quaderni di CABRIRRSAE

Presentazione a cura di:
Giuliana Bettini e Franca Noè

FLAT*landia*

anno III

geometria on-line
nella scuola secondaria

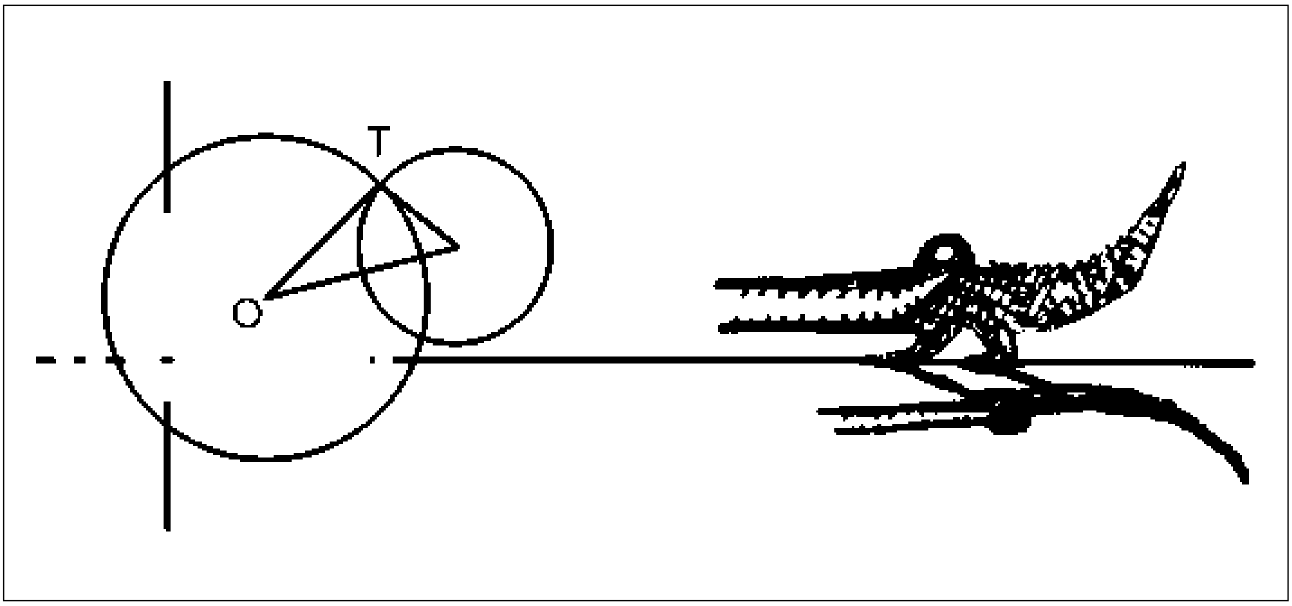
n°
18

Giuliana Bettini, laureata in matematica, ha partecipato all'esperienza, fa parte della redazione del bollettino CABRI*RRSAE* e collabora con l'I.R.R.S.A.E. - E.R. in attività legate alla utilizzazione del software CABRI.

Franca Noè, insegnante di matematica, distaccata presso l'I.R.R.S.A.E. - E.R., fa parte della redazione del bollettino CABRI*RRSAE* e partecipa da alcuni anni con l'I.R.R.S.A.E. - E.R. ad attività legate alla utilizzazione del software CABRI.

Released Information

Videoimpaginazione GRAPHICART - Via Fondazza, 37 - Tel. Fax (051) 30.70.73 - 40125 BOLOGNA



FLAT*landia*

anno III

geometria on-line nella scuola secondaria

Indice

FLAT*landia*

E' un'attività dell'IRRSAE Emilia-Romagna rivolta in modo particolare agli alunni del terzo anno della Scuola Media Inferiore e del biennio della Scuola Secondaria Superiore.
Ogni mese viene chiesto ai ragazzi di risolvere un problema di geometria. Entro lo stesso mese vengono valutate le risposte pervenute e vengono segnalate quelle ritenute meritevoli.
Testo e soluzioni sono inviati usando esclusivamente collegamenti telematici.

Un po' di storia

I problemi raccolti in questo quaderno testimoniano il terzo anno di attività dell'iniziativa. Flatlandia, nata come supporto alla lista di discussione Cabrinews, gode ormai di una sua vita autonoma ed ha un piccolo pubblico di affezionati.
Se infatti nel primo anno le scuole partecipanti erano 21 e nel secondo erano 30, quest'anno esse hanno raggiunto la quota di 37.
Interessante la partecipazione, talvolta, anche se limitata alla sola costruzione e descrizione delle figure, di una scuola elementare che si è voluta cimentare in questo "gioco", rivolto principalmente a ragazzi più grandi.

Il progetto

E' gestito da un comitato composto da insegnanti di scuola secondaria, da un docente universitario e da un tecnico informatico. Come negli anni passati, il problema proposto mensilmente richiede di solito una costruzione ed una dimostrazione.
La costruzione può essere eseguita con strumenti tradizionali o con l'aiuto di software dedicati all'insegnamento della geometria (oggi sempre più presenti sul mercato); la dimostrazione può talvolta mancare, ad esempio nel caso di classi elementari o medie.
L'intento è quello di coinvolgere gli alunni in una attività che richiede sì conoscenze, ma anche fantasia, creatività, immaginazione.
In questo momento di forti cambiamenti nell'assetto dei curricoli, e di auspicio di utilizzo di nuove tecnologie nell'insegnamento/apprendimento di varie discipline, FLATlandia si propone come attività al passo coi tempi, senza nulla concedere all'improvvisazione e al pressapochismo.
I problemi proposti richiedono, per essere risolti, sicure competenze e conoscenze matematiche; sollecitano, come già detto, fantasia e creatività, che sono gli aspetti forse più caratteristici di questa disciplina. Qualora vengano utilizzati software, è necessario averne una conoscenza abbastanza approfondita. Per spedire i materiali in forma adeguata (testo e figure) bisogna padroneggiare discretamente le tecnologie informatiche. Ed anche in una attività di questo genere, che sembra così fortemente orientata al solo mondo matematico, appare fondamentale padroneggiare bene la lingua italiana. Può infatti avere interesse notare, giunti oramai al quarto anno di attività (anno scolastico 2000 - 2001), questo fatto: è stato segnalato da parte di ragazzi di un Istituto tecnico che spesso, nella scelta delle risposte migliori e più complete, da rispedire a tutti i partecipanti, la redazione di FLATlandia opta per i testi scritti da alunni dei licei. Il gruppo redazionale si è interrogato su questo fatto, ha revisionato vari materiali, ed ha raggiunto questa conclusione: statisticamente parlando, appare evidente che i ragazzi dei licei spesso sanno porgere le loro soluzioni in modo più corretto, più semplice e più chiaro. E questo probabilmente perché questi ragazzi sembrano padroneggiare meglio la lingua italiana.
La partecipazione a FLATlandia può quindi essere anche un incentivo, per i ragazzi, a migliorare le loro capacità di argomentazione e di esposizione.

Come partecipare

I problemi sono inviati alla lista di discussione Cabrinews (cabrinews@arci01.bo.cnr.it) il primo lunedì di ogni mese, da ottobre a maggio, oppure sono consultabili in rete negli archivi del progetto all'indirizzo:
http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/.
Gli alunni possono partecipare singolarmente, per gruppi, o inviando un'unica soluzione a nome di tutta la classe.
Le soluzioni dovranno pervenire entro il terzo lunedì del mese, al seguente indirizzo di posta elettronica: flat@arci01.bo.cnr.it, inserendo nel mail il nome, la classe e il nominativo dell'Istituto.
Se la scuola non è ancora iscritta a Cabrinews, è sufficiente che mandi il seguente messaggio:

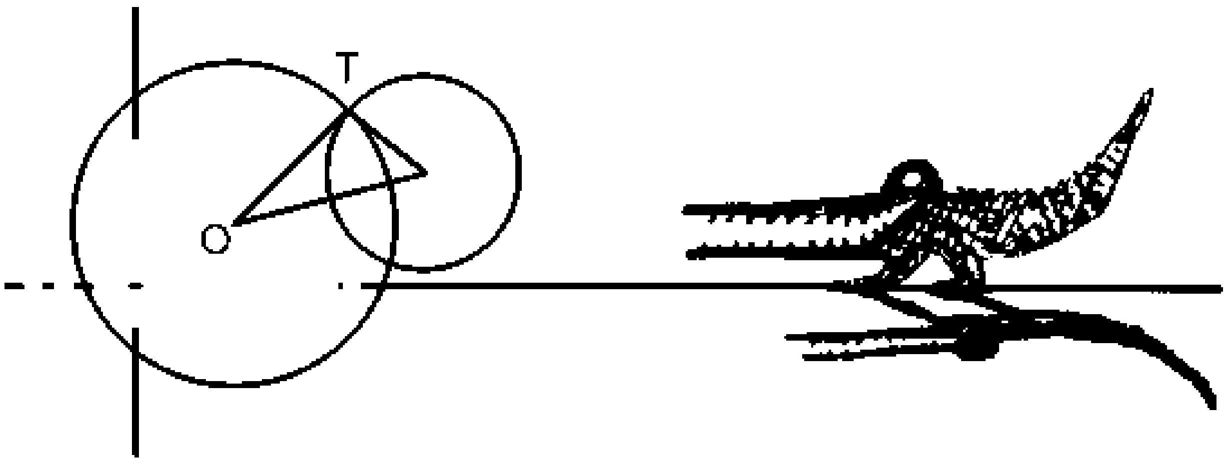
subscribe cabrinews, al seguente indirizzo:
listserv@arci01.bo.cnr.it

Ulteriori informazioni

Le soluzioni possono essere scritte o direttamente nel messaggio di posta elettronica o in un file in formato Word, inviato in allegato. Se si vuole allegare un disegno deve essere inviato o in formato Cabri-géomètre per MS-DOS o per Windows, altrimenti in formato Word.
Per coloro che fossero eventualmente interessati, segnaliamo che è stata attivata, da più di un anno, una iniziativa analoga a FLATlandia, che tratta più in generale di matematica (e non solo di geometria) e che è rivolta in modo particolare a ragazzi del triennio delle superiori.
L'attività si chiama **probleMATEMATICAmente**.
Per maggiori informazioni consultare il sito:

