quaderni di CABRIRRSAE

Paolo Dall'Aglio e Daniele Gouthier

proble MATEMATICA mente

1999 - 2000

n° 19

Paolo Dall'Aglio
SISSA, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati
Daniele Gouthier
SISSA, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati

Released Information
Videoimpaginazione GRAPHICART - Via Fondazza, 37 - Tel. Fax (051) 30.70.73 - 40125 BOLOGNA

INDICE

Il software, realizzato con CABRI II per Dos, è reperibile presso il sito
http: //arci01.bo.cnr.it /cabri /

e presso il sito della Sezione Mathesis di Catania
http: // www.unict.it / mathesis/ .

INTRODUZIONE

Nell'ambito del progetto Fardiconto dell'IRRSAE-ER, ha esordito nell'anno scolastico 1999-2000 probleMATEMATICAmente, un'attività rivolta principalmente alle scuole superiori.
Ogni mese viene pubblicato all'indirizzo http://arci01.bo.cnr.it/cabri/probmat un problema, gli studenti sono invitati a risolverlo e a inviare per posta elettronica la soluzione entro due settimane. Il mese successivo, col testo del nuovo problema, vengono pubblicate le risposte più interessanti accompagnate da un commento. In questo quaderno, sono riportati tutti i problemi del primo anno, con le soluzioni pubblicate in rete e i commenti.

I problemi vengono scelti in modo da poter essere affrontati con strumenti matematici vari, con bagagli culturali anche molto diversi e potrebbero sembrare difficili allo studente perché, in generale, non fanno riferimento a nessuna parte del programma scolastico in particolare, ma, potenzialmente, a tutte: cerchiamo di portare gli studenti fuori dalla gabbia degli esercizi per stimolare la ricerca di strumenti adatti a quel singolo problema.
Nonostante questo, va sottolineato che probleMATEMATICAmente non è il tentativo di proporre un altro metodo di insegnamento, ma vuole essere solamente uno strumento da affiancare a quelli tradizionali.

Nell'elaborazione del commento alle risposte ricevute, abbiamo cercato di mettere in evidenza la molteplicità degli approcci e di dare un ampio spazio alle soluzioni degli studenti, valorizzando quelle più interessanti. Le soluzioni vengono raggruppate a seconda della via seguita, inserendo integralmente quelle più chiare e complete di ciascun gruppo. In questo quaderno, queste soluzioni sono esposte nelle parti a due colonne, per simulare la struttura ipertestuale della versione in rete.

Un'ultima considerazione va fatta su quanti hanno partecipato. Si è trattato soprattutto di singoli studenti, con un buon nucleo di affezionatissimi. Pensando all'attività, ci aspettavamo che potesse diventare uno strumento da usare in classe, ma le risposte arrivate a nome di tutta una classe sono state davvero sporadiche.

NOTA ALLA VERSIONE STAMPATA

Rispetto alla versione in rete, in questo quaderno abbiamo curato alcuni dettagli. Mentre nel riportare i testi degli studenti in rete abbiamo sempre cercato di non apportare modifiche, qui ci siamo permessi di correggere qualche errore e anche di migliorare qualche frase. Alcune figure sono state modificate, per esempio unificando la notazione o correggendo qualche imprecisione.

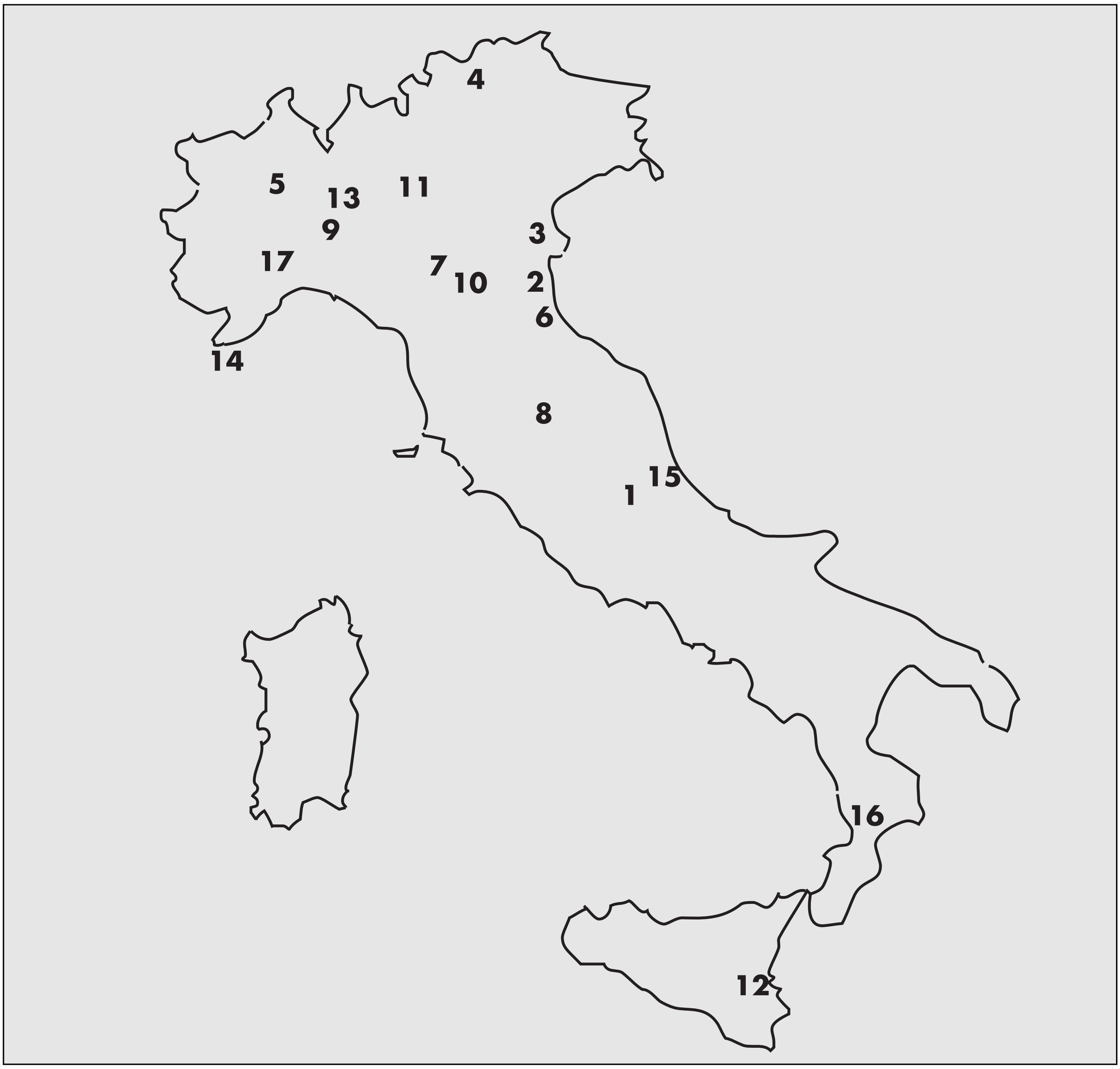
RINGRAZIAMENTI

All'IRRSAE-ER che ci offre lo spazio in rete e la collaborazione per realizzare mensilmente probleMATEMATICAmente, va la nostra gratitudine.
Un grazie di cuore ad Annamaria Arpinati che ha fortemente voluto la nostra attività, a Franca Noè che ci ha spianato la strada con Flatlandia e al professor Barozzi che ha fatto da supervisore per i contenuti matematici.
La collaborazione tecnica di Alberto Mingardi è stata preziosa, alleviandoci molti problemi di gestione informatica.
Una citazione va poi fatta alle biblioteche della SISSA (Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati) e dell'ICTP (International Center of Theoretical Physics) di Trieste presso le quali sono state fatte molte delle ricerche bibliografiche essenziali all'attività.

proble MATEMATICA mente

1999 - 2000

Paolo Dall'Aglio e Daniele Gouthier



Ecco le scuole che hanno partecipato almeno una volta

1 - LS Bafile, L'Aquila
2 - LS Ricci Curbastro, Lugo RA
3 - LS Galilei, Adria RO
4 - LS Pascal, Merano, BZ
5 - ITIS Lirelli, Borgosesia, VC
6 - ITIS Pascal, Cesena FO
7 - LS Spallanzani, Reggio Emilia
8 - ITIS G. Ferraris, San Giovanni Valdarno, AR
9 - Liceo Sociopsicopedagogico Cairoli, Pavia
10 - LS Tassoni, Modena
11 - ITIS Castelli, Brescia
12 - LS Galilei, Catania
13 - LS Vittorio Veneto, Milano
14 - LS Aprosio, Ventimiglia IM
15 - LS Einstein, Teramo
16 - LS Pitagora, Rende CS
17 - ITIS Galilei, Alessandria

La partecipazione degli studenti

	Scuola	Classe	risposte inviate
Jacopo Stoppa	LS - 3	V	xxxxxxx
Emanuele Spadaro	LS - 12	III	xxxxxx
Davide Baldini	LS - 2	IV	xxxx
Matteo Crepaldi	LS - 3	V	xxx
Alessandro Leonardi	LS - 16	V	xxx
Umberto Perinetti	LS - 1	V	xxx
Fabio Sebastiano	LS - 15	V	xxx
Umberto Villa	LS - 3	III	xxx
Maurizio Bonetti	ITIS - 5	IV	xx
Gianni Ponti	LS - 16	V	xx
Concetta Sottile	LS - 16	V	xx
26 studenti	—-	—-	x
2 partecipazioni collettive	—-	—-	x

Bibliografia

[BEL] E.T. BEL,
I grandi matematici,
Sansoni, 1966.

[KRA] S.G.Krantz,
Techniques of problem solving,
AMS, 1997.

[LAR] L.C. Larson,
Problem solving through problems,
Springer-Verlag, 1983.

[OLI] AA.VV.,
XXXVI olimpiadi di matematica (selezione italiana di Cesenatico),
AgipPetroli, 1996.

[SNS] AA.VV.,
I problemi di matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa,
Bollati Boringhieri, 1985

[STE] H. Steinhaus,
Cento problemi di matematica elementare,
Bollati Boringhieri, 1987.

Ottobre 1999

Quali sono i polinomi *P* che soddisfano le seguenti condizioni:
$P(x+1) = P(x) + 1$ $\qquad$ $P(0) = 0$?

Problema tratto da [LAR] (1)

Questo problema offriva la possibilità di studiare una questione sui polinomi affrontandola da punti di vista e da conoscenze anche molto diverse. Ci sono pervenute risposte da quattro studenti

Umberto Perinetti, VC, LS Bafile, L'Aquila;
Davide Baldini, IV, LS Ricci Curbastro, Lugo (RA);
Jacopo Stoppa e Matteo Crepaldi, V sper., LS Galilei, Adria (RO).

Una via per risolvere il problema consiste nel ricordare che un polinomio di grado *n* ha *n* zeri

1 ■ Basandosi su questa osservazione Umberto Perinetti propone con precisione ed esattezza di linguaggio la sua soluzione.

