappresentazione di due specchi, il cammino più breve corrisponde a quello che seguirebbe un raggio luminoso emesso da *P*, riflesso in *C*, nuovamente riflesso in *D* fino a raggiungere *Q*. La luce segue sempre il cammino più breve! Per completezza, va considerato il caso in cui i punti *C* e *D* si trovino sui semiassi negativi *x* ed *y* (figura 2).



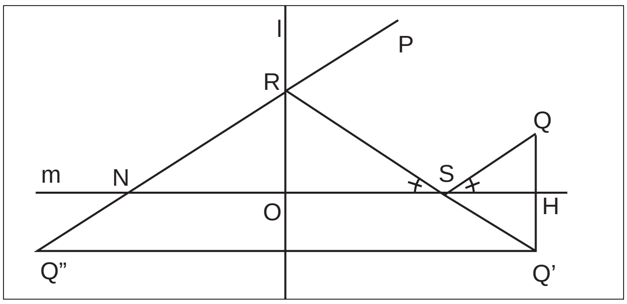
In tal caso si tracciano i punti *P"* simmetrico di *P* rispetto all'asse *x* e *Q"* simmetrico di Q rispetto all'asse *Y*. La retta *P"Q"* intercetta sugli assi i punti *D'* e *C'*. Il cammino più breve è *PD'C'Q*: partendo da *P* tocca l'asse *x* in *D'* poi l'asse *y* in *C'* per arrivare a *Q*.

segue 2

PRV è uguale all'angolo di riflessione *QRT* (gli angoli *QRT*, *VRP'* sono uguali perché opposti al vertice *R*, gli angoli *PRV*, *VRP'* sono uguali perché *t* è la bisettrice dell'angolo al vertice del triangolo isoscele *PRP'*; per la proprietà transitiva è *QRT=PRV*). Nel testo *Che cos'è la matematica?* di Courant e Robbins il problema viene generalizzato considerando due rette qualsiasi *l* ed *m* e due punti *P* e *Q* come nella figura 2. Sia *Q'* il simmetrico di *Q* rispetto ad *m* e *Q"* il simmetrico di *Q'* rispetto ad *l*; chiamiamo *R* ed *S* rispettivamente le intersezioni di *PQ"* con *l* e *RQ'* con *m*; la spezzata *PRSQ* è il percorso minimo richiesto. Lo dimostriamo: siano *V* e *T* due punti qualunque rispettivamente di *l* ed *m*; dalle relazioni *SQ=SQ'*, *QT=Q'T* seguono le altre due *RS+SQ=RS+SQ'=RQ"* e[1] *VT+QT=VT+Q'T*; inoltre è *VT+Q'T>VQ'=VQ''* e *VP+VQ">PQ"*, perciò, essendo *VT+Q'T>VQ"*, è ovvia la disuguaglianza *VP+VT+Q'T>PQ''* o anche *PR+RS+SQ<VP+VT+TQ*, come volevasi dimostrare.



Se *l* ed *m* sono perpendicolari, i segmenti *RP* e *SQ* sono paralleli: gli angoli *QSH*, *RSN* come abbiamo dimostrato sono uguali e il triangolo *NRS* è isoscele su base *NS*, quindi per la proprietà transitiva gli angoli *RNS*, *QSH*, corrispondenti generati dalle rette *PN* e *QS* tagliate dalla trasversale *m*, sono uguali, da cui segue che le rette *PR* e *SQ* sono parallele.



Si può facilmente dimostrare che i segmenti *PR* e *SQ* sono paralleli anche quando *l* ed *m* sono parallele. Infine, volendo trovare il percorso minimo toccando prima *m* e poi *l*, il punto *Q'* deve essere simmetrico di *Q* rispetto a *l* e *Q"* simmetrico di *Q'* rispetto a *m*.

[1] Quest'ultima uguaglianza dipende dal fatto che RQ'=RQ'' (NdR).

Aprile 2001

Dimostrare che un numero naturale che è contemporaneamente un quadrato e un cubo è un multiplo di *7*, oppure il resto della sua divisione per *7* è esattamente *1*.