http://kidslink.bo.cnr.it/fardiconto

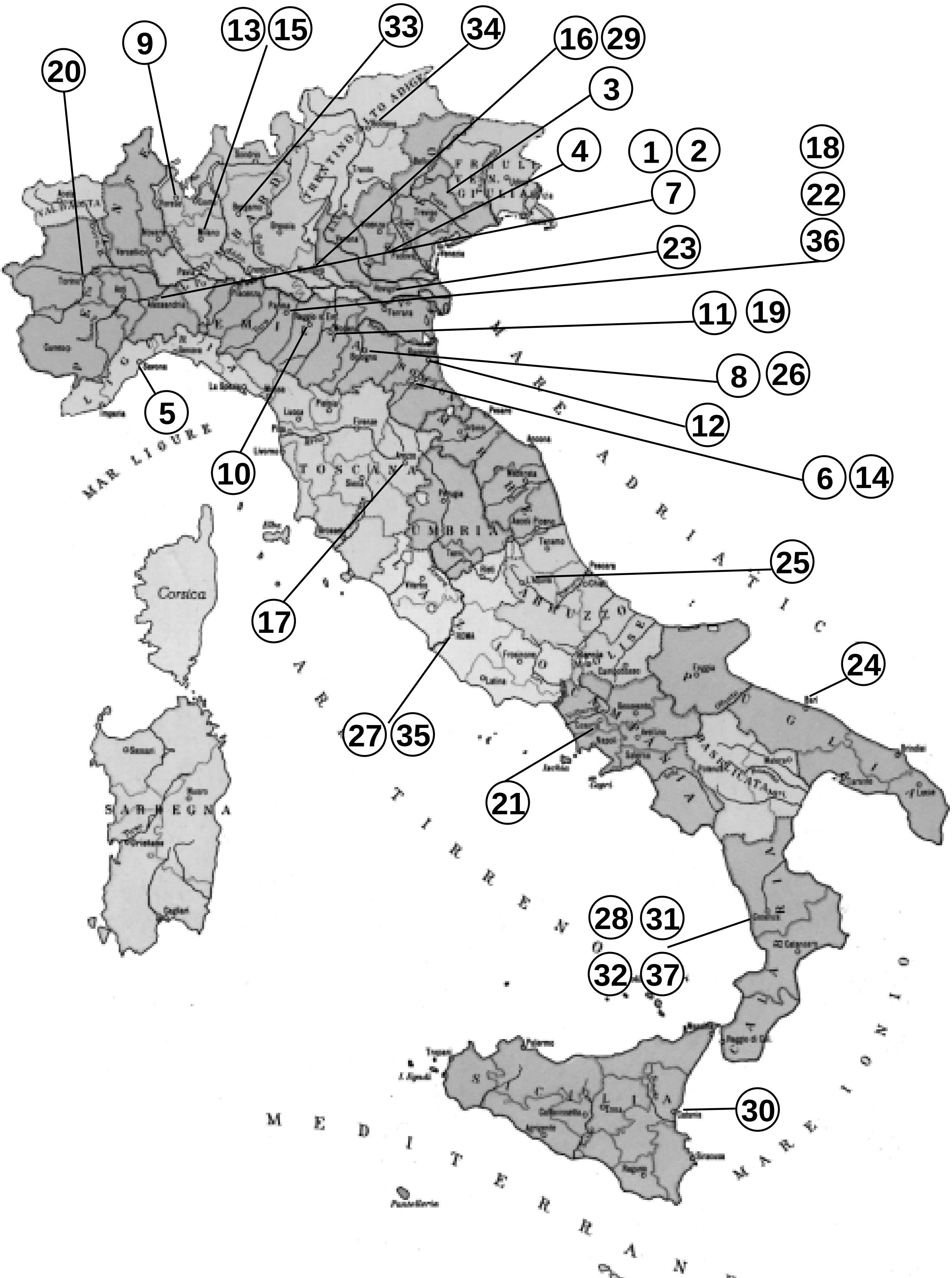
Anna Maria Arpinati



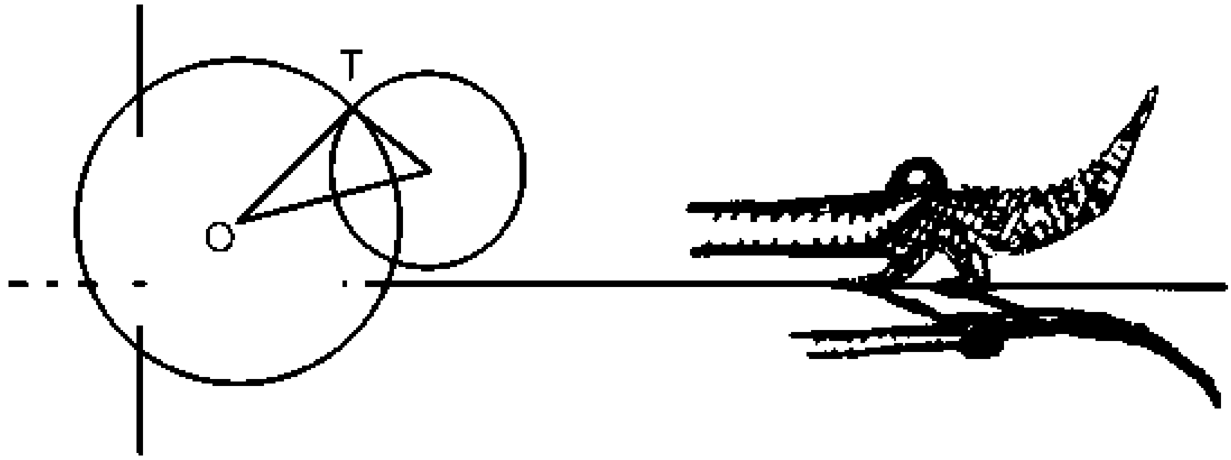
FLATlandia

Attività 1999-2000

Mappa delle scuole che hanno partecipato



		Scuola	Frequenza							
			O	N	D	G	F	M	A	M
ELEM	1	"G.Galilei", 2°Circolo di Alessandria (AL)	◆	◆	◆					◆
MEDIE INFERIORI	2	"Vochieri", Alessandria (AL)	◆	◆						
	3	Scuola Media di Roveredo in Piano (PN)	◆	◆	◆				◆	◆
	4	"Don Bosco", Padova (PD)		◆						
	5	"Martini", Pietra Ligure (SV)		◆						
	6	"Zangheri", Forlì (FC)		◆						
	7	"Luca Valenziano", Tortona (AL)		◆	◆		◆	◆		
	8	"Cerreta", Bologna (BO)			◆	◆				◆
	9	"Bellotti", Busto Arsizio (VA)			◆		◆	◆		
	10	"Marco Polo", Rolo (RE)				◆				
	11	"Graziosi", Savignano sul Panaro (MO)				◆				
	12	"G. Pascoli", Castel Bolognese (RA)						◆	◆	
ISTITUTI TECNICI e PROFESSIONALI	13	ITI, LST "Cesaris", Casalpusterlengo (LO)	◆	◆		◆				
	14	IPSAAR "P. Artusi", Forlimpopoli (FC)	◆							
	15	ITI "Cartesio", Cinisello Balsamo (MI)		◆			◆			
	16	ITI "E.Fermi", Mantova (MN)			◆	◆	◆	◆		
	17	ITI "G. Ferraris", S.Giovanni Valdarno (AR)			◆	◆	◆		◆	
	18	ITI, LST "Berenini", Fidenza (PR)				◆	◆	◆	◆	◆
	19	ITAS "Calvi", Finale Emilia (MO)				◆				
	20	ITI "E. Ferrari", Torino (TO)						◆	◆	◆
	21	ITG "M. Buonarroti", Caserta (CE)							◆	◆
	22	ITG "Rondani", Parma (PR)								◆
LICEI SCIENTIFICI e GINNASI	23	LS "G.Galilei", Adria (RO)	◆				◆			◆
	24	LS "G.Galilei", Bitonto (BA)	◆	◆	◆	◆	◆	◆	◆	
	25	LS "A. Bafile," L'Aquila (AQ)	◆				◆			
	26	LS "Sabin", Bologna (BO)	◆	◆			◆			
	27	LS "F. d'Assisi", Roma (RM)	◆	◆						
	28	LS "Pitagora", Rende (CS)	◆	◆	◆	◆	◆		◆	
	29	LS "Falcone", Asola (MN)	◆		◆	◆	◆	◆		
	30	LS "G.Galilei", Catania (CT)		◆		◆	◆	◆	◆	◆
	31	Liceo Scientifico di Acri (CS)		◆	◆		◆			
	32	LS "Scorza", Cosenza (CS)		◆	◆					
	33	LG "S. Weil", Treviglio (BG)		◆	◆	◆	◆			◆
	34	LS "B.Pascal", Merano (BZ)			◆					
	35	LG "Orazio", Roma (RM)					◆			
	36	LS "G. Ulivi", Parma (PR)					◆			
	37	LS "Patrizi", Cariati (CS)							◆	

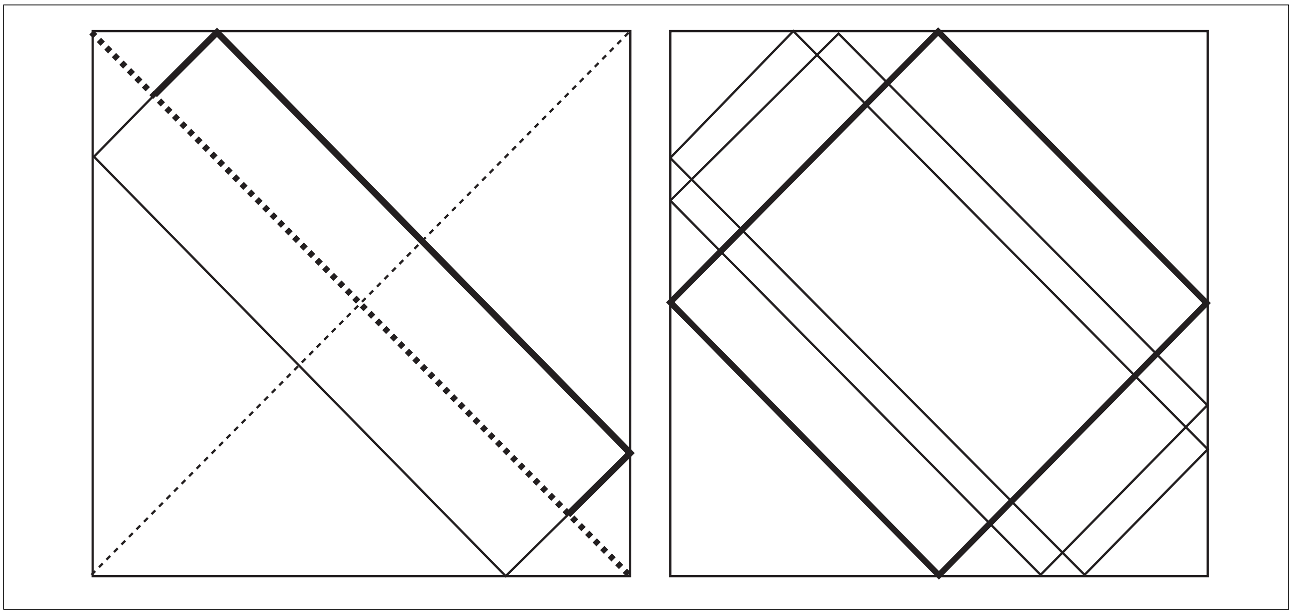


FLAT*landia*

Problemi e soluzioni

4 - 18 Ottobre 1999

Dato un quadrato, costruire un rettangolo in esso inscritto con i lati paralleli alle diagonali del quadrato.
Consideriamo ora la famiglia dei rettangoli aventi le caratteristiche richieste:
a) qual è la relazione fra i loro perimetri?
b) qual è il rettangolo di area massima? qual è il rapporto fra la sua area e quella del quadrato assegnato?
Motivare le risposte



Commento

Il problema proponeva innanzi tutto di determinare una costruzione che, anche se semplice, doveva essere descritta. Seguivano poi due quesiti e il calcolo di un rapporto.
Pochi hanno descritto la costruzione e non tutti hanno motivato le risposte ai quesiti. Le soluzioni inviate dagli allievi di scuola elementare e di scuole medie, anche se carenti nelle giustificazioni, testimoniano comunque un lodevole impegno.
Fra le risposte giunte dalle scuole superiori alcune non sono accettabili per la completa mancanza di giustificazioni (una di esse inoltre esamina solo casi particolari).
Anche fra le soluzioni considerate “accettabili” si riscontrano comunque imprecisioni e carenze di vario tipo.
Si rendono necessarie alcune osservazioni:

- risolvere un problema utilizzando proprietà che “si vedono dalla figura”, senza una adeguata giustificazione, è tollerato per gli allievi delle elementare o medie inferiori, **NON** per quelli delle superiori!
- nel corso di una costruzione o di una dimostrazione è bene precisare le proprietà che vengono utilizzate anche se sono note a tutti come accade per le più comuni proprietà del quadrato;
- la “congruenza” è una relazione fra le figure, **NON** fra i perimetri;
- è bene usare i simboli matematici (“=”, “>”, “//”, ...) solo nelle formule e non come simboli stenografici nei commenti e nelle giustificazioni.

Le scuole che hanno partecipato sono:

SE “G.Galilei”, 2°Circolo di Alessandria (AL)
SM “Vochieri”, Alessandria (AL)
Scuola Media di Roveredo in Piano (PN)
ITI “Cesaris”, Casalpusterlengo (LO)
IPSAAR “P. Artusi”, Forlimpopoli (FC)
LS “G.Galilei”, Adria (RO)
LS “G.Galilei”, Bitonto (BA)
LS “A. Bafile,” L’Aquila (AQ)

LS “Sabin”, Bologna (BO)
LS “F. d’Assisi”, Roma (RM)
LS “Pitagora”, Cosenza (CS)
LS “Falcone”, Asola (MN)

Per il mese di ottobre sono state scelte le soluzioni delle seguenti scuole:

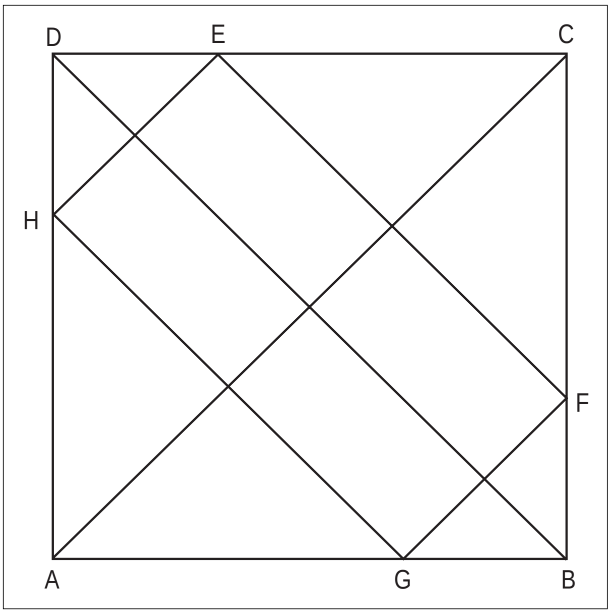
1. LS “F. d’Assisi” di Roma;
2. IPSSAR “P.Artusi” di Forlimpopoli; (pubblichiamo solo la seconda parte)
3. SM di Roveredo (con animazioni Cabrijava)
4. LS “G.Galilei” di Bitonto.

NOTA: Come consuetudine nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre.

Soluzioni

Classe 2B
Liceo Sc. “Francesco d’Assisi” ROMA

Per prima cosa abbiamo costruito un quadrato di lato qualsiasi e le sue diagonali; considerato un punto su un lato (per es. il punto E sul lato CD) abbiamo condotto da esso le parallele alle diagonali e quindi con la simmetria assiale abbiamo costruito tutti i lati del rettangolo inscritto.
Poiché il punto E è il primo punto della costruzione del rettangolo, muovendolo sul lato CD, tutto il rettangolo si muove solidalmente e si possono osservare i vari elementi della famiglia di rettangoli.



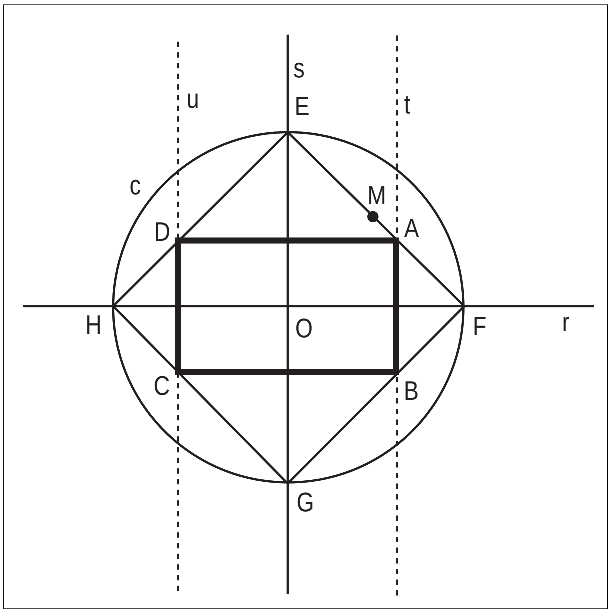
Misurando il lato del quadrato e il perimetro di alcuni rettangoli abbiamo notato che il perimetro si mantiene costante e uguale al doppio della diagonale del quadrato; abbiamo intuito anche che l’area massima è quella del quadrato inscritto che è la metà di quella del quadrato dato.
Ognuno di noi aveva misure differenti per il lato del quadrato però siamo arrivati tutti alle stesse congetture che abbiamo poi verificato in questo modo:
abbiamo indicato con x il segmento DE e con a-x il segmento EC (essendo a il lato del quadrato)
quindi $HE = x\sqrt{2}$ ed $EF = (a-x)\sqrt{2}$ per cui il perimetro del rettangolo sarà:
$2(HE + EF) = 2 (x\sqrt{2} + a\sqrt{2} - x\sqrt{2}) = 2a\sqrt{2}$ che è il doppio della diagonale del quadrato.
L’area del rettangolo sarà data dal prodotto $HE*EF = x\sqrt{2}(a-x)\sqrt{2} = 2ax-2x^2$.
Chiamando l’area y abbiamo ottenuto la funzione di 2° grado $y=-2x^2+2ax$ che è una parabola passante per l’origine e con la concavità rivolta verso il basso; tale funzione oltre che per $x=0$ si annulla anche per $x=a$ e assume il valore massimo nel suo vertice e cioè per $x=a/2$.
Tale valore corrisponde alla posizione di E equidistante da C e da D e quindi EH=EF.
Per $x=a/2$ inoltre il valore che l’area assume è $y=a^2/2$, cioè la metà dell’area del quadrato iniziale.

Staniscia Francesco e Persano Cesano
Classe 2B
IPSSAR “P.Artusi” di Forlimpopoli;

a) […]

b) Il rettangolo di area massima è il quadrato, la cui area è $l^2/2$.
In un rettangolo la somma fra la base e l’altezza dà il semiperimetro e quindi tale somma, nel rettangolo EFGH vale $l\sqrt{2}$. Indicando con $(l/2)\sqrt{2}+x$ (con x strettamente compreso fra $(-l/2)\sqrt{2}$ e $(+l/2)\sqrt{2}$ la misura della base avremo che l’altezza misura $(l/2)\sqrt{2}-x$ e l’area risulta $l^2/2-x^2$. L’area sarà pertanto massima quando x vale 0 cioè quando il rettangolo diventa un quadrato e in tale caso risulta $l^2/2$, vale a dire la metà di quella del quadrato ABCD.

Classe 2A
Scuola Media di Roveredo di Piano (PN).



COSTRUZIONE:
1. circonferenza c di centro O;
2. retta r passante per O;
3. retta s perpendicolare ad r e passante per O;
4. intersezioni della circonferenza c con le rette r ed s (E, F, G, H);
5. poligono (quadrato) EFGH;
6. punto A sul lato EF (sovrapposto segmento EF per esigenze di animazione);
7. parallela t alla retta s [passante per A];
8. retta u simmetrica di t rispetto la retta s;
9. intersezioni delle rette u e t con il quadrato EFGH;
10. poligono (rettangolo) ABCD;
11. punto medio M del segmento EF;

IL PUNTO DI ANIMAZIONE E' IN A SUL SEGMENTO EF.