Umberto Perinetti
a) Con il metodo di induzione dimostro che $P(x) = x$, per ogni x naturale: $P(0) = 0$ per ipotesi. Supposto $P(x) = x$ dimostro $P(x + 1) = x + 1$: $P(x + 1) = P(x) + 1$ per ipotesi, $P(x) + 1 = x + 1$ per la supposizione fatta.

b) $P(x) = x \Rightarrow P(x) - x = 0$, per ogni x naturale $P(x) - x$ si annulla quindi per infiniti valori della x cioè $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ Se $P(x) - x$ fosse un polinomio di grado n avrebbe al massimo n zeri reali e non infiniti. Pertanto $P(x) - x = 0$ per ogni x reale e quindi $P(x) = x$, per ogni x reale.

2 ■ Anche Jacopo Stoppa e Matteo Crepaldi hanno percorso la stessa strada

Jacopo Stoppa e Matteo Crepaldi
Noi sappiamo che $P(0) = 0$, quindi $P(1) = P(0) + 1$, cioè $P(1) = 1$; analogamente $P(2) = 2$,
$P(0) = P(-1)+1 \Rightarrow P(-1) = -1$.

Provando, per ogni $z \in \mathbf{Z}$ risulta che $P(z)=z$. Pertanto il polinomio P si comporta come l'identità su $\mathbf{Z}$.
Consideriamo il polinomio $P(x) - x$; esso ha infiniti zeri (tutti gli $z \in \mathbf{Z}$).

Pertanto $P(x) - x$ deve essere il polinomio nullo e quindi $P(x)$ coincide con la funzione identica.

Se ci si accorge che $P(x) = x$ è una soluzione, il problema si può riformulare chiedendosi se P è unico o ce ne sono altri. Se, per assurdo, P e Q sono due soluzioni si mostra (di nuovo per induzione) che $P - Q$ ha infiniti zeri. Pertanto P e Q coincidono. Quindi la soluzione è unica.

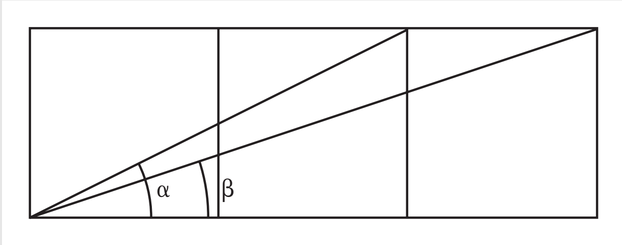
Un'ulteriore alternativa è data dal considerare il grafico $y = Q(x) = P(x) - x$, funzione reale di variabile reale. Con un calcolo diretto si ottiene $Q(x+1) = Q(x)$. Vale a dire che Q è una funzione periodica. Dal momento che Q è anche continua, è limitata. Ma gli unici polinomi limitati sono quelli costanti. Pertanto, poiché $Q(0) = 0$, Q è il polinomio nullo. Il che significa che $P(x) = x$.

Delle altre due soluzioni pervenute una non è corretta in quanto lo studio del grafico non utilizza il fatto che P è un polinomio. L'altra, asetticamente, annuncia che la soluzione è $P(x) = x$ (il che è corretto). Solamente, esortiamo tutte le persone che in futuro affronteranno i problemi di probleMATEMATICAmente a spiegare come si arriva alla soluzione. Infatti i ragionamenti svolti sono sempre più interessanti e importanti del solo risultato.

(1) Si veda bibliografia

Novembre 2000

Considera un rettangolo formato da tre quadrati.



Dimostra che la somma degli angoli α e β in figura è 45 gradi.

Problema tratto da [KRA]

Il problema di novembre era abbastanza semplice se affrontato con la trigonometria. L'interesse risiedeva nelle molte soluzioni geometriche diverse che si potevano trovare. Abbiamo ricevuto 28 risposte.

Giuliano Bertagna, Paolo Bertuzzo, Marzia Bocchino e Nadia Forti, III, LS Pascal, Merano (BZ);
Davide Baldini, IVBC, LS Ricci Curbastro; Lugo (RA);
Daniele Musiani e Giulio Minguzzi, LS Ricci Curbastro, Lugo (RA);
Maurizio Bonetti, IVA meccanici, ITIS Lirelli, Borgosesia (VC);
Marco Quattrocchi, VA meccanici, ITIS Lirelli, Borgosesia (VC);
Lorenzo Castellani, IVA, ITIS Pascal, Cesena (FO);
Luca Goffredo, IIIA, ITIS Pascal, Cesena (FO);
Alex Casadio, IIIB, ITIS Pascal, Cesena (FO);
Mauro Zoffoli, ITIS Pascal, Cesena (FO);
Cristina Di Cola, VC, LS Bafile, L'Aquila;
Umberto Perinetti, VC, LS Bafile, L'Aquila;
Pietro Avanzini, VB, LS Spallanzani, Reggio Emilia;
Domizia Badodi, IIIA, LS Spallanzani, Reggio Emilia;
Roberto Conflitti, IIIB, LS Spallanzani, Reggio Emilia;
Chiara Ferrari, IIIB, LS Spallanzani, Reggio Emilia;
Giovanni Pellicciari, IVE, LS Spallanzani, Reggio Emilia;
Giulia Salami, LS Spallanzani, Reggio Emilia;
Luca Spaccapelo, VE, LS Spallanzani, Reggio Emilia;
Andrea Tortoli, IVB elettronici, ITIS Galileo Ferraris, San Giovanni Valdarno (AR);
Antonella Gianese, VC, Liceo Sociopsicopedagogico Cairoli, Pavia;
Riccardo Monari, IIIC, LS Tassoni, Modena;
Rossi Francesco, IVN, ITIS Castelli, Brescia;
Emanuele Spadaro, IIIA, LS Galilei, Catania;
Jacopo Stoppa e Matteo Crepaldi, V, LS Galilei, Adria (RO);
Umberto Villa, III, LS Vittorio Veneto, Milano;
Amerigo Di Libero, LS Vittorio Veneto, Milano;
Alessio Palmero, IVA, LS Aprosio, Ventimiglia (IM);
Fabio Sebastiano, VB, LS Einstein, Teramo.

Le soluzioni che ci sono arrivate sono sostanzialmente di due tipi: quelle che usano la trigonometria (17) e quelle che ricorrono in genere alle similitudini tra triangoli (16), anche costruendone di nuovi.
Ci è arrivata una soluzione un po' sorprendente ma interessante. L'autore calcola gli angoli, usando la funzione arcotangente. Purtroppo con questo metodo si arriva a una soluzione solo se gli angoli sono esatti e non approssimati. Pertanto non si può essere sicuri che la somma dia esattamente l'angolo cercato, e la risposta non è corretta.

Soluzione basata sull'uso di arcotangenti

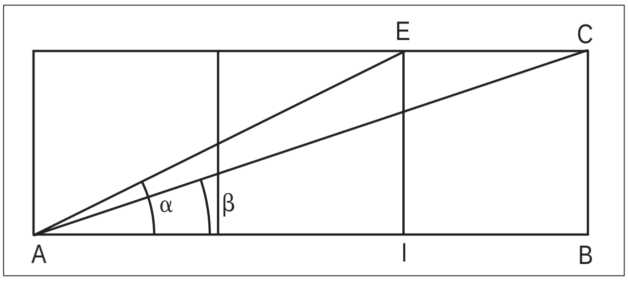
$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = arc\tan\frac{1}{2} = 18°27'$$

$$\tan\beta = \frac{\mathrm{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = arc\tan\frac{1}{3} = 18°27'$$

$$\alpha + \beta = 45°$$

Le soluzioni trigonometriche proposte sono di due tipi.

1 ■ L'approccio più diretto studia la tangente dei due angoli in questione. Le risposte di questo tipo sono tutte corrette. A titolo di esempio proponiamo quella di
Andrea Tortoli



Se la somma degli angoli $\alpha + \beta = 45°$ allora

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(45°) = 1.$$

Considerando il triangolo rettangolo AEI il rapporto tra il cateto EI e il cateto AI è uguale alla tangente di α cioè $EI/AI = \tan\alpha$, quindi se i quadrati hanno lato l abbiamo che $l/2l = (1/2) = \tan\alpha$. Ugualmente considerando il triangolo ACB si ha $CB/AB = l/3l = (1/3) = \tan\beta$.
Ma dalle formule della trigonometria si ha $\tan(\alpha + \beta) = (\tan\alpha + \tan\beta)/(1- \tan\alpha \tan\beta)$ per cui sostituendo i valori trovati

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}} = 1$$

dovendo essere $0 < \alpha + \beta < 90°$ si è dimostrato che

$$\alpha + \beta = 45°$$

2 ■ Le altre studiano seno e coseno (si veda quella di Casadio). Una sola è sbagliata.
Alex Casadio

$$AB = \sqrt{(3l)^2 + l^2} = l\sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(2l)^2 + l^2} = l\sqrt{5}$$

$$\mathrm{sen}\beta = \frac{l}{l\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\mathrm{sen}\alpha = \frac{l}{l\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\beta = \frac{3l}{l\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\alpha = \frac{2l}{l\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\beta\cos\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{10}\frac{2\sqrt{5}}{5} = 5\frac{\sqrt{50}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$

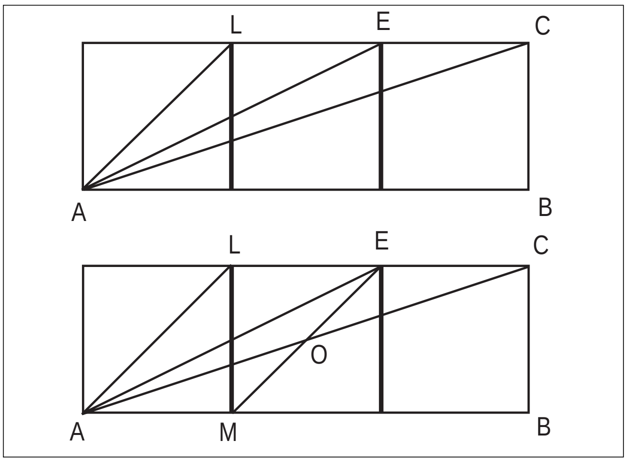
quindi $\alpha + \beta = 45°$.

Le soluzioni geometriche (tutte sostanzialmente basate sullo studio di figure simili) si suddividono ancora in sei tipologie, l'una distinta dall'altra. Quelle che vengono citate nel seguito sono state scelte anche per la buona esposizione. Altre sono molto involute e celano errori.

3 ■ Daniele Musiani e Giulio Minguzzi con la loro prima soluzione, trovano due triangoli simili fra quelli formati dalle diagonali della figura. Poiché triangoli simili hanno angoli uguali, ricavano che l'angolo $\alpha + \beta$ e quello formato dalla diagonale del quadrato coincidono. ⇨

4 ■ Umberto Perinetti invece fonde un ragionamento goniometrico (trova un segmento la cui lunghezza è proporzionale al seno di $\alpha + \beta$) con lo studio della similitudine di opportuni triangoli. ⇨

segue **3**



Daniele Musiani e Giulio Minguzzi

Soluzione 1) Tesi:
$\alpha + \beta = 45°$ ($EAB + CAB = 45°$ cioè $EAB + CAB = LAB$);
La tesi è verificata per $LAE = CAB$ infatti $LAE + EAB = LAB$. Si indicherà con l la lunghezza del lato di ciascun quadrato. Si traccia EM, $EM = l\sqrt{2}$.
EM interseca AC in O che è punto medio sia di EM che ⇨ AC; $EO = l\sqrt{2} = l\sqrt{2}$. Si considerano i triangoli AEL e EOC. Tali triangoli sono simili per il criterio di similitudine. Infatti:

• $EL : EO = AL : EC$ essendo in valori numerici $l : l\sqrt{2} = l\sqrt{2} : l$.