Tratto da [UD]

Sono arrivate cinque risposte:
Classe 3A programmatori, ITG Ruffini, Imperia
Lorenzo Marchini, 4B, ITC Fossati, La Spezia
Enrico Tombetti, 3C, LS Leonardo da Vinci, Gallarate (VA)
Francesco Marino, Francesco Panizzoli e Agnese Wulzer, 3, LC Russell, Roma
Maurizio Melchiorre, appassionato di matematica.

1 ■ Di queste, tre sono corrette. In particolare segnaliamo quella di Enrico Tombetti e quella della classe 3A, che, pur se leggermente diverse, sono entrambe ben esposte.

Enrico Tombetti

Un numero naturale che è contemporaneamente un quadrato e un cubo è del tipo n^6, con $n \in N$. La sua radice quadrata è n^3, la sua radice cubica è n^2.
n^6 ed n sono scomponibili negli stessi fattori primi (solo gli esponenti sono diversi). Pertanto se n^6 è divisibile per *7*, cioè è multiplo di *7*, anche n è divisibile per *7*.
Se n^6 non è divisibile per *7*, neanche n è divisibile per *7* e si presenta uno dei tre casi seguenti:

$$n=7k\pm1$$
$$n=7k\pm2$$
$$n=7k\pm3$$

dove k è un numero intero e si escludono i valore negativi per n.
Quanto sopra discende dall'osservazione che ogni numero naturale può essere ottenuto sommando o sottraendo ad un multiplo di *7* un numero naturale minore o uguale a *3*.
Costruiamo la seguente tabella:

	n	n^6	n^6-1
1	$n=7k\pm1$	$7^6k^6\pm6\cdot7^5k^5+15\cdot7^4k^4\pm20\cdot7^3k^3+15\cdot7^2k^2\pm6\cdot7k+1$	$7^6k^6\pm\ldots\pm6\cdot7k$
2	$n=7k\pm2$	$7^6k^6\pm6\cdot7^5k^5\cdot2+15\cdot7^4k^4\cdot4\pm20\cdot7^3k^3\cdot8+15\cdot7^2k^2\cdot16\pm6\cdot7k\cdot32+64$	$7^6k^6\pm\ldots\pm63$
3	$n=7k\pm3$	$7^6k^6\pm6\cdot7^5k^5\cdot3+15\cdot7^4k^4\cdot9\pm20\cdot7^3k^3\cdot27+15\cdot7^2k^2\cdot81\pm6\cdot7k\cdot243+729$	$7^6k^6\pm\ldots\pm728$

La colonna di n^6 è ottenuta con le regole dell'elevamento alla sesta potenza di un binomio, utilizzando il triangolo di Tartaglia per i coefficienti.
Se consideriamo l'ultima colonna notiamo che tutti i termini letterali sono divisibili per 7 così come lo sono i termini noti *63* e *728*. Pertanto n^6*-1* risulta sempre divisibile per *7* in tutti tre i casi. ⇨

2 ■

Classe 3A

Se un naturale è del tipo $a^2=b^3$, allora può essere scritto nella forma $(c^2)^3 = (c^3)^2$ ovvero è la sesta potenza di un naturale c. Si possono presentare i seguenti casi:
• c è divisibile per *7* dunque c^6 è multiplo di *7*
• c nella divisione per *7* ha come resto *1* oppure *2* o *3* o *4* o *5* o *6*.
Dunque $c=7m+r$ con $1\leqslant r \leqslant 6$.
Applicando la formula della potenza di un binomio secondo Newton, abbiamo:

$$(7m+r)^6 = \binom{6}{0}(7m)^5 r + \binom{6}{1}(7m)^5 r + \binom{6}{6} r^6$$

Tutti gli addendi tranne l'ultimo sono divisibili per *7*, dunque il resto della divisione $(7m+r)^6/7$ è il resto di $r^6/7$.
Esaminiamo i sei casi:
$r = 1$; $r^6/7 = 1^6/7 = 0$ resto *1*
$r = 2$; $r^{6/}7 = 2^6/7 = 9$ resto *1*
$r = 3$; $r^6/7 = 3^6/7 = 104$ resto *1*
$r = 4$; $r^6/7 = 4^6/7 = 585$ resto *1*
$r = 5$; $r^6/7 = 5^6/7 = 2232$ resto *1*
$r = 6$; $r^6/7 = 6^6/7 = 6665$ resto *1*

segue **1**

Ne segue che il resto della divisione di n^6 per *7* è esattamente *1* in tutti i casi in cui n^6 non è divisibile per *7*.