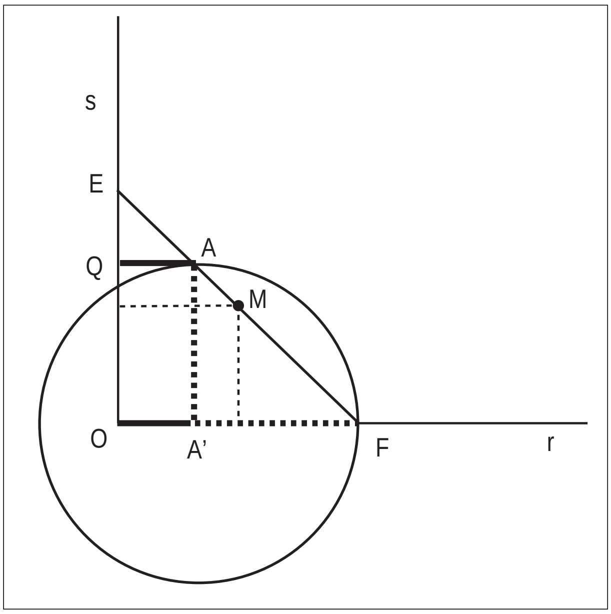
RISPOSTE:
a) I rettangoli che si ottengono animando [o TRASCINANDO: l'animazione è presente solo in Cabri II] A sul segmento EF sono ISOPERIMETRICI.
b) Il rettangolo di area massima si ottiene quando A coincide con M, cioè quando il rettangolo si fa quadrato.
2. L'area del quadrato EFGH è doppia dell'area del quadrato ABCD.

Classi 3A
Scuola Media di Roveredo di Piano (PN).

COSTRUZIONE PER OTTENERE RETTANGOLI ISOPERIMETRICI:
1. due semirette (r, s) perpendicolari con la stessa origine in O;
2. segmento OF [su r];
3. segmenti OA' ed A'F [su r];
4. parallela ad s passante per A';
5. circonferenza con centro in A' passante per A'F,
6. punto A (intersezione della circonferenza con la parallela ad s [passante per...]); [segmenti A'A ed AQ (utilizzando una perpendicolare ad s)]

IL PUNTO DI ANIMAZIONE E' IN A' SUL SEGMENTO OF.

7. luogo del punto A animando A' (EF);
8. segmento EF e suo punto medio M. I rettangoli (OQAA') che si generano sono isoperimetrici essendo la somma dei lati, OA', AA' costante (=OF);



b)
1. L'area massima la si ottiene quando il rettangolo si fa quadrato (A coincide con il punto medio del segmento EF).
2. Quando A si trova in M il poligono OQAA' è quadrato ed i triangoli rettangoli (per costruzione) AA'F ed EQA sono isosceli con i cateti congruenti ai lati del quadrato.
La somma delle aree dei due triangoli equivale all'area del quadrato, quindi: Area OEF = 2 Area OQAA'.
Il ragionamento si trasferisce sulla prima costruzione (della 2A): L'area del quadrato EFGH è doppia dell'area del quadrato ABCD (A coincide con M).

Seconde classi
Liceo scientifico "G. Galilei" Bitonto

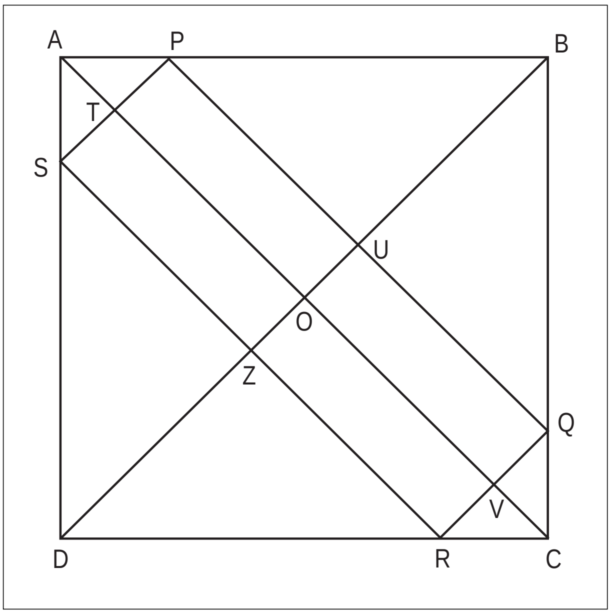
Parte a)

Costruito [manca la descrizione] il quadrato ABCD e il rettangolo PQRS [con P su AB] in esso inscritto con i lati paralleli alle diagonali, si ha che:

PBU [i punti U,V,Z,T sono rispettivamente le intersezioni dei lati del rettangolo con le diagonali del quadrato] è un triangolo rettangolo isoscele, poiché in un quadrato le diagonali sono bisettrici degli angoli e sono perpendicolari fra loro e quindi PUB = 90° e PU = BU.

Analogamente APT è rettangolo isoscele e quindi PT = AT.

In un quadrato le diagonali sono assi di simmetria, pertanto anche BU = PU = QU = SZ = RZ, AT = PT = ST = QV = VR. Da ciò segue che il perimetro del rettangolo è congruente alla somma delle diagonali del quadrato, qualunque sia il rettangolo al variare di P su AB. Vale a dire che tutti i rettangoli inscritti sono isoperimetrici.

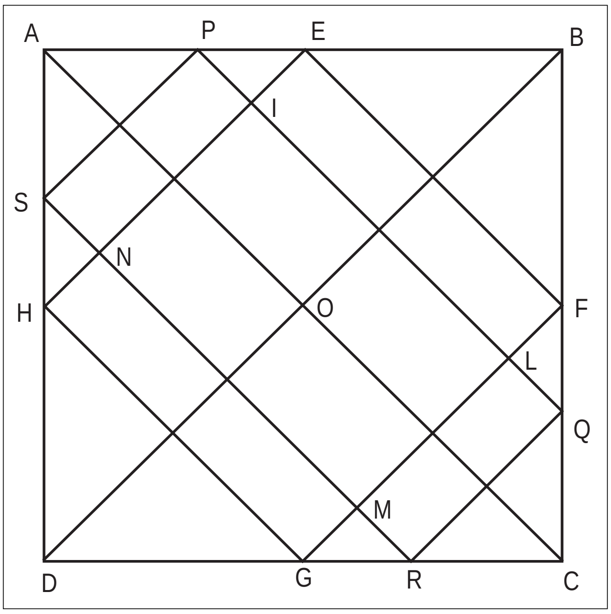


Parte b)

Nel quadrato ABCD viene inscritto ulteriormente il quadrato EFGH [con E su AB]. Il quadrato EFGH ha area maggiore di un qualsiasi rettangolo PQRS, infatti:

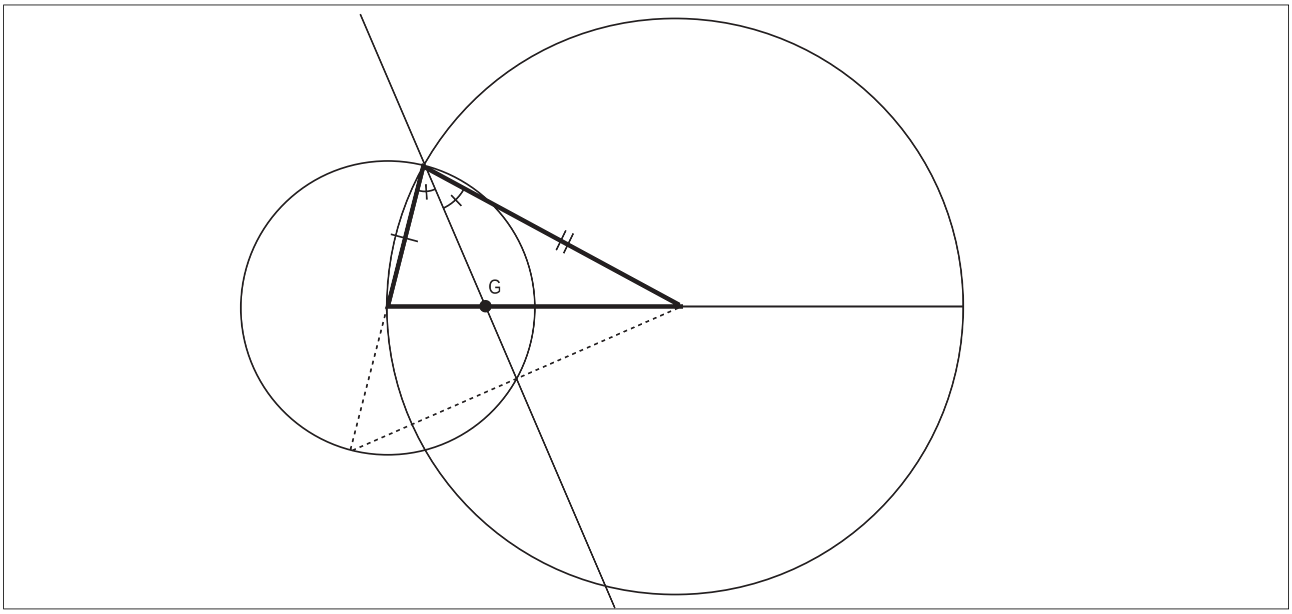
il rettangolo ILMN [i punti I, L, M, N sono rispettivamente le intersezioni dei lati del rettangolo con i lati del quadrato inscritto] è in comune ed EILF > LQRM, avendo altezze congruenti FL = LQ e [EF =] FG > QR (QR contenuto in FG). Quindi l'area di EFLI è maggiore di quella di LQRM e, per simmetria [LA SIMMETRIA DI ...], la tesi.

L'area del quadrato inscritto è un mezzo di quello assegnato, poiché EF = AC/2, essendo la congiungente i punti medi dei lati del triangolo ABC e quindi l'area di EFGH = EF^2 = $(AC^2)/4$, mentre l'area di ABCD = $(AC^2)/2$.



2 - 16 Novembre 1999

a) Costruire un triangolo isoscele la cui base sia metà del lato. Motivare la costruzione.
b) Dimostrare (ricorrendo eventualmente ad una opportuna costruzione) che la bisettrice di un angolo alla base del suddetto triangolo taglia il lato opposto in due parti una doppia dell'altra.
Nota: gli allievi della scuola media inferiore non sono tenuti a rispondere alla parte b).



Commento

Per il problema di Novembre 1999 abbiamo ricevuto ventitré risposte provenienti da dieci scuole superiori, sei scuole medie, una scuola elementare; due risposte non forniscono indicazioni sulla scuola e/o sulla classe.
Il problema proposto richiedeva a tutti la costruzione di un particolare triangolo isoscele e ai ragazzi delle superiori la dimostrazione di una sua proprietà. Abbiamo ricevuto due risposte complete anche da due scuola medie inferiori, la "Don Bosco" di Padova e la Scuola Media di Roveredo; ci complimentiamo con loro.
Un ragazzo della scuola media "Vochieri" di Alessandria ha fatto una costruzione secondo una congettura che non ha giustificato: abbiamo pensato di proporla ugualmente, perché può essere interessante per gli altri trovarne la dimostrazione. Ricordiamo ai ragazzi delle scuole medie che le costruzioni richieste vanno sempre giustificate, anche se appaiono "evidenti". Ricordiamo anche che due circonferenze secanti o una circonferenza e una retta secante, hanno due punti in comune ed è corretto citarli entrambi.
Fra le risposte inviate dai ragazzi delle superiori tre non sono accettabili perché presentano gravi imprecisioni o incompletezze nella seconda parte. Le risposte con indicazioni incomplete non verranno riportate anche se corrette.
Un'ottima soluzione è giunta da una classe terza liceo scientifico di Roma: l'abbiamo valutata ma non verrà presentata essendo *FLATlandia* un'attività rivolta ai ragazzi del biennio di scuola superiore.
Fra le soluzioni accolte si evidenziano ben cinque tipi di dimostrazioni, svolte tutte in modo sostanzialmente corretto nel contenuto. Questo ci mette nell'imbarazzo della scelta di quelle da presentare.
Abbiamo adottato, quando possibile, il criterio di scegliere le risposte delle scuole "nuove" per dar loro il benvenuto nel mondo di *FLATlandia* e di citare quelle analoghe.
Per quanto riguarda la forma, RIBADIAMO di attenersi alle istruzioni indicate nella premessa ad ogni problema.

Le scuole che hanno partecipato sono:
- SE "G.Galilei", 2°Circolo di Alessandria (AL)
- SM "Vochieri", Alessandria (AL)
- Scuola Media di Roveredo in Piano (PN)
- SM "Don Bosco", Padova (PD)

SM “Martini”, Pietra Ligure (SV)
SM “Zangheri”, Forli’ (FC)
SM “Luca Valenziano” Tortona (AL)
ITI “Cesaris”, Casalpusterlengo (LO)
ITI “Cartesio” Cinisello Balsamo (MI)
LS “G.Galilei”, Catania (CT)
LS “G.Galilei”, Bitonto (BA)
LS “Sabin”, Bologna (BO)
LS “F. d’Assisi”, Roma (RM)
LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS di Acri (CS)
LS “Scorza” Cosenza (CS)
LG “S. Weil” Treviglio (BG)

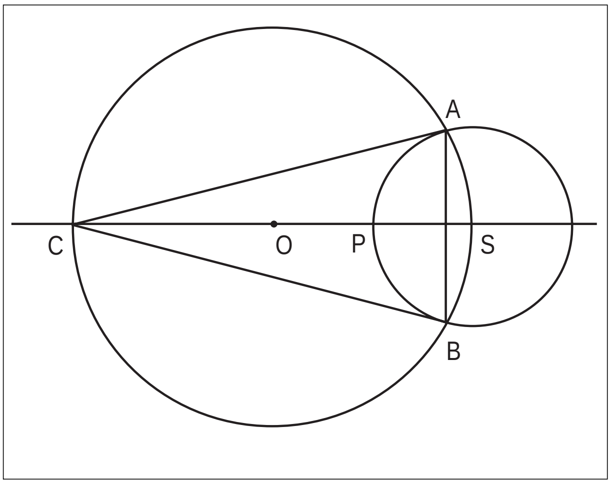
Riportiamo qui di seguito:

1. la costruzione della scuola media “Vochieri”;
2. la soluzione della Scuola Media “Don Bosco” (analoga a quelle inviate da ITI “Cesaris, dal liceo di Acri e da altre scuole già menzionate);
3. la soluzione del liceo scientifico “G. Galilei” di Catania.
4. la soluzione della 5B liceo classico “S.Weil” (simile a quella della 5A);
5. la soluzione della 2A ITI “Cartesio” (analoga a quelle dei licei “Pitagora” e “Scorza”);
6. la soluzione del gruppo seconde classi LS “G.Galilei” di Bitonto (inviata anche dalla 2F del liceo “Assisi”).

NOTA: Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre.