• gli angoli $ALE = OEC$ (per identica costruzione).

Per le dovute corrispondenze risulta che $LAE = OCE$, ma $OCE = CAB$ perché alterni interni quindi $LAE=CAB$. La tesi è dimostrata.

5 ■ Unico tra tutti, Mauro Zoffoli propone un approccio vettoriale che si basa esclusivamente sulla definizione del prodotto scalare.

Mauro Zoffoli

Dimostrazione vettoriale:

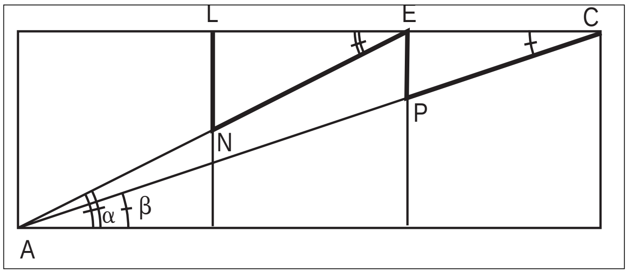
$$AC = 3\vec{i} + \vec{j},\, AH = 2\vec{i} - \vec{j}$$

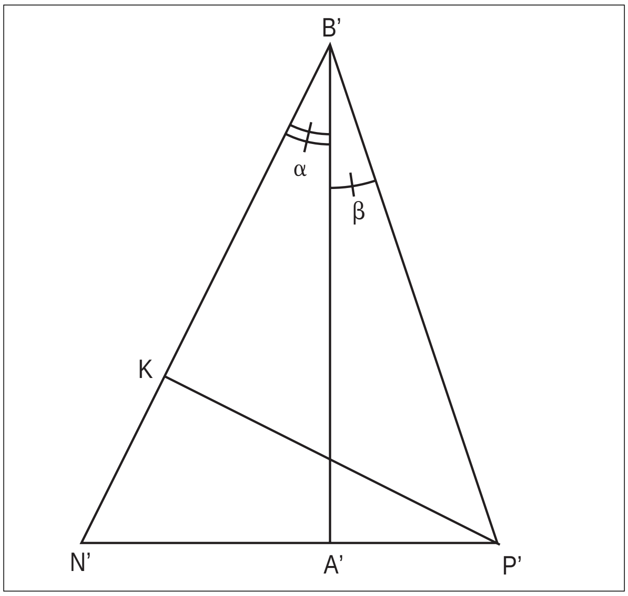
$$\cos C\widehat{A}H = \frac{AC \cdot AH}{|AC||AH|} = \frac{6-1}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \ldots = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e quindi $CAH=45°$.

segue **4**

Umberto Perinetti





Poniamo come unità di misura il lato dei quadrati. Consideriamo i triangoli LEN e ECP e costruiamo i due triangoli $A'B'N'$ e $A'B'P'$ ad essi rispettivamente congruenti. Tracciamo l’altezza $P'K$ relativa al lato $B'N'$.

$A'N' = 1/2$; $A'P' = 1/3$; $N'P' = N'A' + A'P' = 5/6$.

L’area del triangolo $N'B'P'$:

$$s = \frac{N'P' \cdot B'A'}{2} = \frac{5/6}{2} = \frac{5}{12}$$

$$N'B' = \sqrt{N'A'^2 + B'A'^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$B'P' = \sqrt{A'P'^2 + B'A'^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$P'K = \frac{2 \cdot s}{B'N'} = \frac{2 \cdot 5/12}{\sqrt{5}/2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

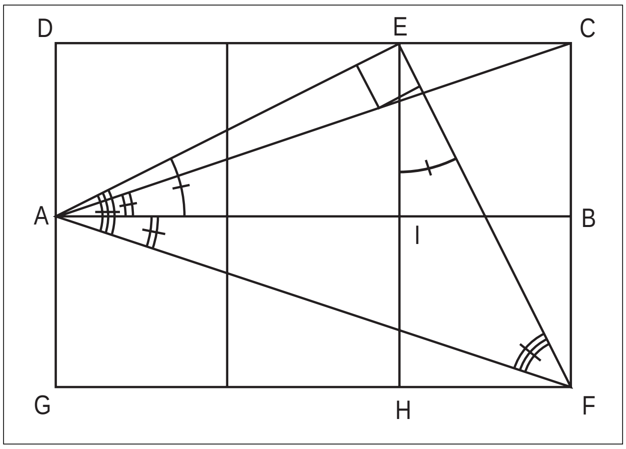
$$\mathrm{sen}(\alpha + \beta) = \frac{P'K}{B'P'} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha + \beta < 90°$, essendo sia α che β minori di $45°$.
Quindi $\alpha + \beta = \arcsin(\sqrt{2}/2) = 45°$.

Un certo numero di soluzioni si basano sulla seguente costruzione: si raddoppia il rettangolo affiancandogliene un secondo, vale a dire si considera un rettangolo formato da tre per due quadrati. Con riferimento a questa figura, quindi, si riconosce un triangolo rettangolo isoscele.

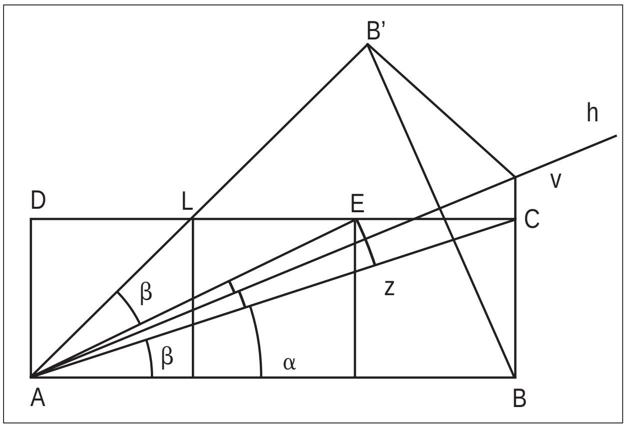
6 ■ Fra tutte, si veda, ad esempio, quella di
Giuliano Bertagna, Paolo Bertuzzo, Marzia Bocchino e Nadia Forti

Si esegue una simmetria assiale del rettangolo *ABCD* rispetto alla retta *AB*. Tramite questa simmetria la diagonale *AC* del rettangolo *ABCD* corrisponde alla diagonale *AF* del rettangolo isometrico *ABFG*.
Si traccia la diagonale *EF* del rettangolo *ECFH*: essa è congruente alla diagonale *AE* del rettangolo *AIED* poiché i due rettangoli sono congruenti.
Quindi il triangolo *AEF* è isoscele su base *AF*. Il suo angolo al vertice *AEF* è retto perché gli angoli che lo compongono, *AEH* e *HEF*, sono complementari. Quindi il triangolo è anche rettangolo.
L'angolo EAF, alla base del triangolo isoscele rettangolo, è isometrico alla somma degli angoli *EAB* e *CAB* quindi è di 45°.



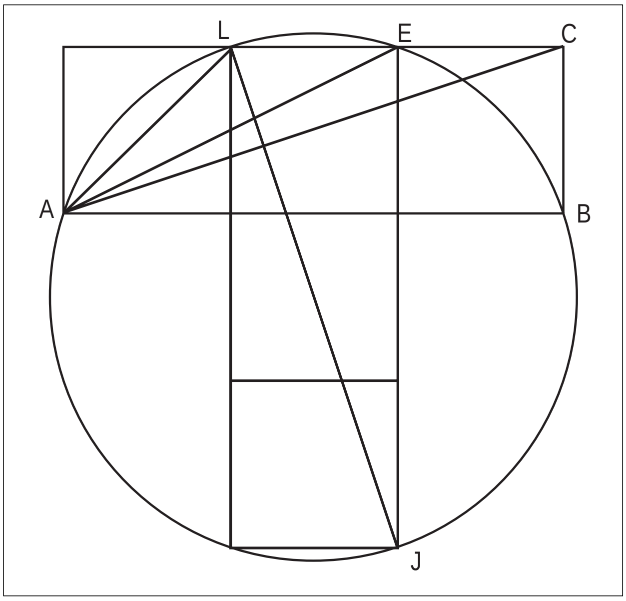
Altri, per arrivare alla stessa dimostrazione, ricorrono a ragionamenti troppo complessi. Due soluzioni, poi, prevedevano costruzioni "non canoniche".

7 ■ Una si incentra sulle proprietà della bisettrice di un angolo.
Domizia Badodi



Si prende su *AC*, *AZ* = *AE* quindi *AEZ* è isoscele (il punto medio della base individua la bisettrice dell'angolo al vertice). Si traccia l'altezza *h*. Si prolunga *BC* fino ad incontrare *h* nel punto *V*. Si disegna il triangolo simmetrico a *ABV* rispetto ad *AV* (*VB'A*) simile a *ABV* quindi *B'AV* = *VAB* quindi $B'AB = 2\beta + (\alpha - \beta) = \beta + \alpha$.
Il segmento *B'A* deve passare per *L*: se non lo facesse, i triangoli *B'AV* e *VAB* non sarebbero congruenti (condizione che ci ha fatto ricavare $\alpha + \beta$) *L* è il vertice del 1° quadrato: *AL* ne è dunque la diagonale, quindi la bisettrice dell'angolo di *90° DAB* e quindi $LAB = \alpha + \beta = 45°$

8 ■ L'altra, sfrutta due angoli che incidono sullo stesso arco di circonferenza.
Jacopo Stoppa e Matteo Crepaldi



Dalla costruzione in figura, poiché i due angoli insistono sullo stesso arco di circonferenza, *LE* , sono uguali (è facile vedere che i circocentri di *ALE* e *LEJ* coincidono tracciando gli assi dei segmenti *AL*, *LE* e *LJ*, dove *AL* è la diagonale di un quadrato). Ma per costruzione $LJE = \beta$ quindi

$\alpha + \beta = 45°$ c.v.d.

In conclusione, viene da dire che il problema era effettivamente molto semplificato se affrontato con la trigonometria. D'altra parte, affrontarlo con tecniche puramente geometriche permetteva di percorrere una gran varietà di vie diverse, tutte interessanti.

Dicembre 1999

Provare se, date tre rette parallele, esiste un triangolo equilatero con un vertice su ciascuna delle tre rette.

Problema tratto da [SNS]

Abbiamo ricevuto 10 risposte.
Davide Baldini, IVBC, LS Curbastro, Lugo (RA);
Maurizio Bonetti, IVA meccanici, ITIS Lirelli, Borgosesia (VC);
Emanuele Spadaro, IIIA, LS Galilei, Catania;
Jacopo Stoppa e Matteo Crepaldi, V, LS Galilei Adria (RO);
Umberto Villa, III, LS Vittorio Veneto, Milano;
Fabio Sebastiano, VB, LS Einstein, Teramo;
Daniele Dallari, VC, LS Tassoni, Modena;
Andrea Barbieri, VG, LS Tassoni, Modena;
Alessandro Leonardi e Concetta Sottile, VG e Gianni Ponti, VH, LS Pitagora, Rende (CS);
le classi quinte dell'ITIS Galilei, Alessandria.