Dobbiamo però osservare che il fatto che i numeri in questione fossero delle seste potenze, pur se abbastanza evidente, andava dimostrato: la dimostrazione si basa sul Teorema Fondamentale dell'Aritmetica. Questo risultato, dovuto a Euclide, assicura che ogni numero naturale può essere scritto in modo unico come prodotto di fattori primi. "In modo unico" significa che sono unici sia i numeri primi che compaiono nella scomposizione, sia i loro esponenti

$$n = p_1^{e1} \cdot p_2^{e2} \cdots p_k^{ek}$$

Quando n è un quadrato, allora tutti gli esponenti sono divisibili per 2, $e_i = 2f_i$.
Allo stesso modo, se è un cubo, si ha $e_i = 3g_i$.
Mettendo assieme le due relazioni si ottengono le equazioni $2f_i = 3g_i$. Dal momento che 2 e 3 non hanno fattori comuni, segue, ad esempio, che f_i è un multiplo di 3 e quindi e_i è un multiplo di 6. Abbiamo così mostrato che n è effettivamente una sesta potenza.
Può essere interessante ricordare che il problema di aprile è un caso particolare del Piccolo Teorema di Fermat (una trattazione si trova a pagina 76 di Courant, Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Bollati Boringhieri), che dice che nella divisione per p ogni potenza $(p-1)$-esima dà resto 0 oppure 1, quando p è un numero primo.

Maggio 2001

ABC **è un triangolo equilatero e *P* è un punto dell'arco *AB* circoscritto da *ABC*. Allora, *PA + PB = PC*.**
Viceversa, ABC è un triangolo qualsiasi e *P* è un punto qualsiasi dell'arco *AB* del cerchio circoscritto da *ABC*. Se *PA + PB = PC*, allora *ABC* è equilatero.

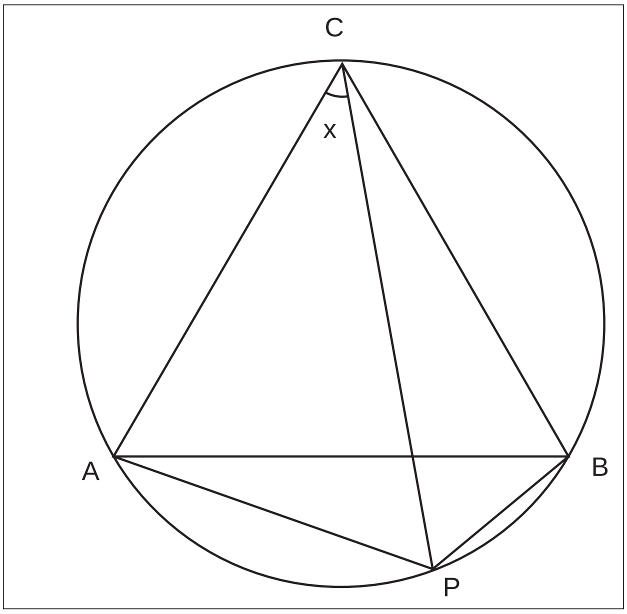
Tratto da [UMI]

Sono arrivate cinque risposte:
Mantovan Valentina, 4B, LS Galilei, Adria (RO)
Daniele Urzì, 3B, LS Galilei, Catania
Francesco Marino e Francesco Panizzoli, 5A, LC Russell, Roma
Sandro Campigotto, appassionato di matematica
Maurizio Melchiorre, appassionato di matematica.

Diamo un benvenuto a Sandro Campigotto che per la prima volta affronta il problema di probleMATEMATICAmente.
Le soluzioni proposte sono sostanzialmente di due tipi:
Mantovan, Melchiorre e Campigotto hanno scelto di usare la trigonometria ricorrendo al teorema della corda; ma solo quest'ultimo ha risposto completamente a entrambe le questioni.