Soluzioni

Alessio Miceli
Scuola Media “A.Vochieri” - Alessandria

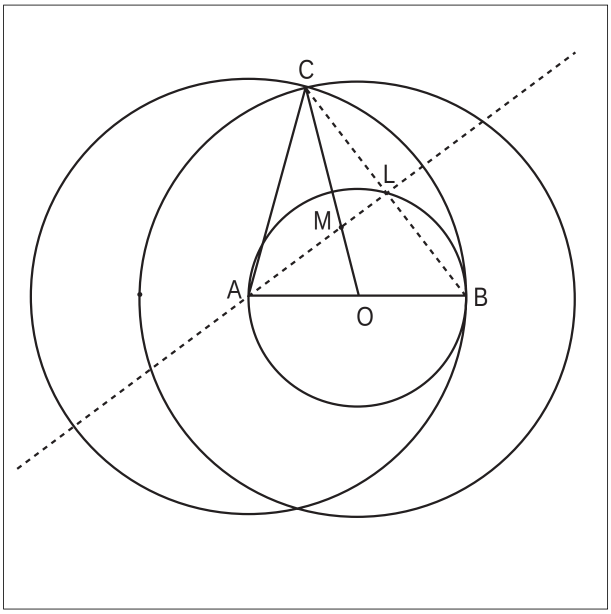


Ho costruito il triangolo isoscele con la base uguale a un mezzo del lato in questo modo:
Circonferenza raggio OS
Punto medio P del raggio
Circonferenza di raggio SP
Punti di intersezione A-B tra le due circonferenze
Retta per OS
Punto di intersezione C tra la retta e la circonferenza
Triangolo ABC
Ho fatto questa costruzione sulla base di questo ragionamento:
Per costruire un triangolo equilatero (base congruente con i lati) devo [posso] intersecare due circonferenze che hanno lo stesso raggio, quindi per ottenere un triangolo con la base uguale a un mezzo del lato devo [posso] dimezzare il raggio di una circonferenza. Ho controllato le misure con “Distanza e lunghezza” e ho verificato che corrispondevano all’ipotesi da verificare.

Acazi Martina e Manci Mariachiara
Scuola Media “Don Bosco” - Padova
Classe 2A

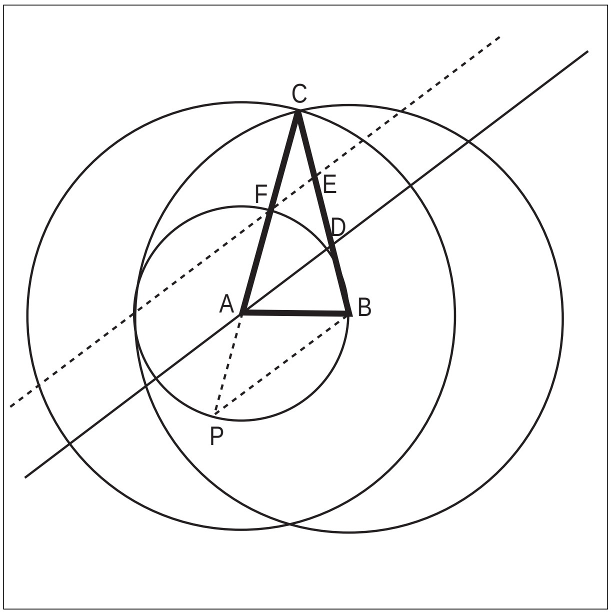
a) Traccio una circonferenza con centro O e un suo diametro AB, quindi una retta passante per O. Traccio il segmento AO, raggio della circonferenza e base del triangolo isoscele.
Punto il compasso in A e traccio un archetto con apertura AB. Ripeto puntando il compasso in O. Chiamo C il punto d’incontro degli archetti. Il triangolo AOC risulta essere isoscele perché i suoi due lati AC e OC risultano congruenti al diametro AB (AB = 2AO).

b) Traccio la bisettrice dell'angolo A, chiamo M il punto d'incontro di questa con il lato CO. Traccio il segmento CB e considero il triangolo ABC: esso risulta isoscele, poiché AB = AC. Chiamo L il punto d'incontro tra la bisettrice e il lato CB: Poiché il triangolo ABC è isoscele e CB è la sua base, AL oltre che bisettrice risulta essere anche mediana rispetto al lato CB.
Anche CO è mediana rispetto al lato AB, per quando già detto prima. Il punto M è dunque il baricentro del triangolo, un punto notevole dei triangoli che ha la proprietà di dividere le mediane in due parti una doppia dell'altra.
Quindi CM = 2MO.



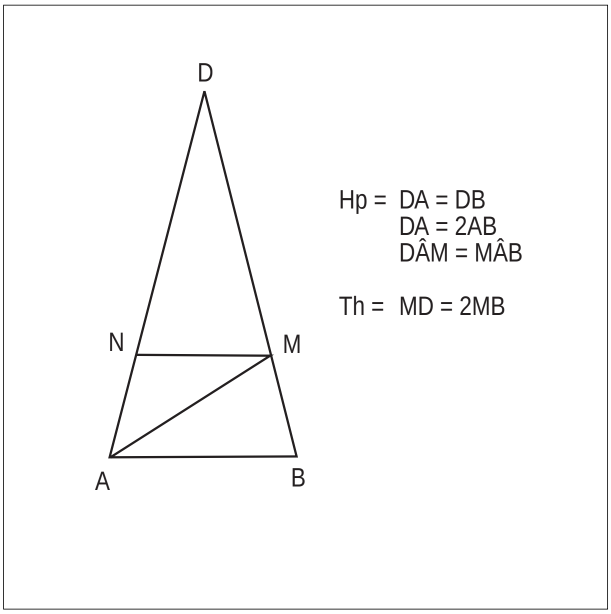
Urzì Daniele
Liceo Scientifico "G. Galilei" - Catania
Classe 2B

a) Sia AB un segmento; esso sarà la base del triangolo isoscele che vogliamo costruire.
Chiamiamo r l'asse di AB, poiché ogni punto di r è equidistante da A e da B il vertice del triangolo richiesto si trova su r. Puntando il compasso in A e in B e con apertura uguale a due volte AB, tracciamo un arco che intersecherà r in C; congiungiamo C con A e B, essendo CA = CB = 2AB la costruzione è completa.
b) Tracciata la bisettrice dell'angolo BAC sia D il suo punto di intersezione con il lato BC. Chiamiamo E ed F i punti medi di CD e CA rispettivamente; il segmento FE sarà parallelo al lato AD (perché è il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo).
Si prolunghi ora il lato CA di un segmento AP=AB e si congiunga P con B. Il triangolo APB è isoscele su base PB, pertanto gli angoli alla base sono uguali.
L'angolo CAB è esterno rispetto al triangolo APB, avremo cosi' CAB= APB+ PBA = 2PBA; questo significa che CAB=ABP e di conseguenza le rette PB e AD sono parallele perché tagliate dalla trasversale AB formano angoli alterni interni eguali.
Se adesso consideriamo il fascio di rette parallele FE, AD, PB tagliato dalle trasversali CP e CB avremo, per il teorema di Talete che a segmenti eguali sulla prima trasversale, CF=FA=AP, corrispondono segmenti uguali sulla seconda trasversale: CE=ED=DB, pertanto è CD=2DB.



Liceo Classico S. Weil - Treviglio
Classe 5A

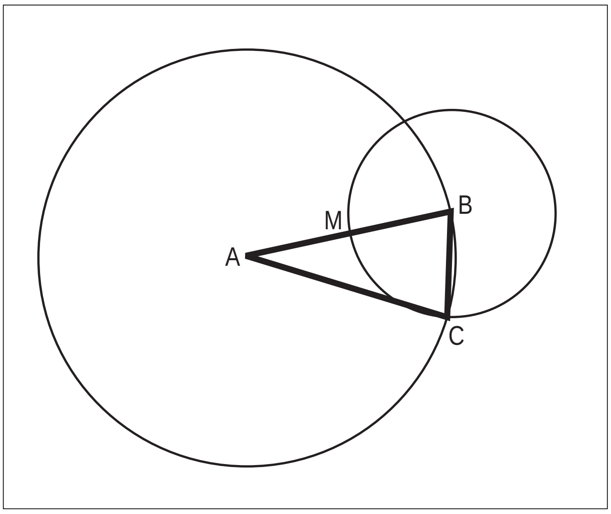
A) Dato un segmento AB, tracciare una circonferenza di raggio AB [con centro in B] e prolungare il segmento fino ad incontrare la circonferenza nel punto C.
Tracciare una circonferenza di centro A e di raggio AC e poi un'altra circonferenza di centro B e di ugual raggio.
Considerare uno dei due punti d'intersezione D delle circonferenze tracciate (di ugual raggio) e congiungerlo con i punti A e B.
Si ottiene così un triangolo con il lato



AD=DB=2AB.

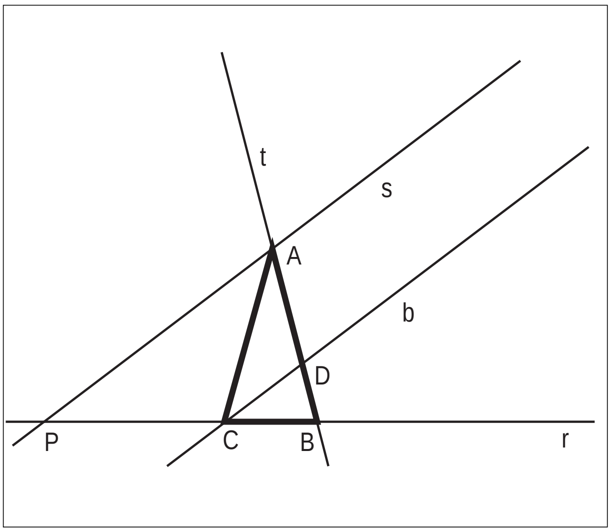
IL punto B è stato risolto dall'alunna Linda Vitali.
B) Tracciare NM parallelo ad AB.
Si ottiene così un triangolo DNM simile al triangolo ABD: i due triangoli hanno gli angoli omologhi congruenti in quanto hanno l'angolo ADB in comune e gli angoli alla base corrispondenti rispetto alle rette parallele MN e AB tagliate dalle trasversali DA e DB.
Di conseguenza DN=2NM.
L'angolo NMA è uguale all'angolo MAB perché alterni interni, quindi il triangolo ANM è isoscele perché l'angolo NMA è uguale all'angolo MAN [per proprietà transitiva].
Quindi ND=2AN e DM=2MB.

Moscatelli Marco, Urbano Sara, Ventura Daniela
Classe 2A - Liceo Scientifico Tecnologico dell'Istituto Tecnico Industriale e Liceo Scientifico Tecnologico "Cartesio" di Cinisello Balsamo (MI)



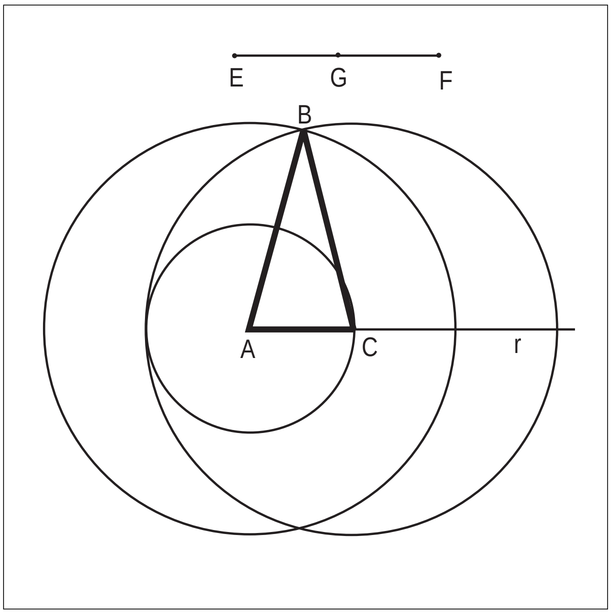
a) Costruzione del triangolo isoscele di base pari a metà del lato.
1. È dato il segmento AB lato del triangolo isoscele
2. Si traccia la circonferenza di centro A e raggio AB
3. Si individua il punto medio M del segmento AB
4. Si traccia la circonferenza di centro B e raggio BM
5. Si individua uno dei due punti di intersezione tra le circonferenze (denominato con C)
6. Si traccia il segmento AC, che essendo raggio della prima circonferenza sarà congruente ad AB
7. Si traccia il segmento BC che essendo raggio della seconda circonferenza sarà congruente a BM e perciò pari alla metà di AB, come richiesto.

b) dimostrare che la bisettrice di un angolo alla base del suddetto triangolo taglia il lato opposto in due parti una doppia dell'altra.
1. Si traccia la retta r di sostegno della base BC
2. Si traccia la bisettrice b dell'angolo alla base in C
3. Si indica con D il punto di intersezione con il lato opposto AB
4. Si traccia la retta t di sostegno al lato AB
5. Si traccia la parallela s, passante per A, alla bisettrice
6. Si indica con P il punto di intersezione tra le rette s e r
7. Il triangolo ACP è isoscele con base AP in quanto:
   - Gli angoli CAP e ACD sono congruenti perché alterni interni
   - Gli angoli DCB e APC sono congruenti perché corrispondenti
   - Gli angoli DCB e ACD sono congruenti per costruzione
   - Di conseguenza gli angoli APC e CAP, per transitività sono congruenti

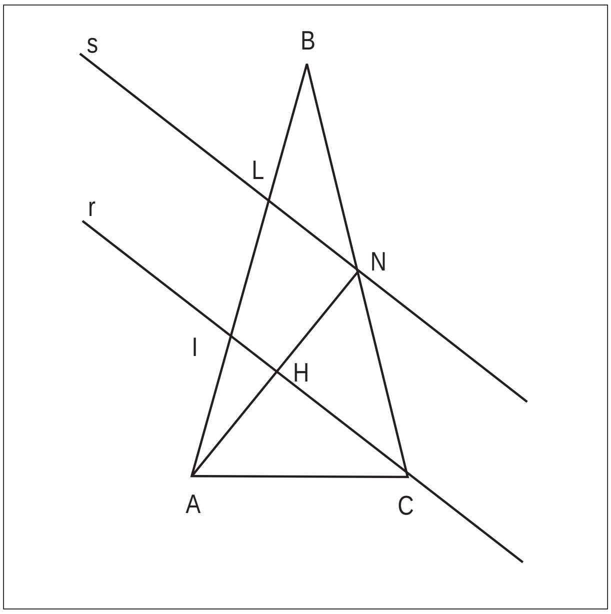


8. Considero le parallele s, b e le trasversali r, t: per il Teorema di Talete CP:CB=AD:DB, inoltre siccome CP è congruente a AC si ha che AC:CB=AD:DB, inoltre AC è congruente al doppio di BC, si ha che 2BC:BC=AD:DB
9. Di conseguenza il rapporto tra AD e DB è 2.

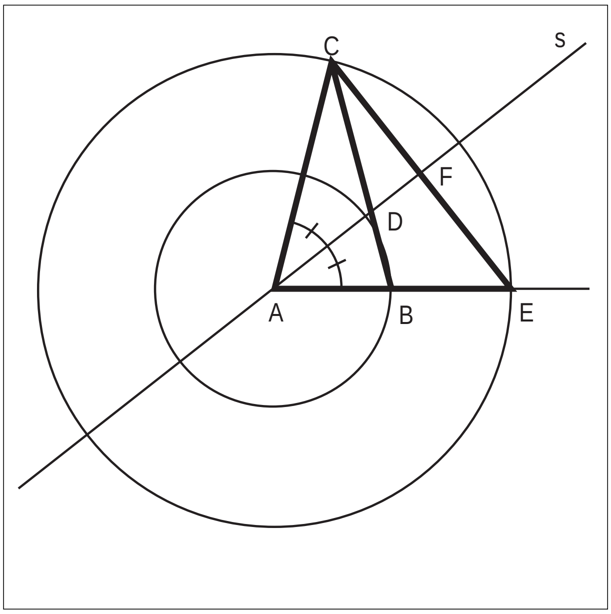
Gruppo di studenti
Seconde classi
Liceo Scientifico "G. Galilei" - Bitonto



A) COSTRUZIONE
- Costruire un segmento EF;
- Individuare il suo punto medio G
- Individuare una semiretta Ar nel piano
- Tracciare col compasso una circonferenza di centro A e di raggio EG
- Sia C il punto di intersezione tra tale circonferenza e la semiretta Ar
- Tracciare col compasso una circonferenza di centro A e di raggio EF
- Tracciare un'altra circonferenza di centro C e di raggio EF
- Individuare il punto di intersezione B tra le due circonferenze
- Costruire il triangolo ABC isoscele in quanto AB=BC=EF e con base
  AC=EG=(1/2)*EF=(1/2)*AB per costruzione .