Una considerazione va fatta preliminarmente perché è comune a molte delle soluzioni proposte. Sono stati svolti, in alcuni casi, ragionamenti che risultano incompleti perché non affrontano il nodo centrale della questione, vale a dire quando la soluzione esiste (se mai, qualche volta o sempre). Abbiamo infatti letto esposizioni che arrivano a un'espressione esplicita degli elementi del triangolo. Queste espressioni, però, dipendono da uno o più parametri e non viene studiato se questi parametri possono assumere tutti i valori possibili o solo alcuni.

Le soluzioni proposte sono sostanzialmente di quattro tipi. Il primo è caratterizzato da un approccio analitico. Si sceglie un riferimento cartesiano nel quale rappresentare le tre rette e si impone che i punti sulle tre rette siano tra loro equidistanti. Il limite di questo procedimento è che non si riescono ad evitare lunghi calcoli che richiedono tempo e rigore e quindi qualche soluzione risulta incompleta.

1 ■ Lungo questa via si è inoltrato Davide Baldini, con la prima delle sue due soluzioni che è da leggersi per il rigore dell'esposizione e per la scelta delle ipotesi che semplificano la trattazione.

Davide Baldini

Si vuole dimostrare che date tre rette parallele qualsiasi esiste sempre un triangolo equilatero con un vertice su ciascuna delle tre rette. Si prenda per comodità un sistema di assi cartesiani in cui l'asse delle ascisse coincida con una delle due rette esterne; e si orienti l'asse delle ordinate con verso positivo nel semipiano dove giacciono le restanti due rette. Lavoreremo ora solo nel primo quadrante per comodità di calcoli.

Chiamiamo Y_a la retta più distante dall'asse delle ascisse, Y_b quella più vicina. Le tre rette avranno perciò equazione:

$$Y_0: y = 0 \qquad Y_a: y = a \qquad Y_b: y = b,$$

con $a \geq b \geq 0$. Se $a,b = 0$ il triangolo degenera in un punto.

Facciamo coincidere il vertice giacente sulla retta Y_0 con l'origine O degli assi. Le coordinate dei vertici pertanto sono:

$$O(0, 0) \qquad A(x_a, a) \qquad B(x_b, b)\,.$$

La tesi è dimostrata se le ascisse x_a e x_b, tali che soddisfano la condizione $|OA| = |OB| = |AB|$, esistono per qualsiasi valore di a e di b indicati nella condizione di partenza $a \geq b \geq 0$.

$$|OA|^2 = x_a^2 + a^2$$

$$|OB|^2 = x_b^2 + b^2$$

$$|AB|^2 = x_a^2 - 2\,x_a x_b + x_b^2 + a^2 - 2ab + b^2$$

I condizione $|OA|^2 = |OB|^2$:

$$x_a^2 + a^2 = x_b^2 + b^2$$

$$x_b^2 = x_a^2 + a^2 - b^2$$

$$x_b = \pm\sqrt{x_a^2 + a^2 - b^2}$$

Il valore sotto radice è sempre positivo in quanto $a \geq b$. Per quanto riguarda il +/– escludiamo quest'ultimo perché lavoriamo solo nel primo quadrante.

II condizione $|AB|^2 = |OA|^2$. Semplificando $x_a^2 - 2x_a x_b + x_b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = x_a^2 + a^2$ e sostituendo in x_b il valore in funzione di x_a si ottiene:

$$-2x_a\sqrt{x_a^2 + a^2 - b^2} + x_a^2 + a^2 - b^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$2x_a\sqrt{x_a^2 + a^2 - b^2} = x_a^2 + a^2 - 2ab$$

(C.d.E.: $x_a^2 + a^2 - 2ab \geq 0, \quad x_a^2 \geq 2ab - a^2$)

Elevando alla seconda entrambi i membri si ottiene:

$$3x_a^4 - 2x_a^2(2b^2 - a^2 - 2ab) - a^4 - 4a^2b^2 + 4b^3 = 0$$

con

$$D/4 = 4a^4 + 4b^4 - 8a^3b + 12a^2b^2 - 8ab^3$$
$$= 2a^4 + 2b^4 + 2(a - b)^4 \geq 0 \text{ sempre.}$$

Si ottiene pertanto

Valutiamo ora l'esistenza di x_a^2 prima con il più poi con il meno

$$x_a^2 = \frac{2b^2 - a^2 \pm \sqrt{\Delta/4}}{3}$$

Risolvendo questa disequazione risulta $a \geq 0$, $b \geq 0$

$$2b^2 - a^2 - 2ab + \sqrt{\Delta/4} \geq 0$$

Questa disequazione risulta invece non accettabile.

$$2b^2 - a^2 - 2ab - \sqrt{\Delta/4} \geq 0$$

Pertanto

$$x_a = + \frac{\sqrt{2b^2 - a^2 - 2ab + \sqrt{\Delta/4}}}{3}$$

che esiste sempre con qualsiasi valore di a e b appartenenti a $\mathbf{R}^+ » \{0\}$.

Abbiamo però ancora una condizione di esistenza da controllare: $x_a^2 \geq 2ab - a^2$

$$2b^2 - a^2 - 2ab + \sqrt{\Delta/4} \geq 6ab - 3a^2$$

$$\sqrt{\Delta/4} \geq 8ab - 2a^2 - 2b^2$$

$$\sqrt{\Delta/4} \geq -2(a-b)^2$$

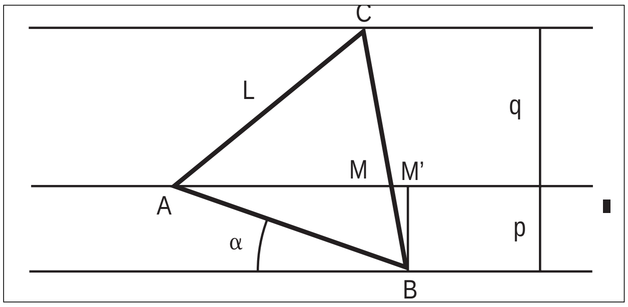
sempre verificata.

Non essendoci quindi limitazioni ad a e b si ha che date tre rette qualsiasi esiste sempre un triangolo equilatero con un vertice su ciascuna retta. c.v.d.

La seconda famiglia offre un'interessante applicazione della trigonometria alla geometria del problema.

2 ■ Proponiamo di riferirsi alla figura ben costruita da Maurizio Bonetti e al testo di Andrea Barbieri che, implicitamente, mostra che la soluzione esiste sempre.

Andrea Barbieri



Dette p e q le distanze tra le tre rette date, affinché il triangolo con i vertici sulle tre rette, sia equilatero (detto α l'angolo acuto che un lato forma con la retta "centrale") deve aversi:

$$\frac{p}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{q}{\operatorname{sen}(60° - \alpha)}$$

questa equazione lineare ed omogenea in seno e coseno ammette la soluzione

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}p}{2q + p}\right)$$

3 ■ Il tentativo di fare una costruzione esplicita del triangolo è stata adottata da alcune persone, ad esempio da Spadaro, la cui difficoltosa esposizione è, comunque, completa.

Emanuele Spadaro

Per dimostrare che esiste almeno un triangolo equilatero che abbia i vertici su tre rette parallele prese a caso, vedo prima cosa avviene se i vertici di un triangolo equilatero sono attraversati da tre rette parallele, in modo tale che, scoperta una proprietà caratteristica, possa essere capace di ricostruire le stesse condizioni date tre rette parallele a caso. Sia dato quindi un triangolo e tre rette parallele tra loro (r, s, t) come nella figura, chiamiamo h la distanza tra le rette più vicine (r ed s) e d quella tra le rette più distanti (s e t); e costruiamo anche le perpendicolari alle rette r, s, t passanti per i vertici. Chiamiamo α l'angolo *LAC* e quindi ricaviamo che *CBK* è congruente a *(60°–α)*. Detto l il lato del triangolo si possono ricavare dai triangoli *ALC* ed *BCK* le seguenti formule trigonometriche:

$$l = \frac{d}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$l = \frac{h}{\operatorname{sen}(60° - \alpha)}$$

da cui

$$\frac{d}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{h}{\operatorname{sen}(60° - \alpha)}$$

$$\frac{h}{d} = \frac{\operatorname{sen}(60° - \alpha)}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Utilizzando la formula di sottrazione del seno si ha così $h/d = \operatorname{sen}\alpha/(\operatorname{sen}60° \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cos 60°)$. Da cui se si tiene conto che $\operatorname{sen}60° = (\sqrt{3/2})$ $\cos 60° = 1/2$ e $\cos\alpha = \sqrt{(1-\operatorname{sen}^2\alpha)}$ si ricava: $h/d = 2\operatorname{sen}\alpha/(\sqrt{(3-3\operatorname{sen}^2\alpha)} - \operatorname{sen}\alpha)$. Adesso risolvendo quest'equazione rispetto a senα si ha: ⇨

4 ■ Quella frettolosa di Matteo Crepaldi e Jacopo Stoppa è esposta con grande semplicità. Anche se non basta osservare il risultato di Cabri per studiare la natura dei luoghi geometrici, ma è necessario proporre una dimostrazione geometrica.

Matteo Crepaldi e Jacopo Stoppa

Date due rette parallele e preso su ciascuna di esse un punto *(A;B)*, abbiamo ottenuto con il semplice uso del compasso un punto *C* tale per cui l'angolo :
CAB=CBA=60°.

Abbiamo poi notato che al muoversi di uno dei due punti iniziali lungo la retta di appartenenza, il punto *C* andava a descrivere un luogo geometrico che con uso di Cabri Geomètre abbiamo visto essere una retta non parallela alle altre. Quindi data un'ulteriore retta, parallela alle precedenti, questa andrà sicuramente ad intersecare la retta tracciata dal punto *C*. Da ciò possiamo concludere che date tre rette tra loro parallele è sempre possibile individuare un triangolo equilatero avente un vertice in ognuna di esse.

segue **3**

$(2d+h)\text{sen}\alpha = h\sqrt{(3-3\text{sen}^2\alpha)}$ ed elevando al quadrato, dato che $3-3\text{sen}^2\alpha \geq 0$ per ogni α, $\text{sen}^2\alpha = 3h^2/4(d^2+h^2+hd)$, da cui $\text{sen}\alpha = \sqrt{(3h^2/4(d^2+h^2+hd))}$. Ne deriva quindi che

$$\alpha = \text{arcsen}\sqrt{\frac{3h^2}{d^2+h^2+hd}} \qquad (1)$$

Abbiamo così trovato la relazione che persiste nel triangolo da noi considerato tra l'angolo α e le due distanze h e d. Possiamo perciò sostenere in virtù del processo inverso a quello finora fatto da noi che prese a caso tre rette parallele distanti h ed d, e preso un punto A sulla retta r (quella esterna più vicina a quella mediana, s) e un punto B su s tale che l'angolo $rAB = a$ come nella (1) (si noti che i punti B possono essere due) il vertice C del triangolo equilatero ABC giace su T, essendo t l'altra parallela. Resta così dimostrato che esistono infiniti triangoli equilateri con i vertici su tre rette parallele.

5 ■ La costruzione di Fabio Sebastiano era, così come era esposta, sbagliata ma conteneva l'idea geometrica più semplice e interessante. Pertanto è stata inserita con le dovute correzioni.