Sandro Campigotto

PRIMA PARTE:



Sia x l'angolo ACP e sia $2r$ il diametro della circonferenza circoscritta. Per il teorema della corda, posso calcolare:
$PA = 2r \operatorname{sen} x$,
$PB = 2r\operatorname{sen}[(\pi/3)-x)]$ sfruttando l'angolo PCB,
$PC = 2r\operatorname{sen}[(\pi/3)+x)]$ sfruttando l'angolo PAC, infatti APC è congruente a ABC.
Possiamo quindi calcolare:

$$PA+PB=2r\operatorname{sen}x+2r\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=$$

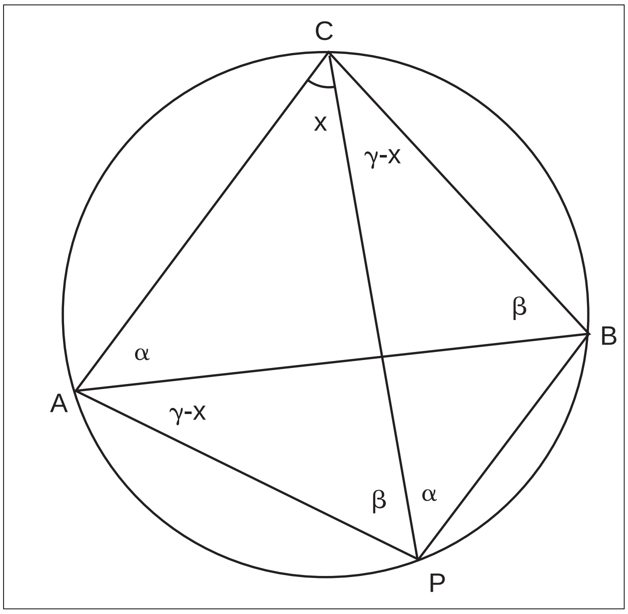
$$=2r\left(\operatorname{sen}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}x\right)=2r\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$

d'altra parte

$$PC=2r\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=2r\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}x\right)$$

quindi $PA+PB = PC$ è verificata per ogni possibile scelta di x.

SECONDA PARTE



Siano $\alpha<\beta$ e γ gli angoli del triangolo ABC, sia P un punto dell'arco AB e sia x l'angolo ACP.
Per il teorema della corda posso scrivere che:
$PA = 2r \operatorname{sen} x$,

$PB = 2r$ sen $(\gamma\text{-}x)$,
$PC = 2r$ sen $(\beta + x)$.

Risulta quindi che:
$PA+PB = PC$
$2r$ sen $x + 2r$ sen $x + 2r$ sen$(\gamma\text{-}x) = 2r$ sen$(\beta+x)$, semplificando sen x + sen$(\gamma\text{-}x)$ = sen$(\beta+x)$.

Devo quindi verificare che l'equazione sopra riportata sia verificata per ogni scelta di x. Eseguendo due calcoli con le formule trigonometriche: sen x + senγ cos x-cosγ sen$x$ = senβ cos$x$ + cosβ sen$x$, raccogliendo: (1-cosγ-cosβ)sen x = (senγ - senβ)cos x.
Dovendo essere verificata per ogni x, deve accadere che:

$$\begin{cases} 1-\cos\gamma-\cos\beta=0 \\ \operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\beta=0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} 1-\cos\gamma-\cos\beta=0 \\ \operatorname{sen}\gamma=\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

elevando al quadrato la seconda equazione, ottengo il sistema:

$$\begin{cases} 1-\cos\gamma-\cos\beta=0 \\ \cos^2\gamma=\cos^2\beta \end{cases}$$

Il sistema, se ha soluzioni, contiene anche le soluzioni del sistema precedente.
Risolvendo si ottiene che

$$\begin{cases} \cos\gamma=1-\cos\beta \\ 1-2\cos\beta+\cos^2\beta=\cos^2\beta \end{cases}$$