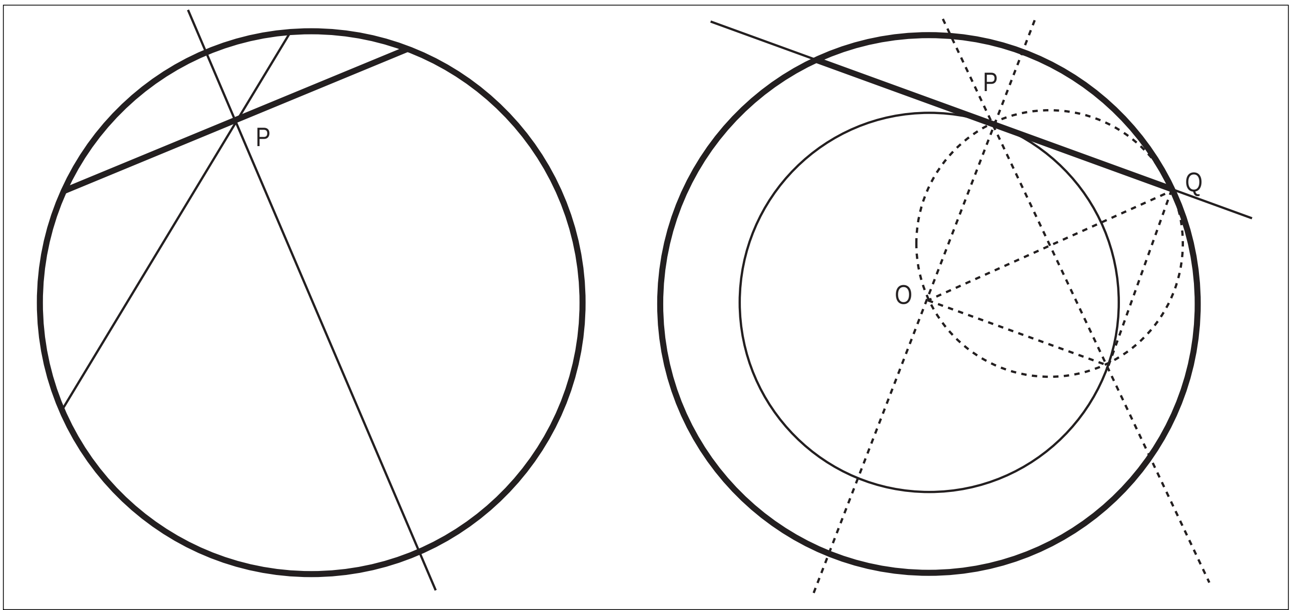
B) Prima risoluzione
Tracciare la bisettrice r dell'angolo ACB; sia I il punto d'intersezione di r con AB; condurre la parallela s ad r passante per il punto medio N di BC e sia L la sua intersezione con AB. Essendo BN congruente a CN, per il teorema di Talete applicato alle rette parallele r ed s e alle trasversali BC e BA, BL è congruente a LI. Congiungere A ad N e considerare il triangolo ACN isoscele poiché AC è congruente a CN per ipotesi. Per la proprietà dei triangoli isosceli, CH, dove H è il punto d'intersezione fra CI ed AN, è sia bisettrice che mediana relativa alla base, per cui AH è congruente ad HN. Considerando le rette parallele r, s e le trasversali AB e AN, per il teorema di Talete, LI è congruente ad AI e per transitività a LB.



B) Seconda risoluzione
H: ABC isoscele su AB;
AB=(1/2)CA;
AD bisettrice dell'angolo CAB.
T: DB = (1/3)CB
Dimostrazione
- Costruire la bisettrice s dell'angolo CAB;
- sia D il punto intersezione fra il lato obliquo CB e la bisettrice;
- considerare il triangolo ACE isoscele su CE, essendo
  AC = AE raggi della stessa circonferenza;
  in esso AF, in quanto bisettrice dell'angolo al vertice, è anche mediana relativa alla base;
  CB è la mediana di ACE relativa ad AE, perché AB = BE per costruzione;
  essendo AF e CB mediane del triangolo e D il loro punto intersezione, D è il baricentro del triangolo ACE e quindi divide CB in parti tali che CD = 2DB

6 - 20 Dicembre 1999

Data una circonferenza di centro O e raggio r ed un punto P interno ad essa:
a) costruire la corda di lunghezza minima passante per P;
b) individuare, mediante una costruzione, un punto P in modo che la corda richiesta sia lato di un quadrato inscritto nella circonferenza;
c) determinare in funzione di r la distanza PO dei punti P che soddisfano la condizione (b) e descrivere quale figura formano tali punti. Ai ragazzi del biennio di scuola secondaria superiore si chiede di giustificare le costruzioni dei precedenti punti (a) e (b).



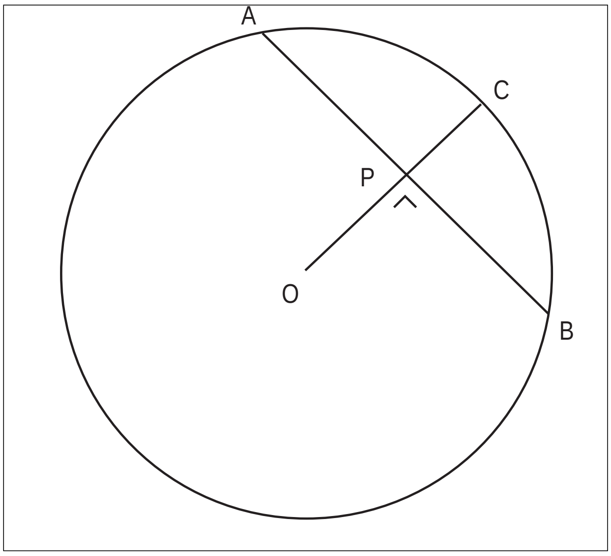
Commento

Abbiamo ricevuto sedici risposte provenienti da quattordici scuole di cui una elementare e quattro medie inferiori.
Il problema richiedeva due costruzioni e la individuazione di un luogo di punti. La costruzione richiesta nel punto (a) non sempre è stata giustificata dai ragazzi delle superiori e in alcune risposte non lo è stato in modo corretto. In tutte le risposte pervenute la soluzione del punto (b) è stata affrontata a partire dal risultato finale: costruendo cioè il lato del quadrato inscritto per individuare il punto P richiesto. Considerare il problema come risolto è uno dei metodi più fruttuosi già seguito dagli antichi geometri greci, ma dovrebbe condurre poi ad individuare un percorso di risoluzione. Presentiamo, in fondo a questo commento, una nostra proposta di soluzione.
Le scuole che hanno partecipato sono:

SE “G.Galilei”, 2°Circolo di Alessandria (AL)
Scuola Media di Roveredo in Piano (PN)
SM “Luca Valenziano” Tortona (AL)
SM “Cerreta” Bologna (BO)
SM “Bellotti” Busto Arsizio (VA)
ITI “E.Fermi” Mantova (MN)
ITI “Ferrari” S.Giovanni Valdarno (AR)
LS “G.Galilei”, Bitonto (BA)
LS “Falcone” Asola (MN)
LS “B.Pascal” Merano (BZ)
LS “Pitagora”, Rende (CS)
LS di Acri (CS)
LS “Scorza” Cosenza (CS)
LG “S. Weil” Treviglio (BG)

Essendo le risposte accolte molto simili fra loro, ne abbiamo scelte due sole da riportare: quella della scuola media “Bellotti”, a cui diamo il benvenuto nel mondo di ***FLATlandia***, e quella del LS “Scorza”.
NOTA: Nelle soluzioni riportate, le correzioni o i commenti sono scritti fra parentesi quadre.

Soluzioni

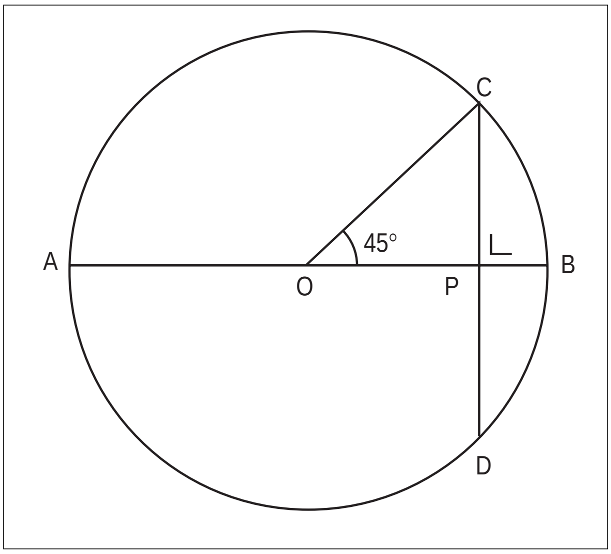


Nostra proposta di soluzione punto (b):
(Si fa riferimento alla figura di destra riportata prima del commento)
Preso un punto Q sulla circonferenza, si costruisce il quadrato avente come diagonale il raggio QO.
Ciascuno degli estremi dell'altra diagonale è uno dei punti P richiesti.

Gruppo di alunni
Classi 3A e 3C
Scuola media statale "B. Bellotti" - Busto Arsizio

a) Disegno una circonferenza di centro O e individuo un punto P interno ad essa.
Traccio il raggio OC passante per P e disegno la corda AB perpendicolare ad OC.
AB è la corda minima passante per il punto P.

b) Disegno una circonferenza di centro O, traccio un diametro AB e un raggio OC che forma un angolo di 45° con AB.
Traccio la corda CD perpendicolare ad AB: il punto P in cui la corda incontra il raggio OB si trova sulla corda CD che è il lato del quadrato inscritto nella circonferenza.
Dimostrazione:
Se POC angolo=45° e OPC angolo=90° per costruzione, allora PCO angolo=45°.
Se supponiamo OC=$\sqrt{2}$ allora, per il teorema di Pitagora, PC=OC/$\sqrt{2}$ =1 e di conseguenza CD=2
Siccome un quadrato inscritto il lato è uguale al diametro fratto $\sqrt{2}$, nel nostro caso il lato del quadrato dovrebbe essere l=2$\sqrt{2}$ /$\sqrt{2}$ =2 che è la lunghezza del segmento CD.
c) PO è il cateto del triangolo rettangolo isoscele POC che ha ipotenusa congruente al raggio della circonferenza. Di conseguenza PO=r/$\sqrt{2}$
I punti P che soddisfano tale condizione formano una circonferenza concentrica interna a quella di partenza.

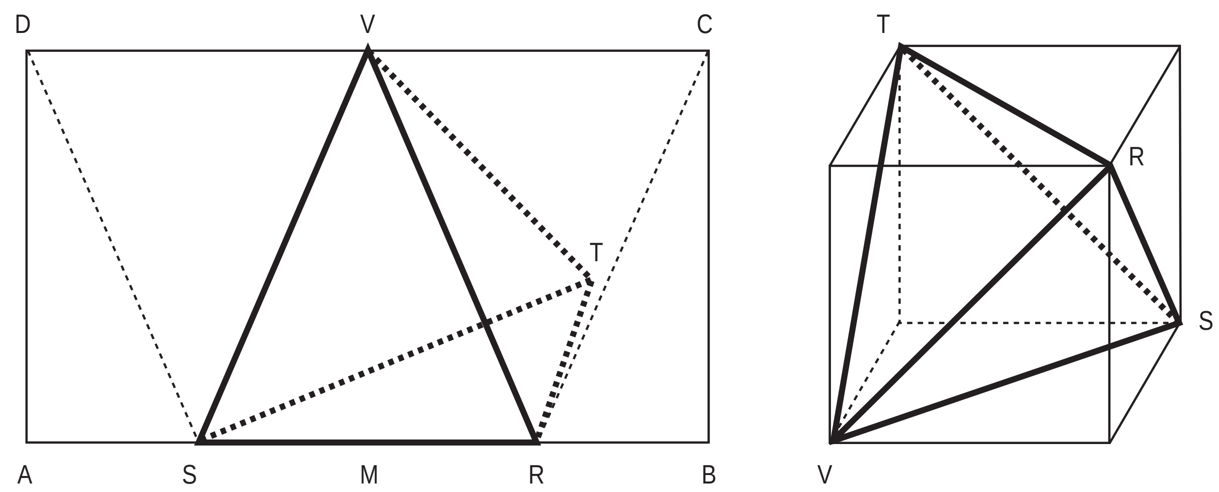


Ugo Campisani e Giovanna Turco
Classe 2C Liceo Scientifico "Scorza" Cosenza

a) Data una circonferenza di centro O ed un punto P interno ad essa, la corda minima passante per P è quella perpendicolare alla retta che contiene OP. Infatti considerando un'altra corda CD passante per P, tracciamo la distanza di essa dal centro e sia OQ. Il triangolo OPQ è rettangolo in Q (OQ è perpendicolare a CD), l'ipotenusa OP è maggiore di OQ, pertanto la corda AB la cui distanza dal centro è OP sarà minore di CD e di qualunque altra corda.
b) Per individuare il punto P, costruiamo un quadrato inscritto nella circonferenza tracciando due diametri perpendicolari. I punti di intersezione con la circonferenza sono vertici del quadrato.
Il punto P sarà il punto medio di ogni lato perché è il punto di intersezione della bisettrice dell'angolo formato dai due diametri con il lato del quadrato.
c) La distanza OP è un cateto del triangolo rettangolo OPB retto in P; l'ipotenusa è il raggio. Sappiamo che, per il teorema di Pitagora, il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti. Quindi, se OP è uguale a PB e siano essi i cateti del triangolo considerato, r^2=2OP^2 implica che OP = r/$\sqrt{2}$.
I punti P sono gli infiniti punti di una circonferenza che ha per centro O e per raggio OP. Infatti, tracciando altri diametri perpendicolari e le bisettrici degli angoli formati da essi, si può ottenere un infinito numero di punti P che si trovano sempre alla stessa distanza da O.
Quindi, sapendo che il raggio è la distanza di un qualsiasi punto della circonferenza dal centro, OP è il raggio della nuova circonferenza ottenuta.

10 - 24 Gennaio 2000

Il tetrapak è un contenitore a forma di piramide triangolare usato tempo fa per alimenti quali il latte il cacao, la panna… I tetrapak vengono costruiti a partire da un rettangolo:
a) come deve essere piegato un rettangolo per ottenere da esso un tale contenitore?
b) quale relazione deve intercorrere fra le dimensioni del rettangolo affinché il tetrapak sia un tetraedro regolare?
c) è possibile inscrivere un tetraedro regolare in un cubo? come?
Motivare le risposte.