Fabio Sebastiano

Siano a, b, c tre rette parallele con b appartenente alla striscia delimitata da a e da c e siano d_1 e d_2 rispettivamente le distanze di a da b e di b da c con $d_1 > d_2$. Sia B un punto su b e si tracci una circonferenza di centro B e raggio l. Siano A e C rispettivamente le intersezioni della circonferenza con le rette a e c dalla stessa parte rispetto alla perpendicolare alle tre rette passante per B e siano A' e C' le proiezioni di A e C su B. Dai triangoli rettangoli ABA' e CBC' si ricava:

$$A'B = \sqrt{l^2 - d_1^2}$$

$$C'B = \sqrt{l^2 - d_2^2}$$

da cui

$$A'C' = \sqrt{l^2 - d_2^2} - \sqrt{l^2 - d_1^2}$$

Ricavo quindi

$$AC = \sqrt{(A'C')^2 + (d_1 + d_2)^2}$$

Impongo $AC = 1$ da cui ricavo

$$2\sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2}{3}} = 1$$

che esiste per ogni scelta di d_1 e d_2. Il triangolo ABC è equilatero poiché ha i lati tutti uguali ad l e tale costruzione è ripetibile per ogni terna di rette parallele come volevasi dimostrare.

L'ultimo tipo di soluzione tratta il triangolo equilatero come un corpo rigido che ruota trascinandosi dietro le tre rette, con un'idea dinamica della geometria di questo problema. Una soluzione arrivata analizza tortuosamente un caso particolare e studia in modo approssimativo la generalizzazione.

6 ■ Davide Baldini, invece propone una soluzione (la sua seconda) che ha la bellezza dei ragionamenti semplici e diretti, senza per questo mancare di rigore.

Davide Baldini

Ogni insieme di tre rette parallele può essere indicato nella forma *a/b*, avendo indicato con *a* la distanza tra la retta intermedia e quella ad essa più vicina; con *b* la distanza tra la retta intermadia e quella più lontana. Si osserva pertanto che $0 \leqslant a/b \leqslant 1$. Vale zero infatti se la retta più vicina coincide con la retta intermedia e *1* quando le due rette esterne sono equidistanti da quella intermedia. Nel caso particolare in cui le tre rette siano tutte sovrapposte il triangolo degenera in un punto.

Si prenda ora un triangolo equilatero e si mandino sui suoi vertici tre rette parallele fra loro e parallele ad una altezza del triangolo. Si può notare che il rapporto *a/b* vale *1* e che questo è il rapporto massimo. Variando infatti l'inclinazione delle rette due delle tre tendono ad avvicinarsi, mentre la terza tende ad aumentare la distanza. Le due rette si avvicinano sempre più fino a coincidere, a questo punto il rapporto risulterà *0*.

Pertanto in un triangolo equilatero sono costruibili infinite terne di rette parallele con un valore di *a/b* compreso tra *0* e *1*. E' quindi possibile, date tre rette parallele qualsiasi, individuare un triangolo equilatero con un vertice su ciascuna retta.

Un'ultima considerazione può offrire spunti per nuovi ragionamenti, al di là dell'attività di probleMATEMATICAmente. Nella formulazione del testo non era specificato se le tre rette erano o meno nel piano. Tutte le soluzioni pervenute affrontavano il problema come un problema di geometria piana. Potrebbe essere interessante ristudiarlo nello spazio.

7 ■ Nel novembre del 2000 ci è pervenuta finalmente una risposta al problema lasciato aperto: ecco la brillante soluzione di Emanuele Spadaro (IVA LS "Galillei", Catania)

Emanuele Spadaro

Date le tre rette parallele nello spazio (che chiamiamo *r*, *s* e *t*) si prenda la perpendicolare ad esse: si chiamino C, B e A le rispettive intersezioni tra il piano e le rette *r s* e *t* e siano $AB = c$, $AC = b$ e $CB = a$, e senza perdere di generalità supponiamo $a \geq b \geq c$. Il problema si riduce nel trovare due punti *D* e *E* rispettivamente su *r* e *t* tali che $EB = DB = ED$ e cioè posto $DC = x$ e $EA = y$ bisogna che sia verificato per il teorema di Pitagora il sistema

$$x^2 + a^2 = y^2 + c^2 \qquad \text{e} \qquad x^2 + a^2 = (y-x)^2 + b^2$$

dove *x* e *y* sono numeri reali positivi, perché per come abbiamo supposto *a*, *b* e *c* si ha che *CD* e *EA* giacciono sulla stesso semispazio rispetto al piano che abbiamo tracciato, e cioè $y - x < y$.

Risolviamo il sistema, ricavando *x* dalla prima $x = \sqrt{(y^2 + c^2 - a^2)}$ e sostituendolo alla seconda $a^2 = y^2 - 2xy + b^2$ otteniamo, ponendo $k = a^2 - c^2$ e $p = a^2 - b^2$ (si ha dunque $k > p$), $y^2 - 2y\sqrt{(y^2 - k)} = p$ da cui ordinando ed elevando al quadrato sotto la condizione che sia $y^2 \geq k$

$$y^4 - 2py^2 + p^2 = 4y^2(y^2 - k)$$

da cui

$$3y^4 + 2y^2(p - 2k) - p^2 = 0$$

che è un equazione biquadratica con due radici per y^4 una positiva ed una negativa perché qualunque sia il segno di $p - 2k$ si ha una variazione e una permanenza di segno (regola di Cartesio). Tralasciando la soluzione negativa (i valori di y che a noi interessano sono reali) prendiamo quella positiva

$$y^2 = \frac{2k - p + 2\sqrt{p^2 - pk + k^2}}{3}$$

che è sicuramente accettabile perché è maggiore di k (basta verificare che la disequazione $2k - p + 2\sqrt{(p^2 - pk + k^2)} \geq 3k$ è sempre vera)[1].

Le soluzioni da noi cercate sono dunque la radice positiva di y^2 cioè

$$y = \sqrt{\frac{2k - p + 2\sqrt{p^2 - pk + k^2}}{3}}$$

e

$$x = \sqrt{y^2 - k} = \sqrt{\frac{k - p + 2\sqrt{p^2 - pk + k^2}}{3}}$$

Dalla costruzione di *x* e *y*, cioè di DC e EA, resta dimostrata l'esistenza d'infiniti triangoli rettangoli su tre rette parallele nello spazio.

[1] In realtà la condizione $y^2 \geq k$, data sopra, è sempre vera, quindi non c'è bisogno di questa verifica (N.d.R.).

Gennaio 2000

Trovare le funzioni reali di variabile reale F che soddisfano la relazione:
$F(x)F(y) - F(xy) = x + y$.
Problema tratto da [LAR]

Abbiamo ricevuto 6 risposte, da:

Davide Baldini, IVBC, LS Ricci Curbastro, Lugo (RA);
Emanuele Spadaro, IIIA, LS Galilei, Catania;
Jacopo Stoppa, V, LS Galilei, Adria (RO);
Fabio Sebastiano, VB, LS Einstein, Teramo;
Umberto Perinetti, VC, LS Bafile, L'Aquila;
anonimo, LS Pitagora, Rende (CS).

Una parte degli studenti ha considerato direttamente una possibile funzione come soluzione verificando che questa soddisfacesse la condizione data. Nessuno di questi ha però dimostrato che tale soluzione fosse unica, che non ne esistessero altre. Pertanto il ragionamento non è completo.
Altri hanno ricavato nuove condizioni che devono essere soddisfatte dalla soluzione (ad esempio, $F(0)^2 - F(0) = 0$) e quindi le hanno usate per semplificare la relazione iniziale ($F(0)F(x) - F(0) = x$).

1 ■ Delle tre soluzioni corrette (Sebastiano, Perinetti, Spadaro) riportiamo quella di Umberto Perinetti per la precisione della sua esposizione.

Umberto Perinetti

Per $y = 0$ si ha $F(x)F(0) - F(0) = x$ e quindi

$$F(0)[F(x) - 1] = x \tag{1}$$

Per $x = y = 0$ si ha $F(0)F(0) - F(0) = 0$, dunque $F(0)[F(0) - 1] = 0$ pertanto $F(0) = 0$ o $F(0) = 1$.
Se fosse $F(0) = 0$, sostituendo nella (1), avremmo $0[F(x) - 1] = x$, cioè $0 = x$. In tal caso la (1), che dovrebbe essere soddisfatta per ogni x in **R**, sarebbe soddisfatta solo per $x = 0$. Dovrà quindi essere $F(0) = 1$. Sostituendo nella *1* otteniamo

$$F(x) = x + 1.$$

La funzione che soddisfa la condizione $F(x)F(y) - F(xy) = x + y$ per ogni x, y reali è quindi quella di equazione $F(x) = x + 1$.

Altre soluzioni si potevano ottenere facendo analoghi ragionamenti per sostituzione. Ad esempio:

Soluzione 1: ponendo $y=1$, si ottiene $(1 - F(1))F(x) = x + 1$, dalla quale segue che $F(1)$ non è 1 (altrimenti sarebbe $0 = x + 1$, per ogni x). Inoltre si ricava che $(1 - F(1))F(0) = 1$ e quindi $F(0)$ non è nullo.
D'altra parte, dalla $F(0)^2 - F(0) = 0$, si ottiene che $F(0) = 1$.
Pertanto

$$1 - F(1) = 1 \text{ e } F(x) = x + 1.$$

Soluzione 2: ponendo $x = -1$ e $y=1$, si ha $F(-1)(F(1) - 1) = 0$. Ma $F(1)$ non è 1 e quindi $F(-1) = 0$. Allora scelgo i valori $-x$ e -1 e calcolo

$$-x - 1 = F(-x)F(-1) - F(x) = - F(x)$$

cioè

$$F(x) = x + 1.$$

Febbraio 2000

Considera i primi n numeri naturali: $1, 2, \dots, n-1, n$. Indica con $S_1(n)$ la loro somma
$S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n$.
1)Ricava, con almeno due procedimenti[(1)] diversi, che

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Indica poi con $S_2(n)$ la somma dei quadrati
$S_2(n) = 1 + 4 + \cdots + n^2$
Ricava che

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(FACOLTATIVO) Trova quindi l'espressione per la somma $S_3(n)$ dei loro cubi. E cosa puoi dire della somma $S_k(n)$?

Problema tratto da [KRA]

Abbiamo ricevuto tre risposte da
Alessandro Leonardi e Concetta Sottile,VG, LS Pitagora, Rende (CS);
Emanuele Spadaro, IIIA, LS Galilei, Catania;
Jacopo Stoppa, V sper, LS Galilei, Adria (RO).

1) Iniziamo analizzando il problema del calcolo di $S_1(n)$. Un metodo classico è il cosiddetto teorema del Piccolo Gauss (vedi il libro di Bell citato nella nostra Bibliografia [BEL]): scriviamo

1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n	$+$
n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	2	1	$=$
$n+1$	$n+1$	$n+1$	$\cdots$	$n+1$	$n+1$	

Pertanto $2S_1(n) = n(n+1)$, da cui segue la soluzione. Conoscendo già la formula, invece, si poteva ragionare per induzione, come hanno fatto Spadaro e Leonardi & Sottile.