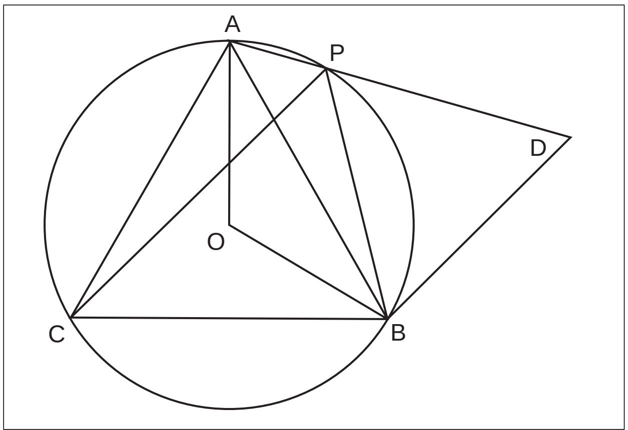
che ha come unica soluzione ammissibile ($0\leqslant\gamma,\ \beta\leqslant\pi$),

$$\begin{cases} \gamma=\dfrac{\pi}{3} \\ \beta=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Quindi il triangolo *ABC*è equilatero.

Diverso è l'approccio di Marino e Panizzoli e di Urzì, che hanno costruito triangoli ausiliari per dare una dimostrazione puramente geometrica.

La costruzione di Marino e Panizzoli è più semplice ma affronta solo la prima parte.



Ipotesi: il triangolo ABC è equilatero

Tesi: CP = AP + PB
Dimostrazione: si prolunghi il segmento *AP* in modo che *PD = PB*. Si considerino ora gli angoli *AOB* e *APB*: essi insistono sullo stesso arco *AB*. Poichè l'angolo *AOB = 360-120=240* gradi, allora l'angolo *APB = 240/2 = 120* gradi.
Considerando il triangolo *PBD*, l'angolo *BPD = 180-120 = 60* gradi e poiché l'angolo *PBD = PDB* (*PB = PD* per costruzione), allora il triangolo *PBD* è equilatero.
Si considerino ora i triangoli *CPB* e *ABD*: *PB = BD* perché il triangolo *PBD* è equilatero; *CB = AB* per ipotesi.; l'angolo *PBC = ABD* perché l'angolo *ABP* è in comune e l'angolo *ABC = PBD = 60* gradi.
Per il teorema sulla congruenza dei triangoli si ha perciò che il triangolo *PCB = ABD*. Di conseguenza *CP = AD* e poiché per costruzione *AD = AP+PB*, allora *CP = AP+PB*.

Urzì invece non solo affronta completamente le due parti ma studia il problema in modo generale e lascia aperta una nuova questione:
"... dimostrare se, dato un triangolo ABC e la circonferenza a esso circoscritta, esiste sempre un punto *P* dell'arco *AB* tale che *PA + PB = PC*. Ma questo è il testo di un nuovo problema..."

Il messaggio di Daniele Urzì conteneva alcune considerazioni che ci sembra importante riportare prima di proporre la sua soluzione:

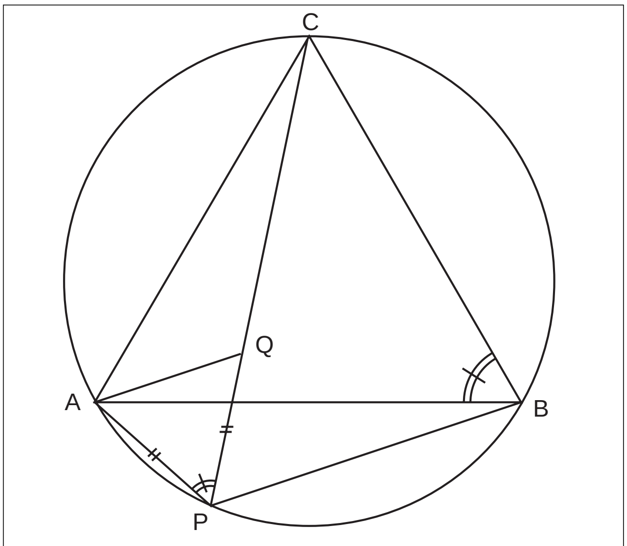
"... la parte inversa è quella che mi ha creato maggiori difficoltà. Infatti in nessun modo riuscivo a dimostrare la seconda parte considerando valida la proprietà per un solo punto P. Poi, ho capito che questo dipendeva dal fatto che esistono infiniti triangoli ABC non equilateri per i quali la proprietà è vera per un punto P del loro circocerchio e solo supponendo che essa sia valida per almeno due punti P il triangolo ABC è equilatero. Io mi sono limitato a costruire uno di quei triangoli non equilateri, forse sarebbe stato meglio dimostrare se, dato un triangolo ABC e la circonferenza a esso circoscritta, esiste sempre un punto P dell'arco AB tale che PA + PB = PC. Ma questo è il testo di un nuovo problema..."