Il rettangolo viene piegato secondo i segmenti SD ed RC, SV ed RV. A≡B≡M, C≡D≡T

Commento

Abbiamo ricevuto quindici risposte provenienti da tredici scuole di cui tre scuole medie inferiori. Tutte le risposte sono state inviate in *"attachment"* creando, come abbiamo già segnalato, alcuni problemi tecnici a noi, che le abbiamo ricevute. Ben quattro file Word contenevano un virus: invitiamo quindi le scuole ed i solutori a controllare i computer utilizzati. Il problema chiedeva prima di descrivere come ottenere un *"tetrapak"* piegando un rettangolo, poi di determinare le condizioni affinché il poliedro risultasse regolare ed infine come inscrivere quest'ultimo in un cubo.
Fra le quindici soluzioni pervenute:
- una non è accettabile perché errata nella parte (a) e quindi anche (b);
- un'altra, anche se non errata, presenta una costruzione troppo complessa;
- quattro sono invece errate o carenti nella parte (c).

Nelle altre si riscontrano alcune imprecisioni e/o incompletezze:
- in alcune è stata unificata la parte (a) con la (b) (un tetraedro non è necessariamente regolare o retto);
- in molte è stata omessa la descrizione della soluzione proposta, facendo riferimento alla figura (ripetiamo che in questo modo la risposta non si può presentare via e-mail);
- in alcune non è stata valutata correttamente la relazione del punto (b);
- alcuni hanno scritto il testo nel file della figura (ciò lo rende illeggibile a coloro che non dispongono dello stesso software).

Le soluzioni proposte per il primo quesito sono sostanzialmente di due tipi, che portano poi a due diversi risultati nel caso (b). Nel terzo quesito quasi tutte le soluzioni presentano la stessa figura (un tetraedro che ha i vertici coincidenti con quattro degli otto vertici del cubo e gli spigoli coincidenti con sei diagonali delle facce del cubo: uno su ciascuna faccia del cubo), non sempre descritta oppure descritta in modo non esauriente.

Le scuole che hanno partecipato sono:
SM "Marco Polo" Rolo (RE)
SM "Cerreta" Bologna (BO)
SM "Graziosi" Savignano sul Panaro (MO)

LG “S. Weil” Treviglio (BG)
LS “Pitagora” Rende (CS)
LS “G. Galilei” Catania (CT)
LS “Galilei” BITONTO (BA)
LS “Falcone” ASOLA (MN)
ITI LST “Cesaris” Casalpusterlengo (LO)
ITI “Galileo Ferraris” S.Giovanni Valdarno (AR)
ITI “Fermi” Mantova (MN)
ITI LST “Berenini” Fidenza (PR)
ITAS “Calvi” Finale Emilia (MO)

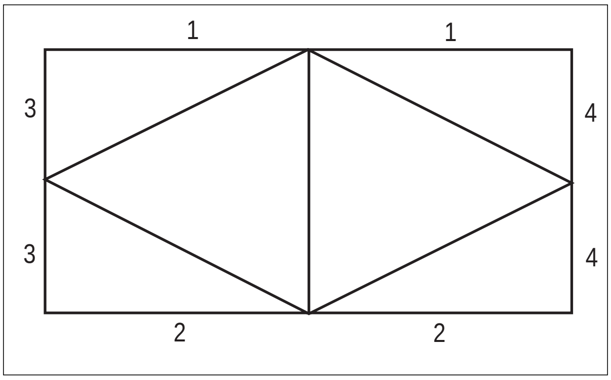
Abbiamo scelto di riportare la soluzione dell’Istituto “Cesaris” di Casalpusterlengo per la sua completezza in quanto presenta entrambi i tipi di soluzione dei punti (a) e (b), anche se necessita di una correzione nella seconda parte. Presentiamo inoltre una delle due soluzioni inviate dall’Istituto “Berenini” di Fidenza, perché si discosta dalle altre. Poiché nessuna delle soluzioni rimaste è completamente soddisfacente, abbiamo scelto, di riportare qui di seguito, un collage di parti di quelle più interessanti.

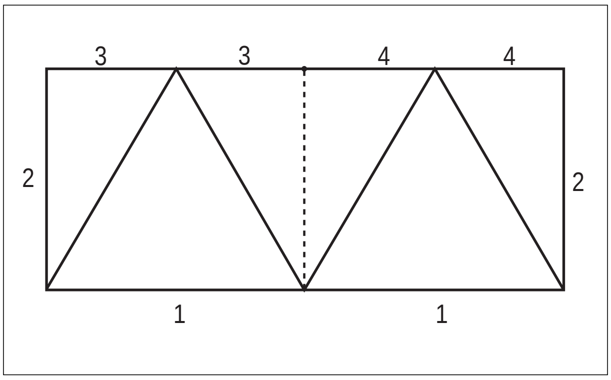
NOTA: le correzioni o i commenti al testo sono riportate in parentesi quadra.

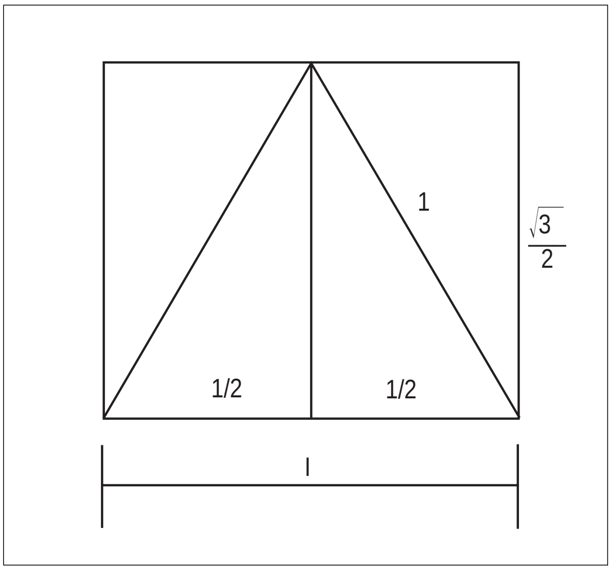
Soluzioni

Alessandra DI FEDE
Liceo Scientifico Tecnologico
“A. Cesaris” Casalpusterlengo (LO)
Classe 2LB

a) Sono possibili due soluzioni, ottenute dai disegni a lato, piegando gli spigoli di colore nero verso l’interno, e facendo combaciare i lati esterni dello stesso colore, identificati in figura con lo stesso numero.

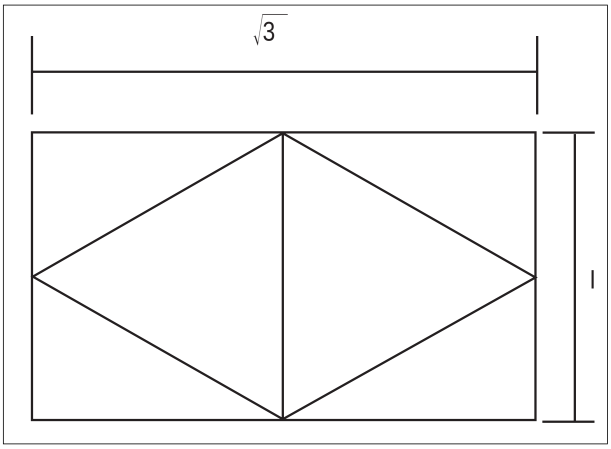






b) Affinché il Tetrapak sia un tetraedro regolare, necessita che il triangolo [che forma ciascuna faccia] sia equilatero. Da ciò si deduce che, posto il lato del triangolo *l=1*,

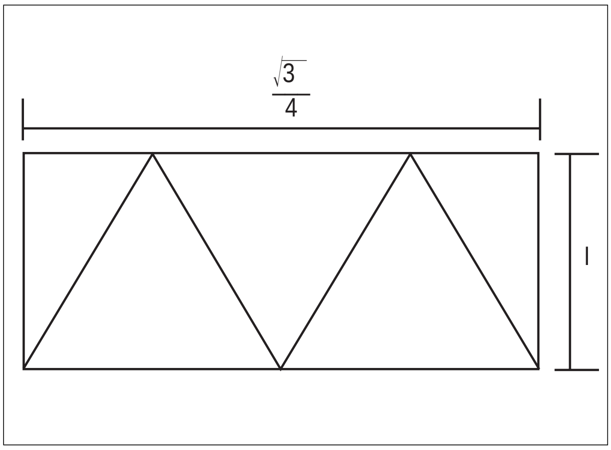
$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



b1) Le relazioni finali che intercorrono fra le dimensioni dei rettangoli affinché il tetrapak sia un tetraedro [regolare] sono:
Soluzione1:

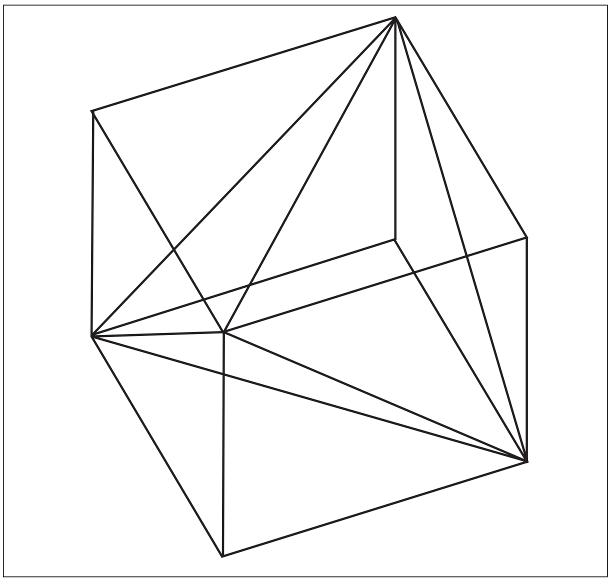
$$l_1 = 2 * h = 2 * \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\frac{l}{l_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Soluzione2:
[**Nota:** i numeri riportati sulla figura non sono quelli utilizzati per calcolare il rapporto, inoltre quello riportato in orizzontale è errato: il valore corretto è $4/\sqrt{3}$].

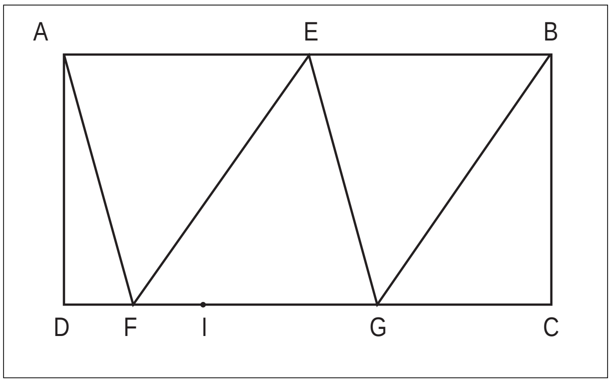
$$\frac{l_1}{h} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$



c) E’ possibile inscrivere un tetraedro regolare in un cubo facendo coincidere i 4 vertici del tetraedro con 4 degli 8 vertici del cubo, come nella figura a fianco, di conseguenza i 6 spigoli del tetraedro appartengono ai piani delle facce del cubo, in direzione delle diagonali delle stesse.

Classi 1°A e 1°B
Liceo Scientifico Tecnologico dell’ ITIS “Berenini” di Fidenza (PR).

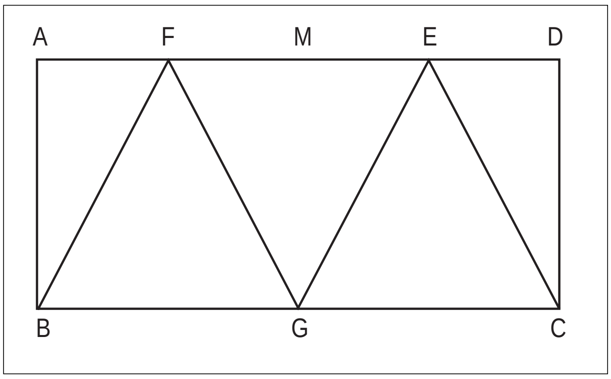
RISPOSTA **a)**
Dato un rettangolo ABCD si considerino i punti E , F, G e I in modo che: i segmenti AE = EB = FG = 1/2 del lato AB, DF+GC = FG, DF = FI (vedi figura nel file allegato). Per ricavare da questa figura un tetraedro si deve piegare lungo i segmenti EF ed EG facendo combaciare AE con EB e lungo AF e GB facendo così unire i lati AD con BC in modo che i punti C e D coincidano entrambi con il punto I.
RISPOSTA **b)**
Affinché il tetrapak sia un tetraedro regolare occorre che le sue facce siano triangoli equilateri. Quindi, poiché il triangolo equilatero, faccia del tetraedro, ha lato AB/2, la sua altezza deve essere ($\sqrt{3}$/4) volte AB e tale altezza è anche altezza del rettangolo. Quindi AD=($\sqrt{3}$/4)AB. Inoltre occorre che I sia punto medio di DC e di conseguenza risulta
DF = FI = IG = GC = (1/4)DC.
RISPOSTA **c)**
Sì, il tetraedro regolare può essere inscritto in un cubo facendo appoggiare i sei spigoli del tetraedro sulle sei facce del cubo in coincidenza delle diagonali. Il cubo deve avere quindi lato uguale a $\sqrt{2}$/2 volte lo spigolo del tetraedro che a



sua volta è metà della base AB del rettangolo di partenza. [lato cubo = ($\sqrt{2}$/4)AB]

Gruppo di studenti
Seconde classi
Liceo Scientifico "G.GALILEI" di BITONTO

[prima parte]
a) Dato un qualsiasi cartoncino rettangolare, per ottenere un tetrapak, lo si deve piegare a metà due volte lungo la stessa dimensione [per es. lungo la base BC] e poi una terza volta lungo la [una] diagonale dell'ultimo rettangolo ottenuto.



Spiegando [riaprendo e stendendo] poi il cartoncino si ottiene il rettangolo ABCD in figura, dove:
- G è il punto medio di BC,
- M il punto medio di AD,
- F il punto medio di AM,
- E il punto medio di MD.

Le pieghe sono i segmenti FB, FG, EG, EC.
Piegando il rettangolo in maniera che:
- B coincida con C,
- D coincida con A e con M,

si ottiene il tetrapak.
[…]

Scuola Media Statale "M. POLO" di ROLO (RE)
Classe 3A
[…]
[seconda e terza parte]
b) Il solido che si ottiene è un tetraedro regolare se la base del rettangolo è il doppio dello spigolo del tetraedro che si desidera ottenere e l'altezza del rettangolo corrisponde all'altezza di una faccia del tetraedro, cioè:
AB = 2l; BC = (l/2)$\sqrt{3}$ con l = spigolo del tetraedro [Nella figura AB è la base e BC è l'altezza del rettangolo.]
c) sì, è possibile inscrivere un tetraedro regolare in un cubo, basta tracciare una diagonale in ogni faccia di un cubo come indicato nella figura n°2, le sei diagonali corrispondono ai 6 spigoli del tetraedro.