1 ■

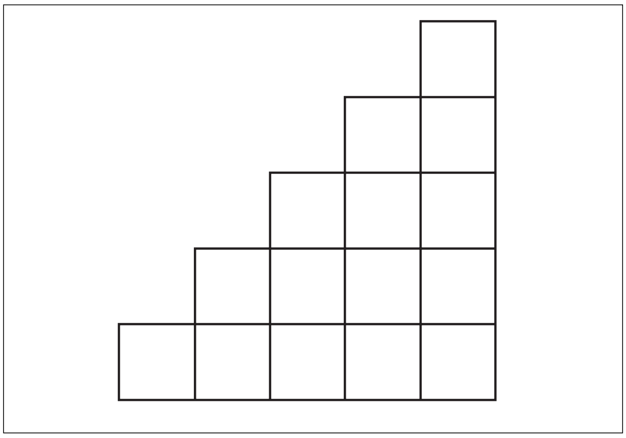
Emanuele Spadaro

Si può dimostrare per induzione: $S_1(n) = n(n+1)/2$ è vero per $n = 1$ e supposto che sia vero per n è vero anche per $n + 1$. Infatti, $S_1(n + 1) = S_1(n) + n + 1 = n(n + 1)/2+(n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$ che è della forma di $n(n + 1)/2$ con $n + 1$ al posto di n.

Sempre Spadaro ha proposto un'interessante soluzione geometrica

Emanuele Spadaro

Si può ricavare pensando i numeri come delle pile di quadratini, cioè al numero 1 come un quadratino, il numero 2 come due quadratini sovrapposti, il numero 3, tre quadratini e così via dicendo e disporli come in figura:



Si nota che la somma da noi cercata è la somma di tutti i quadretti e quindi l'area della figura che facilmente possiamo ricavare che è: $S_1(n) = n^2/2$ (il mezzo quadrato di lato n) più $n/2$ (n volte mezzo quadratino che si trova al di là della diagonale) $= n(n+1)/2$.

A titolo di curiosità, proponiamo poi di considerare il triangolo di Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&4&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&10&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1
\end{array}$$

(1) Per una delle possibili soluzioni può essere utile considerare lo sviluppo di $(h + 1)^2$

Per costruzione, la terza diagonale *(1, 3, 6, 10, 15, ...)* è composta dalle somme dei primi *n* numeri. E l'espressione del suo termine *n*-esimo, come si sa, è il coefficiente binomiale

$$\binom{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

---

2 ■ Per quanto riguarda la seconda parte, è possibile dimostrare la formula di $S_2(n)$ per induzione, come hanno fatto, per esempio, Leonardi & Sottile

Alessandro Leonardi e **Concetta Sottile**

È evidente che $S_2(1)$ è vera e in particolare è *1*. Cerchiamo di dimostrare che per ogni *n*

$$S_2(n) \Rightarrow S_2(n+1) .$$

Dunque supponiamo vera la formula da dimostrare; se essa è vera lo sarà anche quella per $n+1$, ossia

$$S_2(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Con un calcolo diretto si ottiene che questa è uguale a $S_2(n) + (n+1)^2$. Quindi per il principio di induzione essa è vera per qualunque $n \in \mathbf{N}$. c.v.d.

Ci sono poi dei metodi che permettono di risolvere il problema per tutte le somme $S_k(n)$. Come avevamo suggerito nel testo, per calcolare $S_1(n)$ si può considerare l'identità

$$(h+1)^2 - h^2 = 2h + 1 .$$

Se ora si sommano entrambi i membri con *h* che va da *1* a *n*, si ottiene

$$\begin{gathered} 4 - 1 = 2 + 1 \\ 9 - 4 = 6 + 1 \\ \cdots = \cdots \\ (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \end{gathered}$$

e quindi

$$(n+1)^2 - 1 = 2S_1(n) + n,$$

da cui si ricava $S_1(n)$. Questo procedimento si generalizza: per calcolare $S_2(n)$ si considera

$$(h+1)^3 - h^3 = 3h^2 + 3h + 1$$

e si ottiene

$$(n+1)^3 - 1 = 3\,S_2(n) + 3\,S_1(n) + n.$$

Iterando questa tecnica si trova $S_{k+1}(n)$ in funzione delle *k* somme precedenti.

---

3 ■ Un metodo notevolmente migliore è stato proposto da Stoppa di cui includiamo integralmente la risposta.

Jacopo Stoppa

Supponiamo di conoscere la formula per la somma dei primi *n* naturali $S_1(n) = n(n+1)/2$ facilmente verificabile per induzione e passiamo a calcolare la somma dei primi *n* quadrati. Si consideri la seguente tabella:

1	2	3	...	k	...	n
1	2	3	...	k	...	n
1	2	3	...	k	...	n
...	...	...	...	...	...	...
1	2	3	...	k	...	n
...	...	...	...	...	...	...
1	2	3	...	k	...	n

La somma di tutti gli interi di ogni riga è $1+2+3+ \cdots +n$, cioè $n(n+1)/2$, e così la somma di tutti gli interi della tabella è pari a $nn(n+1)/2$. Ora sommiamo tra loro i numeri dentro ogni regione racchiusa da linee. Per la regione delimitata dalla *k*-esima riga e dalla *k*-esima colonna abbiamo la somma

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) + k^2 = \frac{(k-1)k}{2} + k^2 = \frac{3}{2}k^2 - \frac{1}{2}k$$

Sommando su tutte le regioni in questo modo ed eguagliando al risultato precedente, otteniamo

$$\frac{3}{2}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) - \frac{1}{2}\left(1 + 2 + \ldots + n\right) = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

da cui otteniamo

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{2}{3}\frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c.v.d

Per la somma dei cubi consideriamo la seguente tabella:

1^2	2^2	3^2	...	k^2	...	n^2
1^2	2^2	3^2	...	k^2	...	n^2
1^2	2^2	3^2	...	k^2	...	n^2
...	...	...	...	...	...	...
1^2	2^2	3^2	...	k^2	...	n^2
...	...	...	...	...	...	...
1^2	2^2	3^2	...	k^2	...	n^2

La somma di tutti gli interi di ogni riga della tabella è $1^2+2^2+3^2+ \cdots +n^2$, cioè, $n(n+1)(2n+1)/6$. Dunque ⇨

segue **3**

la somma di tutti gli interi della tabella è *n_(n+1)(2n+1)/6*. Inoltre, la somma degli interi nella regione delimitata dalla *k*-esima riga e dalla *k*-esima colonna è pari a

$$1^2+2^2+\ldots+(k-1)^2+k\cdot k^2=\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}+k^3=\frac{4}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{6}k$$

Sommando su tutte le regioni ed eguagliando al risultato precedente otteniamo

$$\frac{4}{3}\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)-\frac{1}{2}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+\frac{1}{6}\left(1+2+\ldots+n\right)=\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$$

da cui, dopo alcune manipolazioni ed usando il risultato per la somma dei primi *n* quadrati, arriviamo a

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

c.v.d.

Applicando lo stesso metodo ad una tabella di cubi, otteniamo la formula per le potenze quarte

$$S_4(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Dalla trattazione svolta, risulta evidente che per trovare $S_k(n)$, somma delle potenze *k*-esime, dobbiamo conoscere $S_1(n)$, $S_2(n)$, … , $S_{k-1}(n)$.

Ho trovato anche alcuni interessanti collegamenti con l'integrale definito, nel senso che è possibile approssimare $S_k(n)$ con

$$\int_0^x x^n$$

La bellezza di quest'approccio sta nel fatto che si può dare un'espressione diretta alla somma $S_{k+1}(n)$ che dipende solo da $S_k(n)$:

$$S_{k+1^{(n)}}=nS_{k^{(n)}}-\sum_{h=1}^{n}S_k(h-1)$$

Marzo 2000

**Trova i quadrilateri di area massima inscritti in un'ellisse.
Puoi considerare prima il caso più semplice: qual è il quadrilatero di area massima inscritto in una circonferenza?**

Problema tratto da [LAR]

Sono arrivate cinque risposte da:
Alessandro Leonardi, VG, LS Pitagora, Rende (CS);
Giovanni Ponti, VH, LS Pitagora, Rende (CS);
Emanuele Spadaro, IIIA, LS Galilei, Catania;
Jacopo Stoppa, V sper., LS Galilei, Adria (RO);
Umberto Villa, III I, LS Vittorio Veneto, Milano.

Un benvenuto a Giovanni Ponti che partecipa per la prima volta a probleMATEMATICAmente.
Per quanto riguarda le soluzioni, era facile per questo problema incorrere nell'errore di considerare solo alcuni quadrilateri particolari: non c'è motivo per cui il quadrilatero debba essere, per esempio, simmetrico rispetto agli assi; e quindi non si poteva restringere lo studio al solo primo quadrante.

1 ■ Così facendo, Giovanni Ponti ha trovato in modo corretto due soluzioni, trascurando però tutte le altre.

Giovanni Ponti

Essendo l'ellisse simmetrica rispetto agli assi e al centro del riferimento cartesiano, mi limito a considerare soltanto il primo quadrante e, in particolare, un punto P appartenente all'ellisse nel primo quadrante stesso. Considerata l'ellisse di equazione $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, il punto P avrà coordinate $(t,?)$. Per calcolare l'ordinata del punto, impongo la condizione di appartenenza all'ellisse e, poiché limito il mio studio solo al primo quadrante, l'ordinata sarà positiva. Il punto pertanto ha coordinate

$$P = \left(t, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2} \right).$$

Siano T e V le proiezioni del punto sugli assi cartesiani. Calcolo le distanze PV e PT:

$$PV = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - t^2}$$

$$PT = t.$$

L'area del quadrilatero $PTOV$ è

$$y = f(t) = PV \cdot PT = \frac{tb\sqrt{a^2 - t}}{a}$$

A questo punto, calcolo la derivata prima di $f(t)$ per determinare poi, studiando il segno di tale derivata, i punti in cui l'area del quadrilatero assume il suo massimo valore:

$$y' = \frac{b}{a}\left(\sqrt{a^2 - t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right)$$

$$y' = \frac{b}{a}\frac{a^2 - 2t^2}{\sqrt{a^2 - t^2}}$$

Studiamo ora il segno della derivata prima, analizzando ⇨

2 ■ Anche Villa ha seguito la stessa strada, utilizzando però due metodi geometrici che non coinvolgono le derivate.

Umberto Villa

Metodo 1) Consideriamo l'ellisse in un sistema di assi cartesiani ortonormali, avente come assi gli assi coordinati, la sua equazione in forma canonica è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

L'ellisse risulta diviso dagli assi cartesiani in quattro archi simmetrici. Consideriamo ora per comodità solo la parte di ellisse contenuta nel primo quadrante (le osservazioni fatte su di essa varranno anche sulle altre parti di essa). Le coordinate di un punto di questo arco di ellisse saranno del tipo:

$$P_0\left(x_0, \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2} \right)$$

con $0 \leqslant x_0 \leqslant a$.