Daniele Urzì
Sia *Q* un punto di *PC* tale che *PQ = PA* (fig.1). Il triangolo isoscele *APQ* è anche equilatero perché l'angolo *APC* misura 60° essendo uguale all'angolo *ABC* (insistono

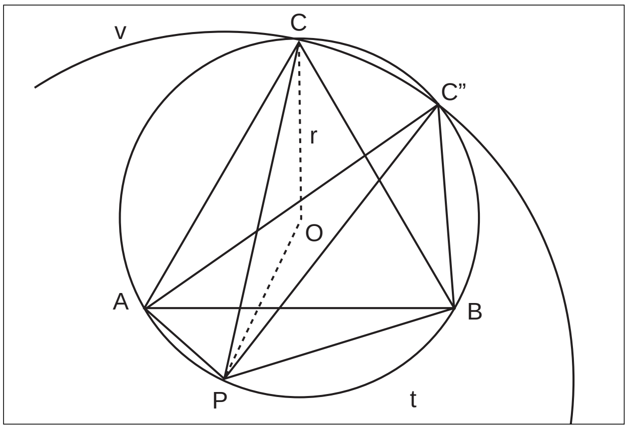
sulla stessa corda *AC*). Gli angoli *ACP*, *ABP* sono uguali perché insistono sulla stessa corda *AP*, mentre gli angoli *AQC*, *APB* sono uguali perché rispettivamente supplementari degli angoli di 60° *AQP* e *ACB*. Da queste considerazioni segue che i triangoli *AQC* e *APB* sono uguali, per cui è *PB = CQ*. E' così dimostrato che *PA+PB = PQ+CQ = PC*, per qualunque punto *P* dell'arco *AB*.

Osservazioni:

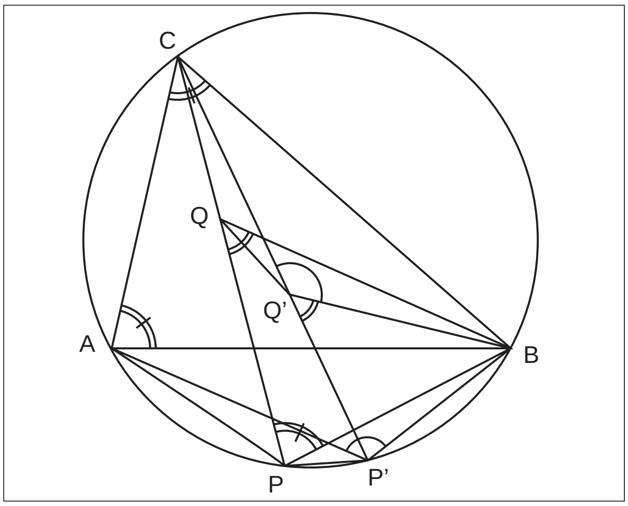
1. Se *P* coincide con *A* o con *B* la tesi è ovvia.
2. La dimostrazione è analoga se il punto *Q* è tale che *PQ = PB*.
3. Si noti che *PQ* è sempre contenuto nel segmento *PC*: rispetto al triangolo *PAC*, l'angolo *ACP* opposto al lato *AP = PQ* è sempre minore dell'angolo *PAC* opposto a *PC*. Infatti variando *P* sull'arco *AB* è sempre vera la relazione *PAC = BAC+PAB = ACB+PCB > ACP* (discorso analogo, rispetto al triangolo *PBC*, se è *PQ = PB*).