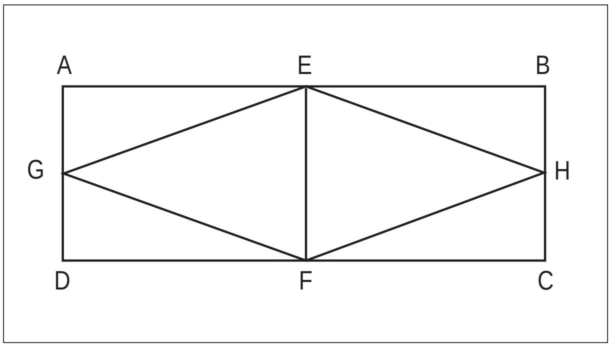
Michele MEDIOLI
Liceo Scientifico Tecnologico dell' ITIS "BERENINI" di FIDENZA (PR).
Classe 1A

[prima e seconda parte]
RISPOSTA **a)**
Dato un rettangolo ABCD si consideri il rombo inscritto EHFG. Per ricavare da questa figura un tetraedro si deve piegare lungo i segmenti EF ed EG, GF, FH, HE, facendo combaciare AE con EB, AG con GD, DF con FC e CH con HB, e facendo così combaciare i quattro vertici del rettangolo.
RISPOSTA **b)**
Affinché il tetrapak sia un tetraedro regolare occorre che le sue facce siano triangoli equilateri.
Per fare in modo che ciò avvenga, il lato AD deve essere uguale al lato GE (mezza diagonale del rettangolo = BD/2) e AB, quindi, deve essere uguale a:

$$\sqrt{BD^2 - AD^2}$$

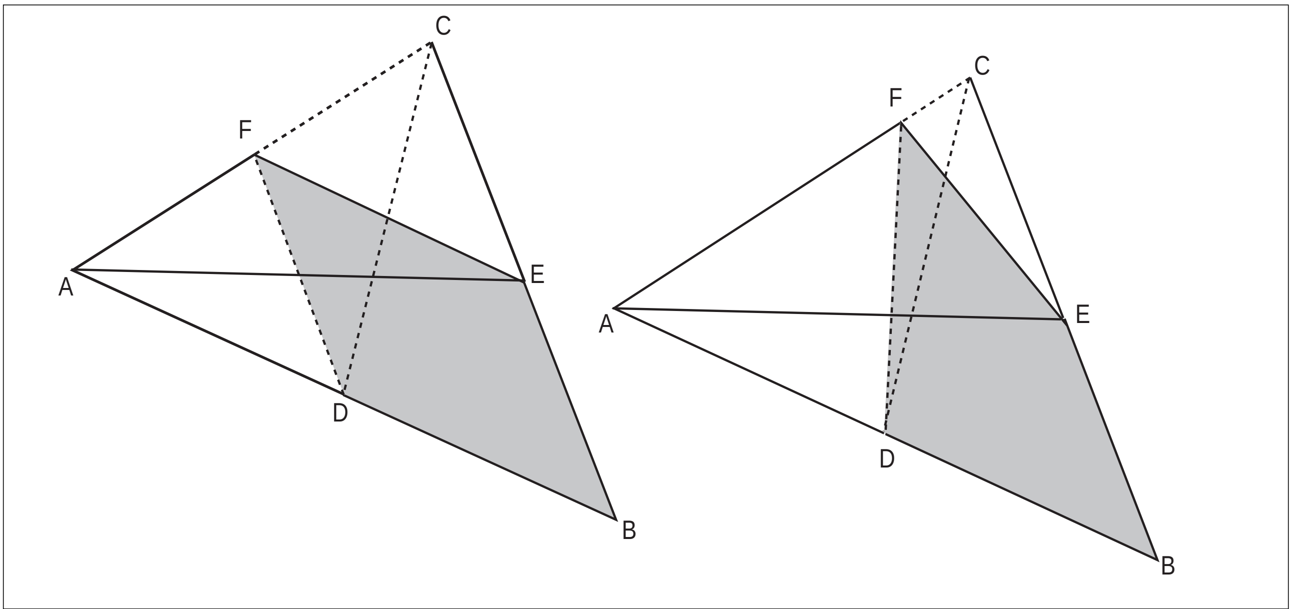
ma essendo BD = 2AD, la formula verrà semplificata in

$$\sqrt{(2AD)^2 - AD^2} = \sqrt{4AD^2 - AD^2} = \sqrt{3AD^2} = AD\sqrt{3}$$



7 - 27 Febbraio 2000

In un triangolo ABC siano D, E e F, i punti medi rispettivamente dei lati AB, BC e AC.
a) Quale è il legame che intercorre fra la superficie del quadrilatero BEFD e quella dei triangoli AEF e FCD?
b) Cosa accade se il punto F è un punto qualunque del lato AC?
Giustificare le risposte.



Commento

Il problema proponeva due quesiti di cui il primo, molto semplice per non scoraggiare gli allievi più giovani, era un caso particolare del secondo.
Abbiamo ricevuto diciannove risposte provenienti da diciassette scuole di cui due di Scuola Media Inferiore.

Le scuole che hanno partecipato sono:

SM “B. Bellotti” Busto Arsizio (VA)
SM “Luca Valenziano” Tortona (AL)
ITI “E. Fermi” Mantova (MN)
ITI “Berenini” Fidenza (PR) (due risposte)
ITI “Cartesio” Cinisello Balsamo (MI)
LG “Orazio” Roma (RM) (due risposte)
LG “S. Weil” Treviglio (BG)
LS “A. Bafile” L’Aquila (AQ)
LS di Acri (CS)
LS “G. Ulivi” Parma (PR)
LS “G. Ferraris” S. G. Valdarno (AR)
LS “G. Galilei” Bitonto (BA)
LS “G. Galilei” Catania (CT)
LS “G. Galilei” Adria (RO)
LS “Sabin” Bologna (BO)
LS “G. Falcone” Asola (MN)
LS “Pitagora” Rende (CS)

Tutti hanno risolto, più o meno correttamente, il primo quesito, ma solo alcuni hanno risposto al secondo o lo hanno fatto in modo incompleto o addirittura errato.
In un messaggio precedente vi abbiamo invitato a giustificare le vostre affermazioni indicando le proprietà utilizzate anche se abbastanza note (come quella dei punti medi che ricorre nelle dimostrazioni dei due quesiti).
Questa volta vi invitiamo ad essere più concisi: basta che le giustificazioni siano chiare ed esaurienti e quindi non è

necessario eccedere nei passaggi o in dettagli.
Dobbiamo inoltre invitarvi ancora ad un uso corretto dei simboli matematici:
- alcuni hanno usato il simbolo “=” per esprimere sia la congruenza di figure sia per indicarne l’equivalenza;
- ricordiamo che con le scritture “ABC”, “ABCD”, in genere si indicano figure non la loro area.
Riportiamo, per la loro semplicità e chiarezza, anche se necessitano di qualche correzione formale, la soluzione (completa) degli allievi della SM “L. Valenziano**”**, simile nella seconda parte alla soluzione inviata da due allieve dell’ITI “Berenini”, quella del LS “G.Galilei” di Catania e del LS “G. Ferraris”
Di seguito troverete anche la risposta al secondo quesito del LS “G. Galilei” di Bitonto, e quella al primo della SM “Bellotti”.

NOTA: le correzioni o i commenti al testo sono riportate in parentesi quadra.

Soluzioni

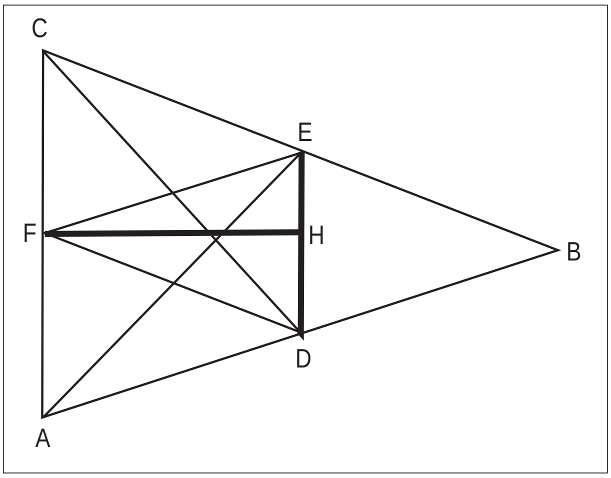
De Icco Roberto e Merli Marco
Scuola Media St. “Luca Valenziano” di Tortona (AL)
Classe III D (t.p.)

1) Area(BEFD) = Area(AEF) + Area(FCD)
GIUSTIFICAZIONE
Il triangolo BED è metà del parallelogrammo BEFD [l’affermazione che BEFD è un parallelogrammo non è motivata]; l’altra metà è il triangolo DEF.
DEF è però anche la metà di altri due parallelogrammi DECF e DEFA
Allora i triangoli AEF e FCD, metà rispettivamente dei parallelogrammi DEFA e DECF sono equiestesi ed entrambi la metà del parallelogrammo BEFD.
2) Se F1 è un punto qualsiasi di AC vale ancora la relazione Area(BEF1D) = Area(AEF1) + Area(F1CD)
GIUSTIFICAZIONE
Se F1 è un punto qualsiasi di AC i triangoli CF1D e AF1E sono, rispetto a CFD e AFE, uno aumentato e l’altro diminuito di due superfici equivalenti (F1FD e F1FD).
Quindi la somma delle due aree è invariata.
Anche i triangoli F1ED e FED hanno la stessa area perché hanno stessa base (DE) e stessa altezza poiché AC è parallelo a DE.
Quindi vale la relazione.

Daniele Urzì
Liceo Scientifico St. “G.Galilei” di Catania
Classe 2B
(figure in Cabri realizzate da Carlo Longhitano della stessa classe)

In riferimento alla figura 1 [per i riferimenti alle figure si vedano quelle allegate al testo], premettiamo che i segmenti FE, DF, DE, poiché congiungono i punti medi dei lati del triangolo ABC sono rispettivamente paralleli ad AB, BC, CA e rispettivamente uguali [congruenti] alla metà di questi.
Da questa premessa deduciamo che il quadrilatero DBEF è un parallelogrammo.
Su di esso la trasversale [diagonale] DE individua i due triangoli uguali [congruenti] DEF e DBE.
I triangoli AEF, CFD e FDE sono equivalenti perché hanno uguali [congruenti] le basi AF, FC, DE e le altezze ad esse relative uguali (tali altezze sono uguali [congruenti] alla distanza fra i segmenti paralleli AC e DE). Ciò significa che la superficie di ciascuno dei triangoli AEF e FDC è equivalente alla metà della superficie del parallelogrammo DBEF.
Consideriamo il caso in cui il punto F sia un punto qualunque di AC (figura 2)
I triangoli FDC e FCE sono equivalenti perché hanno la base FC in comune e le altezze ad essa relativa uguali [congruenti] (sono le distanze fra i segmenti paralleli AC e DE, condotte dai punti D e E).
Questo significa che la somma delle superfici dei triangoli AEF e FDC e’ equivalente alla superficie del triangolo ACE.
In maniera analoga a quanto fatto in precedenza si dimostra l’equivalenza dei triangoli ADE e FDE, da cui deriva l’equivalenza delle superfici del quadrilatero DBEF e del triangolo ABE.
Quest’ultimo è equivalente al triangolo ACE (infatti hanno le basi CE ed EB uguali e l’altezza AH ad esse relativa in comune): così è dimostrato che, se F è un punto qualunque di AC, la somma delle superfici dei triangoli AEF e CFD è equivalente alla superficie del quadrilatero DBEF.

Raffaello Moroni,
Istituto Tecnico Industriale "Galileo Ferraris", S. Giovanni Valdarno (Ar)
Classe 2E



Parte **a)**

Il segmento DE è parallelo ad AC e congruente ad AF e CF in quanto, in un qualsiasi triangolo, il segmento congiungente i punti medi di due lati è parallelo al terzo e congruente alla sua metà.

Il segmento FH, perpendicolare a DE è altezza del triangolo DEF rispetto alla base DE. Ma è anche congruente all'altezza di AEF rispetto ad AF in quanto DE è parallelo ad AC. I triangoli DEF e AEF sono quindi equivalenti in quanto hanno la stessa altezza e la stessa base.

Il quadrilatero BEFD è un parallelogramma, in quanto EF è parallelo ad AB (E ed F punti medi) e DE è parallelo ad AC, e DE è diagonale.

DEF è quindi congruente ad EDB (la diagonale divide un parallelogramma in triangoli congruenti).

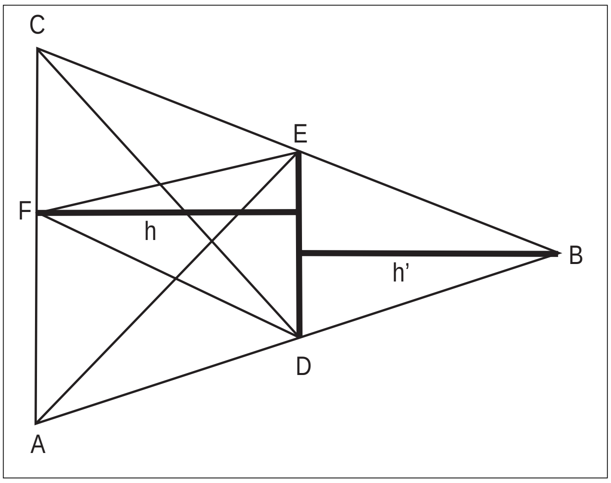
AEF è quindi la metà del quadrilatero. Essendo poi AF = FC ed FH altezza sia di AEF che di FCD, i due triangoli sono equivalenti.

Quindi la relazione fra le superfici è AEF = FCD = DEF = (1/2)BEFD ["=" sta per equivalente]

Parte **b)**

La somma delle aree dei triangoli AEF e FCD è:

$$Area(AEF) = +Area(FCD) =$$
$$= \frac{AF \cdot h}{2} + \frac{FC \cdot h}{2} = \frac{h}{2}(AF + FC) = \frac{AC \cdot h}{2}$$



Le altezze h e h' sono congruenti in quanto, considerando la parallela a DE per B, segmenti sulla perpendicolare corrispondenti a segmenti congruenti (CE=BE poiché E è punto medio). L'area del quadrilatero BEFD è data dalla somma delle aree dei triangoli DEF e BED:

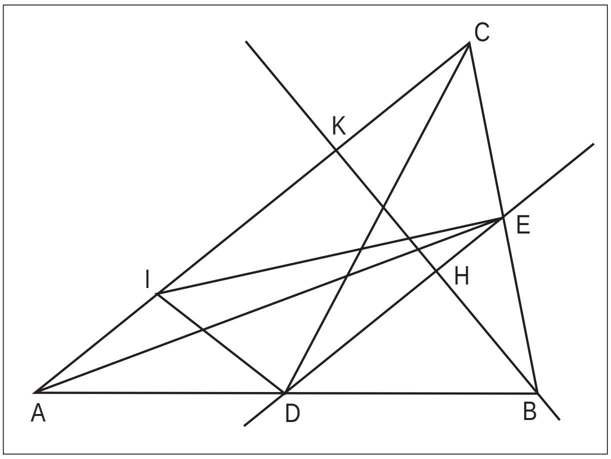
$$Area(EDF) + Area(BED) = \frac{ED \cdot h}{2} + \frac{ED \cdot h'}{2} =$$
$$= \frac{ED \cdot h}{2} + \frac{ED \cdot h}{2} = ED \cdot h$$
$$Es\text{sen}\,do \quad ED = \frac{1}{2}AC$$
$$Area(BEDF) = \frac{1}{2}AC \cdot h = \frac{AC \cdot h}{2}$$

Quindi, se il punto F è un punto qualunque del lato AC la somma dei triangoli AEF e FCD è equivalente a BEFD.

Gruppo di studenti
Seconde classi
Liceo Scientifico "Galileo Galilei" Bitonto (BA)

[…]

Parte b)



Se F è un punto qualunque di AC si ha che: AFD = AFE ["=" si legga equivalente] avendo stessa base e altezze congruenti in quanto distanze fra DE // AC; analogamente FCD = FCE [come sopra].