Calcoliamo l'area del rettangolo individuato dai punti $O(0;0)$, P_0 e dalle proiezioni di tale punto sugli assi cartesiani:

$$A = x_0 \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$$

Viene ora richiesto quando questa funzione è massima:

$$A^2 = x^2 \cdot \frac{b^2}{a^2}\left| a^2 - x^2 \right|$$

Sostituendo $A^2 = t$, $x^2 = z$, otteniamo:

$$t = \left| -\frac{b^2 z^2}{a^2} + b^2 z \right|$$

Questa è l'equazione di una parabola, quindi l'ordinata ⇨

segue **1**

quando $N > 0$ e $D > 0$. Nello studio del segno si possono omettere i valori di a e di b perché già maggiori di zero per ipotesi

$$y' > 0$$

$N > 0$ se $2t^2 - a^2 < 0$, cioè se $-a\sqrt{2}/2 < t < a\sqrt{2}/2$

$D > 0$ se $\sqrt{(a^2-t^2)} > 0$, cioè $\forall\, t$ perché $0 < t < a$ per il vincolo geometrico.

Da ciò si deduce che per $t = a\sqrt{2}$ la funzione assume il suo massimo valore. Quindi, il quadrilatero regolare di area massima inscritto nell'ellisse si ottiene prolungando i segmenti PV, PT e PO fino ad incontrare l'ellisse in altri tre punti e unendo i rispettivi anche con il punto P. Inoltre, il tipo di quadrilatero inscritto dipende dall'eccentricità della curva ($e = c/a$, dove c è la distanza tra un fuoco e l'origine): nel caso particolare del cerchio $e = 0$ ed il quadrilatero sarà un quadrato; nel caso più generale dell'ellisse $0 < e < 1$ ed il quadrilatero sarà un rettangolo.

segue **2**

del suo vertice sarà il massimo reale. Ne consegue che l'area massima e il punto in questione sono:

$$A=ab/2$$

$$P_0(a/\sqrt{2}\,,\, b/\sqrt{2}).$$

Considerando tutto l'ellisse, il rettangolo con area maggiore in esso inscritto sarà formato dai simmetrici di P_0 rispetto agli assi cartesiani e alla loro origine, e avrà area $4A = 2ab$.

Metodo 2) Consideriamo l'ellisse in un sistema di assi cartesiani ortonormali, avente come assi gli assi coordinati, la sua equazione in forma canonica è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

L'ellisse risulta diviso dagli assi cartesiani in quattro archi simmetrici. Consideriamo ora per comodità solo la parte di ellisse contenuta nel primo quadrante (le osservazioni fatte su di essa varranno anche sulle altre parti di essa). Immaginiamo di intersecare questo arco di curva con un fascio di iperboli equilatere aventi per asintoti gli assi cartesiani:

$$xy = k$$

dove k rappresenta l'area del rettangolo formato da $O(0;0)$, dal punto dell'iperbole $P(x;y)$ e dalle sue proiezioni sugli assi cartesiani.

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

sostituisco $xy=k$

$$b^2x^4 - a^2b^2x^2 + k^2a^2 = 0$$

ponendo $z=x^2$

$$b^2z^2 - a^2b^2z + k^2a^2 = 0\,.$$

• Se $k > ab/2 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$ nessuna intersezione reale tra le due coniche.

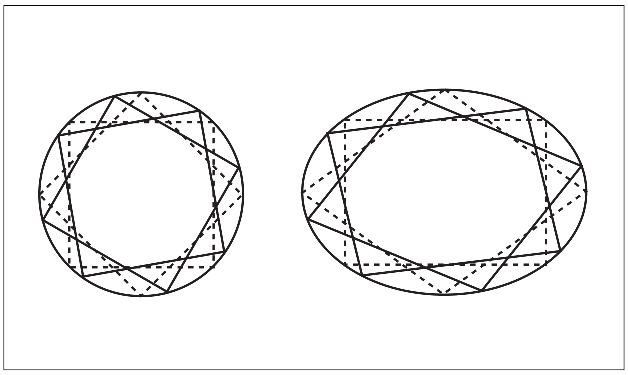
• Se k £ $ab/2 \Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow$ due intersezioni reali tra le due coniche.

$k = ab/2$ rappresenta il valore limite per il quale le due curve sono tangenti in un punto P_0 e l'area del rettangolo di vertici $O(0;0)$ e $P_0(a/\sqrt{2}\,,\, b/\sqrt{2})$

$$A= k = ab/2.$$

Considerando tutta l'ellisse, il rettangolo con area maggiore in esso inscritto sarà formato dai simmetrici di P_0 rispetto agli assi cartesiani e alla loro origine, e avrà area $4A = 2ab$.

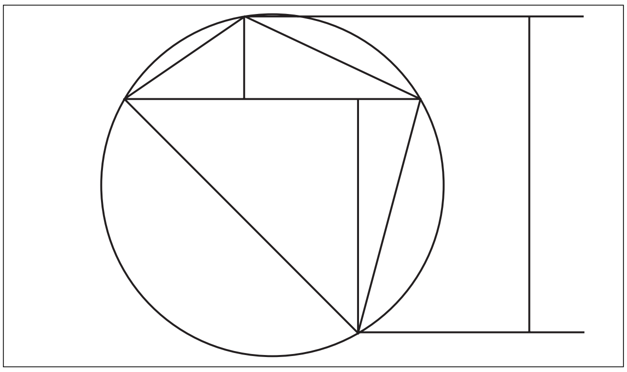
Il nostro suggerimento (considerare la circonferenza) poteva aiutare ad evitare l'errore di cui sopra, osservando che nella circonferenza ci sono infiniti quadrati di area massima (e non uno solo, né due).



3 ■ Questa via è stata seguita da Spadaro e Stoppa

Emanuele Spadaro

Per risolvere il problema consideriamo prima il caso particolare di inscrivere il quadrilatero di area massima in una circonferenza, e dimostriamo che il quadrilatero cercato è un quadrato. L'area di un qualunque quadrilatero inscritto in una circonferenza è uguale al prodotto di una diagonale per la distanza delle rette parallele alla diagonale passanti per gli altri due vertici diviso due (vedi figura – l'area totale, infatti, si ottiene dalle somma delle aree dei due triangoli *ABC* e *ACD*). Per massimizzarla bisogna dunque rendere massimi i due fattori e cioè renderli dei diametri (le corde di lunghezza massima): essendo dunque le due diagonali due diametri perpendicolari il quadrilatero è un quadrato inscritto. c.v.d.



Per passare dal caso particolare della circonferenza a quello generale dell'ellisse consideriamo una particolare classe di trasformazioni, le dilatazioni: consideriamo che ogni ellisse della forma

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \qquad (1)$$

si ottiene infatti da una dilatazione di fattori *a* e *b* della circonferenza di raggio *1* e centro nell'origine,

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (2);$$

e inoltre consideriamo che se ad una figura *F* di area *S* applichiamo una dilatazione di fattori *a* e *b* la nuova figura trasformata F_t avrà area $S_t = abS$. Per ottenere perciò il quadrilatero di area massima inscritto in un'ellisse della forma (1) bisogna dilatare il quadrilatero di area massima inscritto nella circonferenza (2) che come abbiamo dimostrato è un quadrato. Se vogliamo quindi conoscere le coordinate dei vertici dei quadrilateri massimi inscritti in una ellisse bisogna considerare i vertici dei quadrati iscritti in $x^2 + y^2 = 1$ e dilatarli secondo i fattori *a* e *b*.

I vertici dei quadrati inscritti in (2) sono perciò

$$A(\cos z;\text{sen}z),$$
$$B(\cos(90°+z);\ \text{sen}(90°+z)),$$
$$C(\cos(180°+z);\ \text{sen}(180°+z)),$$
$$D(\cos(270°+z);\ \text{sen}(270°+z))$$

con *z* l'angolo compreso tra *0°* e *90°* che il raggio *OA* forma con l'asse delle ascisse (immaginiamo *A* sempre nel primo quadrante), e quindi i vertici dei quadrilateri cercati sono:

$$A'(a(\cos z);b(\text{sen}z)),$$
$$B'(a\cos(90°+z);b\,\text{sen}(90°+z)),$$
$$C'(a\cos(180°+z);b\,\text{sen}(180°+z)),$$
$$D'(a\cos(270°+z);\ b\,\text{sen}(270°+z)).$$

4 ■

Jacopo Stoppa

Risolviamo dapprima il problema analogo sulla circonferenza di raggio *r* centrata nell'origine di un sistema di riferimento rettangolare. Consideriamo i raggi vettore dal centro della circonferenza ai vertici del quadrilatero inscritto. Chiamiamo $\theta_1\ \theta_2\ \theta_3\ \theta_4$ i quattro angoli compresi tra due raggi vettori adiacenti. L'area del quadrilatero è allora:

$$\frac{1}{2}\text{sen}\,\theta_1 + \frac{1}{2}\text{sen}\,\theta_2 + \frac{1}{2}\text{sen}\,\theta_3 + \frac{1}{2}\text{sen}\,\theta_4$$

Essendo $0 \leq \text{sen}\theta \leq 1$, avremo sicuramente un massimo se $\text{sen}\theta_1 = \text{sen}\theta_2 = \text{sen}\theta_3 = \text{sen}\theta_4 = 1$, il che è possibile e accade quando $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \pi/2$. Allora le diagonali del nostro quadrilatero di area massima sono perpendicolari tra loro, il che implica che si tratta di uno degli infiniti quadrati inscritti nella circonferenza. L'area massima è $2r^2$.

Viene spontaneo pensare di applicare la stessa costruzione all'ellisse. Incontriamo però un problema in quanto il modulo dei raggi vettore non è costante (l'espressione esplicita si ricava dalle equazioni parametriche dell'ellisse), quindi l'espressione da minimizzare diventa più complessa.

Aggiriamo l'ostacolo osservando che ogni ellisse è l'immagine di una qualche circonferenza sotto un'affinità *A*.

Se la nostra ellisse centrata nell'origine *O* di un sistema di riferimento rettangolare ha semiasse maggiore *a* e semiasse minore *b*, possiamo prendere come "generatrice" ad esempio la circonferenza di centro *O* e raggio *a* con l'affinità[1] corrispondente a uno schiacciamento lungo l'asse *y*.

Sappiamo del resto che le affinità trasformano le aree di un fattore costante $|D|$, con *D* determinante della matrice della trasformazione, $D(A) = b/a$. Ne segue che il rapporto tra le aree delle figure è preservato dell'affinità; dunque i quadrilateri di area massima inscritti nell'ellisse sono le immagini dei quadrati inscritti nella circonferenza corrispondente (ad esempio il rombo con i vertici nelle intersezioni dell'ellisse con gli assi coordinati). L'area massima è $2a^2|D| = 2a^2 \cdot b/a = 2ab$.

I quadrilateri di area massima sono infiniti parallelogrammi equivalenti, ma ovviamente NON tutti i parallelogrammi inscritti hanno area massima!

Osserviamo per inciso che l'area del quadrato inscritto nell'ellisse è $4a^2b^2/(a^2 + b^2) \leq 2ab$.

Infatti in quanto $a,\ b > 0$ e per la disuguaglianza tra media geometrica e quadratica. L'uguaglianza vale solo se $a = b$, ovvero se l'ellisse degenera in una circonferenza.

La prima delle due soluzioni dà esplicitamente la costruzione del quadrato nella circonferenza e dei quadrilateri nell'ellisse. È un peccato che, in conclusione, non ci sia qualche commento sulla natura dei quadrilateri trovati. Ottima anche l'altra soluzione. Utilizza però matrici e determinanti (che forse non sono patrimonio di tutti) per i quali abbiamo quindi inserito una nostra nota.