Adesso, dato un triangolo equilatero *ABC* e la circonferenza *t* di centro *O* e raggio *r* ad esso circoscritta, sia *P* un punto dell'arco *AB* diverso da *A*, da *B* e dall'altro estremo del diametro passante per *C* (fig.2). Facendo centro in *P* e con raggio uguale a *PC* si tracci una circonferenza *v*. Essa è secante alla circonferenza *t* perché la distanza dei centri è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza. Infatti, rispetto al triangolo *PCO* si hanno le relazioni *PO < PC+r* e *PO > PC-r*. Le due circonferenze hanno così due punti *C* e *C'* in comune: essi sono distinti essendo *t* e *v* secanti, per cui il triangolo *ABC'* non è equilatero, tuttavia essendo *PC = PC'* è vera la relazione *PA+PB = PC'*. Facendo variare *P* sull'arco *AB* si ottengono infiniti triangoli *ABC'* non equilateri (se *P* coincide con l'altro estremo del diametro passante per *C*, *t* e *v* sono tangenti, per cui *ABC'* coincide con *ABC*; mentre se *P* coincide con *A* o con *B* , *C'* coincide con *B* o con *A* e il triangolo *ABC'* degenera in un segmento). In definitiva possiamo costruire infiniti triangoli *ABC'* non equilateri per i quali esiste un punto *P* dell'arco *AB* del circocerchio tale che *PA+PB = PC'*. (1)



Invece, se la (1) è verificata per almeno due punti *P* distinti, *ABC'* è un triangolo equilatero. Lo dimostriamo: supponiamo che dati due punti *P* e *P'* dell'arco *AB* del circocerchio di un qualsiasi triangolo *ABC*, sia *PA+PB = PC* e *P'A+P'B = P'C*. Siano *Q* e *Q'* due punti rispettivamente di *PC* e *PC'* per i quali è *PQ = PB* e *P'Q' = P'B* (fig.3). I triangoli *PQB* e *P'BQ'* hanno gli angoli *QPB* e *Q'P'B* uguali perché insistono sulla stessa corda *CB*. Siccome sono isosceli, anche gli angoli alla base sono uguali, quindi i due triangoli sono simili: *PB/P'B = QB/Q'B* (1). Essendo *QBP = Q'BP'*, gli angoli *QBQ'* e *PBP'* sono uguali perché differenze di angoli uguali con lo stesso angolo *PBQ'* e per la (1) segue che i triangoli *QBQ'* e *PBP'* sono simili. Per cui è *QQ'B = PP'B*. E' facile dimostrare che i triangoli *CQQ'* e *APP'* sono uguali. Essendo gli angoli *CQ'Q*, *AP'P* uguali, segue *CQ'B = AP'B = APB*. Gli angoli *ACB*, *P'Q'B* sono uguali perché supplementari degli angoli rispettivamente *APB*, *CQ'B*, uguali fra loro (*ACB = P'Q'B = PQB*). I triangoli *CQB*, *APB* sono uguali (*CQ = AP*, *PAB=PCB* perché insistono sulla stessa corda *PB*, *CQB = APB* perché supplementari di *PQB = ACB*). Da ciò *AB = CB* per cui *BCA = CAB = QPB*. Essendo *PQB = QBP = ACB = CPB*, segue che il triangolo *PQB* è equilatero, quindi l'angolo *CAB* misura 60°. Il triangolo *ACB* è isoscele, un angolo interno è di 60°, allora *ACB* è un triangolo equilatero. Ed è ciò che volevamo dimostrare.



L'IRRE dell'Emilia-Romagna,
valendosi dell'apporto di operatori interni
e di collaboratori esterni all'Istituto, ha proposto
questo servizio in rete rivolto a docenti,
alunni e appassionati che si
interessano di matematica.
Il servizio, promosso nell'anno scolastico
1999/2000, e giunto al suo terzo anno,
ha visto l'adesione di studenti di tutto il triennio
superiore. Tutto il progetto è in linea con le
direttive della C.M. 270 (Prot. N. 2475)
del 12 novembre 1999, denominata
progetto SeT (Progetto speciale per
l'Educazione Scientifica e Tecnologica).

Nel presente volumetto il resoconto
del primo anno di attività.

I.R.R.E. Emilia Romagna - Sezione Scuola Media

Supplemento al n. 5 settembre - ottobre 2001, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento Educativi dell'Emilia Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Luciano Lelli, proprietà IRRE - Emilia-Romagna.