[1] Nota: la matrice

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b/a \end{pmatrix}$$

è un modo sintetico per scrivere la trasformazione

$$x = x$$
$$y = (b/a)y.$$

Questa trasformazione dilata l'area di tutte le figure di un fattore *b/a*. Quindi se l'area di un quadrato è $A=2a^2$ allora l'area della sua immagine è $(b/a)A=2ab$.

Aprile 2000

Cosa hanno in comune i seguenti due problemi?
1)Devi piastrellare un pavimento (non necessariamente rettangolare) con piastrelle tutte uguali. Scegli di farlo con poligoni regolari. Che tipi di piastrelle puoi usare: triangoli equilateri, quadrati, pentagoni, esagoni...?
2) Quali sono i rettangoli con lati interi che hanno perimetro e area uguali?
Problema tratto da [SNS]

Hanno partecipato:
Emanuele Spadaro, IIIA, LS Galilei, Catania;
Jacopo Stoppa, V sper., LS Galilei, Adria (RO).

1 ■ Jacopo Stoppa risolve in maniera completa e corretta il primo problema anche se non mostra esplicitamente che quelle che studia sono tutte le tassellazioni regolari. E` infatti implicita l'osservazione che in una tassellazione regolare, il vertice di una piastrella può trovarsi solo in due situazioni: (A) a contatto con altri vertici; (B) a contatto con altri vertici e con un lato.

Jacopo Stoppa

Per quanto riguarda la prima domanda, ci sono due risultati rilevanti.

Se α è un angolo interno di un n-gono regolare, e $2\pi/\alpha$ è un intero, allora $n = 3,4$ o 6. Ne segue che per $n = 5$, o $n \geq 7$, non esiste una piastrellatura del piano $\mathbf{R}^2$ che usa solo n-agoni regolari della stessa forma e dimensione.

Dimostrazione. La somma degli n angoli interni di un poligono regolare è $(n - 2)\pi$. Se gli angoli misurano tutti a allora $(n - 2)\pi = n\alpha$, da cui

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2n}{n-2}$$

Allora deve essere $n = 3, 4, 6$ se $2\pi/\alpha$ deve essere un intero. Ora supponiamo che il piano sia piastrellato da n-goni regolari congruenti, e consideriamo un vertice v di una di queste piastrelle. Se v è un vertice di ciascuna delle k piastrelle che lo circondano, allora $2\pi = k\alpha$, da cui k è $3, 4$ o 6 e n è, rispettivamente, $6, 4$ o 3. Se, d'altra parte, v appartiene a una piastrella T di cui v non è un vertice, e ci sono altre m piastrelle incidenti in v, allora v è un punto interno di un lato di T e segue che $\pi = m\alpha$. Ma $\alpha = \pi(n - 2)/n$ dunque $n = m(n - 2)$, il che implica che (n, m) sia $(4,2)$ o $(3,3)$.

2 ■ Anche Emanuele Spadaro, pur tralasciando il caso (B), dà una buona soluzione.

Emanuele Spadaro

Gli unici poligoni regolari con i quali è possibile piastrellare una superficie sono i triangoli equilateri, i quadrati e gli esagoni: vediamo perché. Il problema di piastrellare una superficie equivale al problema di trovare quali angoli di poligoni regolari sono sottomultipli dell'angolo giro. Bisogna trovare perciò tutte le soluzioni naturali dell'equazione

$$k\left(1-\frac{2}{n}\right)180^\circ = 360^\circ$$

cioè $k(1–2/n) = 2$ essendo $180º(1–2/n)$ la misura dell'angolo di un poligono regolare in funzione del numero di lati n. Risolvendo l'equazione rispetto a k otteniamo:

$$k = \frac{2n}{n-2}$$

cioè $k=2+4/(n–2)$. Adesso poiché k ed n sono numeri naturali positivi si nota facilmente che $4/(n–2)$ deve essere naturale e quindi n può essere uguale solamente a 3, 4, 6 cioè i poligoni regolari con cui si può piastrellare una superficie sono solo triangoli equilateri, quadrati ed esagoni.

3 ■ Quanto al secondo problema, Jacopo Stoppa ammazza le mosche con l'artiglieria pesante.

Jacopo Stoppa

Il secondo problema implica la risoluzione, in interi positivi, dell'equazione

$$xy = 2(x + y)\ , \qquad xy \in \mathbf{N}$$

L'equazione equivale al sistema simmetrico, sempre da risolvere in $\mathbf{N}$

$$xy=a$$
$$x + y = a/2$$

Come segue dal Teorema di Ruffini, le soluzioni del sistema sono quelle dell'equazione di secondo grado

$$2z^2 - az + 2a = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16a}}{4}$$

Accettiamo solo soluzioni in $\mathbf{N}$; come prima cosa il radicando deve essere un quadrato perfetto:

$$a^2 - 16a = n^2\ , \qquad n = (0,1,2, ...)$$

$$\Rightarrow a = 8 \pm \sqrt{64 + n^2}$$

Ancora, deve essere

$$64 + n^2 = k^2\ , \qquad k = (0,1,2, ...)$$

$$\Rightarrow (k + n)(k - n) = 64\ .$$

Abbiamo scelto k ed $n \geq 0$ perché compaiono al quadrato e il segno è ininfluente sulle soluzioni.

Dovendo dunque essere $k + n > k - n$ le uniche possibilità rimaste per esprimere 64 come prodotto di due fattori sono:

$$64 = 32 \times 2 = 16 \times 4 = 8 \times 8.$$

Risolvendo i corrispondenti sistemi lineari in k ed n otteniamo i
"candidati"

$$k = 17 \qquad n = 15$$
$$k = 10 \qquad n = 6$$
$$k = 8 \qquad n = 0$$

Sostituendo successivamente i valori di n trovati abbiamo i "candidati" per $a = 25$, $a = 18$, $a = 16$. Le soluzioni corrispondenti sono le coppie non ordinate $(x, y) = (10, 10/4)$, $(x, y) = (6, 3)$, $(x, y) = (4, 4)$. Le uniche soluzioni in interi sono dunque $(6, 3)$ e $(4, 4)$.

4 ■ Emanulele Spadaro invece è stato sviato dalla nostra formulazione, purtroppo ambigua, dell'enunciato, e risolve, correttamente, il seguente problema:

Esistono rettangoli non congruenti che hanno la stessa area e lo stesso perimetro?

Emanulele Spadaro

Non esistono rettangoli differenti che hanno perimetro ed area uguali. Infatti, procediamo per assurdo e supponiamo che esistano due rettangoli con uguale area e perimetro: si avrà perciò $xy = k$ e $(x-a)(y+a)=k$ con $x \geq y$, avendo i due fattori somma e prodotto uguali. Eseguiamo i calcoli della seconda relazione: si ha che $xy+ax-ay-a^2 = k$, per cui essendo $xy=k$ si ha che $a(x-y-a)=0$; quindi, o a è uguale a zero (e in questo caso i due rettangoli sono congruenti), o $x - y - a = 0$ cioè $x = y + a$ e $y = x - a$ caso in cui le dimensioni del rettangolo sono invertite (restando il rettangolo sempre congruente). Quindi partendo dall'ipotesi che esistono due rettangoli diversi con area e perimetro uguali si giunge alla conclusione che sono congruenti, che è chiaramente un assurdo: e da qui è dimostrata la nostra tesi.

Per quanto riguarda la connessione tra i due problemi (ristretta al solo caso (A)) citiamo la risposta del professor Tino Visigalli che ha partecipato, per divertimento:

Ogni angolo interno di un poligono regolare di n lati misura $(n - 2)/n$ angoli piatti. Perchè un pavimento sia ricoperto perfettamente da mattonelle a forma di poligono regolare è necessario che un numero intero (diciamo k) di angoli interni copra esattamente un angolo giro. Ciò significa che, se p denota un angolo piatto, $kp(n - 2)/n = 2p$. Semplificando, l'equazione conduce a $kn = 2(k + n)$. Quest'ultima è esattamente l'equazione che si trova se si vuole che l'area di un rettangolo di lati k ed n sia uguale al suo perimetro. Per trovare le soluzioni intere e positive dell'equazione si può ragionare così: trovo $k = 2n/(n - 2)$ e riporto in un grafico k in funzione di n. Si trova facilmente che le uniche tre soluzioni a componenti intere dell'equazione sono: $(6,3)$, $(4,4)$, $(3,6)$.

Maggio 2000

Quale forma deve avere un polinomio *P* affinché:
$1 - x^4 \le P(x) \le 1 + x^4$?

Problema tratto da [SNS]

Non sono pervenute risposte, pertanto presentiamo due nostre soluzioni.

Soluzione 1. Se fai la sostituzione

$$A(x) = P(x) - 1$$

il polinomio A soddisfa le due condizioni

$$x^4 \le A(x) \le x^4$$

e $A(0) = 0$.

In particolare la seconda è equivalente a scrivere A come

$$A(x) = xB(x) .$$

Allora B verifica le disuguaglianze

$$-x^3 \le B(x) \le x^3 .$$

Da queste segue che $B(0) = 0$ cioè

$$B(x) = x\,C(x) .$$

Ripetendo questo ragionamento ottieni

$$A(x) = x^4\,D(x)$$

e D deve essere costante. Pertanto si ha $P(x) = ax^4 + 1$ con a compreso tra -1 e 1.

Soluzione 2. Sostituendo nella diseguaglianza il valore 0 ottieni che $P(0) = 1$ il che significa che il termine noto è 1. Se ora dividi tutto per x^4 e calcoli il limite all'infinito, ottieni

$$-1 \le \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^4} = \le 1$$

Quindi il grado di P è al massimo 4, altrimenti il limite non sarebbe finito. Con queste informazioni, P si scrive come

$$P(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + dx + 1 .$$

Se ora calcoli che

$$\frac{P(x)}{x^4} = a + \frac{bx^3 + cx^2 + dx + 1}{x^4}$$

ottieni la diseguaglianza equivalente

$$-1 \le a + \frac{bx^3 + cx^2 + dx + 1}{x^4} \le 1$$

Facendo il limite per x che tende a 0 della frazione, hai che

$$\lim_{x\to 0} \frac{bx^3 + cx^2 + dx + 1}{x^4} = \pm\infty$$

dove il segno è dato da quello di b, il che è assurdo, per cui deve essere $b = 0$. Analogamente si prova che sono nulli anche c e d. Pertanto P è della forma $P(x) = ax^4 + 1$ con a compreso tra -1 e 1.

L'IRRSAE dell'Emilia-Romagna, valendosi dell'apporto di operatori interni e di collaboratori esterni all'Istituto, ha proposto questo servizio in rete rivolto a docenti, alunni e appassionati che si interessano di matematica.
Il servizio, promosso nell'anno scolastico 1999/2000, e giunto al suo secondo anno, ha visto l'adesione di studenti di tutto il triennio superiore. Tutto il progetto è in linea con le direttive della C.M. 270 (Prot. N. 2475) del 12 novembre 1999, denominata progetto SeT (Progetto speciale per l'Educazione Scientifica e Tecnologica).

Nel presente volumetto il resoconto del primo anno di attività.

I.R.R.S.A.E. Emilia Romagna - Sezione Scuola Media

Supplemento al n. 2 marzo - aprile 2001, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento Educativi dell'Emilia Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Luciano Lelli, proprietà IRRSAE - Emilia-Romagna.