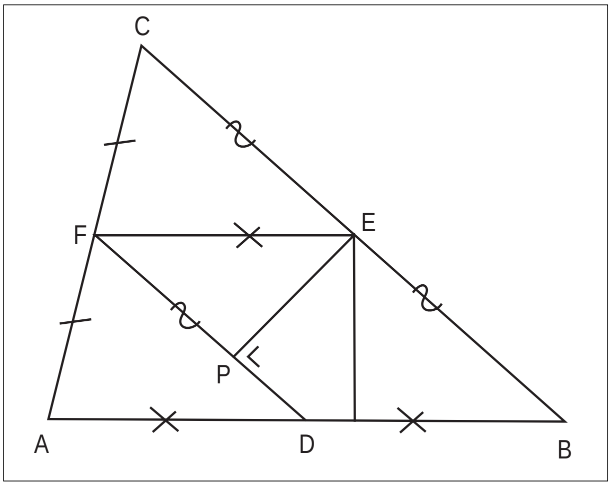
Ne consegue che AFE+FCD = AFD+FCE (1) [come sopra].

Per il teorema di Talete applicato alle rette parallele DE e AC, l'altezza BK del triangolo ABC relativa ad AC è divisa in parti congruenti da DE per cui FED = BDE [come sopra], avendo stessa base e altezze congruenti (BH=HK).

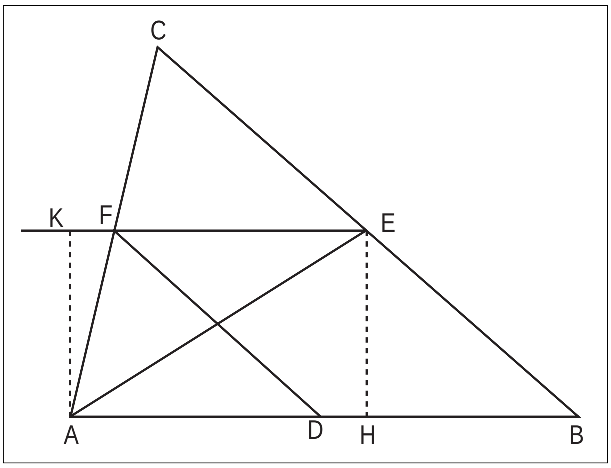
DBE = (1/4) ABC [“=” sta per equivalente], avendo DE = (1/2) AC e BH = (1/2) BK, pertanto BEFD = (1/2) ABC [equivalente].
Ne consegue che AFD+FCE = (1/2) ABC [equivalente] e quindi, da (1), BEFD = AFE+FCD [equivalente].

Gruppo di alunni
Classi 3A e 3C
Scuola Media Statale B. Bellotti - Busto A. (VA)

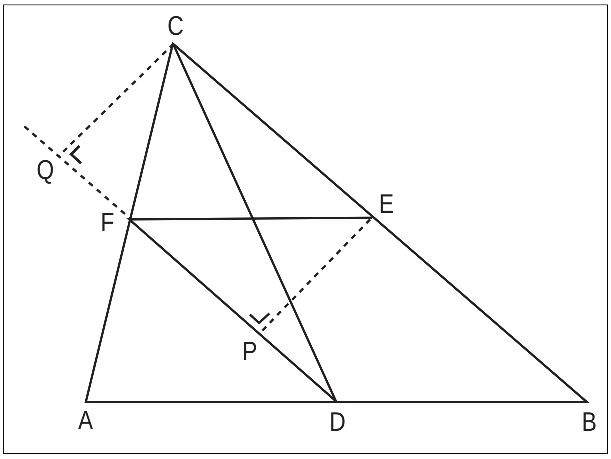
Il quadrilatero BEFD è un parallelogrammo perché:
EB≅FD e EB//FD in quanto FD congiunge i punti medi dei lati AC e AB del triangolo ABC;
FE≅DB e FE//DB in quanto FE congiunge i punti medi dei lati AC e CB del triangolo ABC.
L’area del quadrilatero BEFD è DB*EH se si considera DB come base, oppure FD*EP se si considera come base FD.



Il triangolo AEF ha base EF e l’altezza ad essa relativa è AK.
La sua area è quindi EF*AK/2.
Ma EF≅DB; AK≅EH perché distanza fra le rette parallele su cui giacciono i segmenti EF e AB.
Allora A(AEF)=DB*EH/2, quindi l’area del triangolo AEF è la metà dell’area del parallelogrammo BEFD.



Il triangolo FCD ha FD come base e l’altezza ad esso relativa è CQ.
La sua area è quindi FD*CQ/2.
Ma CQ≅EP perché distanza fra le rette parallele su cui giacciono i segmenti FD e CB.
Allora A(FCD)=FD*EP/2
Quindi l’area del triangolo FCD è la metà dell’area del parallelogrammo BEFD.

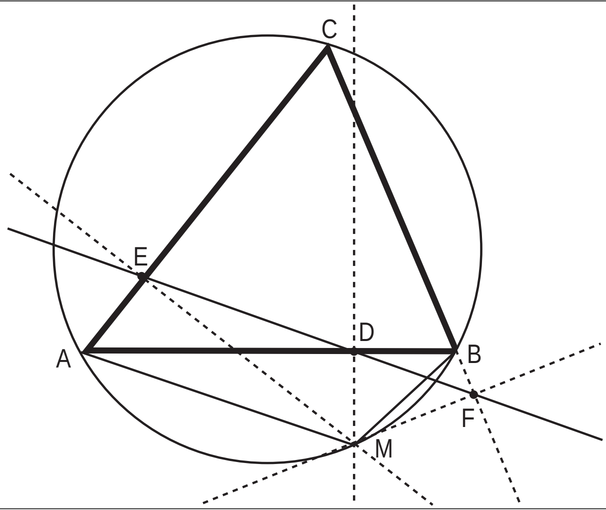


Concludendo:

l’area del parallelogrammo BEFD è equivalente alla somma delle aree dei due triangoli AEF e FCD.

6 - 20 Marzo 2000

Dato un triangolo ABC costruire la circonferenza c ad esso circoscritta, e da un punto M dell'arco AB di essa mandare le perpendicolari MD, ME, MF rispettivamente sui lati AB, AC, BC.
Tracciare poi i segmenti MA e MB.
a) Trovare nella figura così formata quattro quadrilateri inscrittibili.
b) Confrontare gli angoli AMB e EMF, poi gli angoli AME e BMF.
c) Dimostrare che i punti D, E, F sono allineati.
Motivare le risposte.



Commento

Abbiamo ricevuto quindici risposte provenienti da dieci scuole. Quattro sono scuole medie inferiori e sei risposte provengono da una stessa classe di scuola media che si è organizzata in gruppi e ciascuno di essi ha inviato il suo elaborato. Purtroppo non tutto il loro lavoro è accettabile, auguriamo a questi ragazzi un miglior esito con i prossimi problemi.
Una scuola media non ci ha fatto pervenire il suo nome quindi non potrà essere menzionata.
Il problema di marzo conduceva, attraverso tappe successive, alla scoperta della cosiddetta retta di Simson.
La dimostrazione dell'allineamento di tre punti è una questione un po' delicata che spesso trae in inganno: per questo ci è sembrato utile proporla almeno una volta nei problemi di *Flatlandia*.
Fra le risposte pervenute dalle scuole superiori solo tre sono completamente accettabili anche se non è stata sempre citata la costruzione della circonferenza circoscritta; due sono incomplete in molte parti e una non è valida per diversi motivi:

- nella risposta a) ci si doveva attenere alla figura e alle lettere assegnate
- non è il caso di dimostrare ripetutamente una stessa proprietà né di dimostrare proprietà già note: basta citarle
- quando è possibile conviene evitare dimostrazioni per assurdo.

Per quanto riguarda le scuole medie inferiori, due hanno risposto in modo apprezzabile anche se incompleto ai punti (a) e (b) e una in modo completo al punto (a). Le altre risposte non sono accettabili in quanto si limitano ad elenchi o descrizioni senza alcuna giustificazione o con giustificazioni errate.
A chi ha provato a dimostrare il punto (c) dobbiamo far notare che la figura EMFD non può essere vista come un triangolo finché non si è dimostrato l'allineamento dei tre punti E,D,F.

Le scuole che hanno partecipato sono:

SM "Luca Valenziano", Tortona (AL)
SM "Bellotti", Busto Arsizio (VA)
SM "G. Pascoli" (sei risposte), Castel Bolognese (RA)
Classe 3°A …
LS "G.Galilei", Bitonto (BA)
LS "G.Galilei", Catania (CT)
ITI, ST "Berenini", Fidenza (PR)
LS "Falcone", Asola (MN)

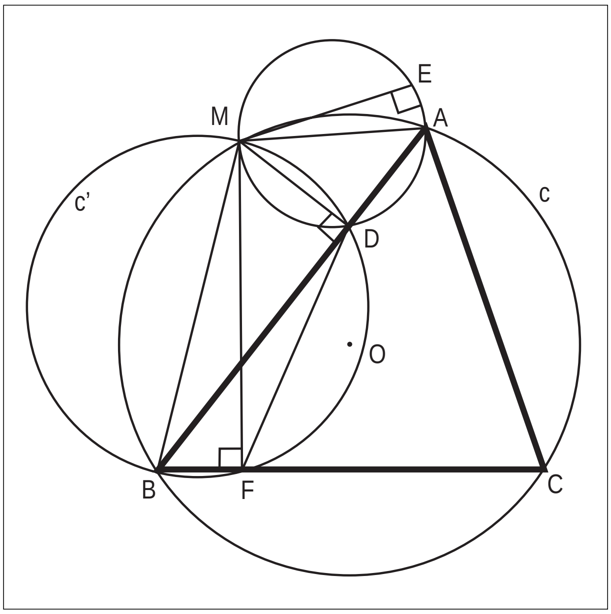
ITI “Ferrari”, Torino (TO)
ITI “Fermi”, Mantova (MN)

Riportiamo la soluzione del liceo “Galilei” di Bitonto perché più completa anche se simile a quella del “Galilei” di Catania, e la soluzione dell’ITI “Berenini”, che si differenzia nella terza parte dalla precedente.

Soluzioni

Gruppo di studenti
Seconde classi
Liceo Scientifico “G.Galilei” - Bitonto (BA)

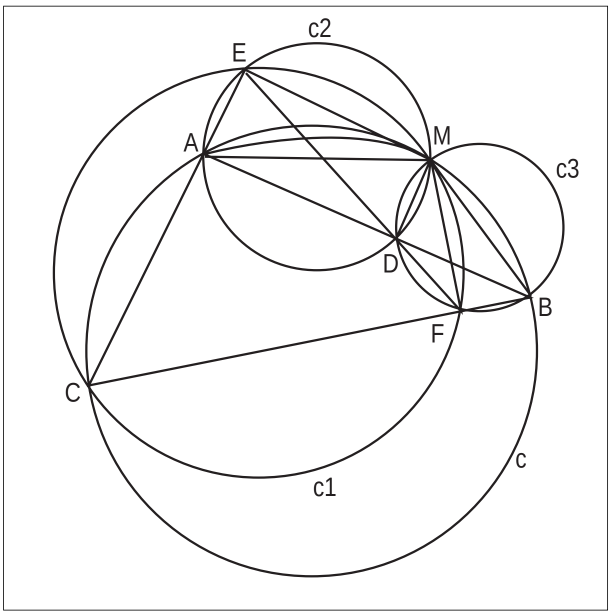
Dato il triangolo ABC si costruisce la circonferenza c ad esso circoscritta tracciando gli assi dei tre lati individuando in tal modo il circocentro O.
Tracciati i segmenti e le perpendicolari richiesti dalla traccia le risposte ai tre punti sono le seguenti:
a) I quattro quadrilateri inscrittibili sono:
1) MACB perché inscritto nella circonferenza c;
2) MEAD perché gli angoli opposti MEA e MDA sono entrambi retti per costruzione, soddisfacendo in tal modo la condizione necessaria e sufficiente di inscrittibilità di un quadrilatero;
3) MFCE perché gli angoli opposti MFC e MEC sono entrambi retti per costruzione;
4) MDFB è inscritto nella semicirconferenza c’ di diametro MB in cui sono inscritti i triangoli rettangoli MDB e MFB aventi la stessa ipotenusa MB.
b) Gli angoli AMB e EMF sono congruenti perché entrambi supplementari di BCA, il primo nel quadrilatero AMBC e il secondo in EMFC;
AME=FME-FMA, BMF=BMA-FMA e quindi AME e BMF sono angoli congruenti per differenza di angoli congruenti;
c) 1) BMF=BDF, perché angoli alla circonferenza c’ che insistono sullo stesso arco BF;
2) MDE=MEA[MAE], perché angoli alla circonferenza di diametro MA che insistono sullo stesso arco ME;



3) AME=BMF perché dimostrato nel punto b);
4) AME+EAM=90° perché angoli acuti del triangolo rettangolo EAM;
5) MDB=90° per costruzione;
Dai punti precedenti segue che:
EDF=EDM+MDB+BDF=180°
e quindi i punti E, D ed F sono allineati.

Classe 1B
dell’indirizzo scientifico tecnologico
ITIS “Berenini” di Fidenza (PR)

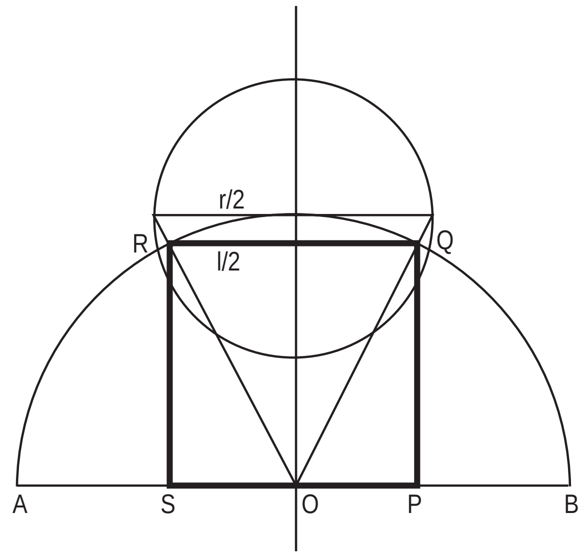
Innanzitutto precisiamo che abbiamo considerato il punto M sull’arco AB che non contiene C, anche se il testo non lo precisava esplicitamente.
a) Un quadrilatero inscrittibile è certamente AMBC in quanto per costruzione ABC sono punti della circonferenza c e M è un punto dell’arco AB della medesima circonferenza c.
Inoltre, poiché condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia inscrittibile in una circonferenza è che gli angoli opposti siano supplementari, si trovano i seguenti quadrilateri inscrittibili:



EMFC è inscrittibile nella circonferenza c1 in quanto ha gli angoli opposti MEC e MFC retti e quindi supplementari AEMD è inscrittibile nella circonferenza c2 in quanto ha gli angoli opposti MEA e MDA retti e quindi supplementari.
Inoltre i triangoli BMD e BMF sono rettangoli rispettivamente in D e in F pertanto entrambi inscrittibili nella stessa semicirconferenza di diametro BM e quindi il quadrilatero DMBF è inscrittibile in una semicirconferenza e quindi anche in una circonferenza (c3).
b) Gli angoli AMB e EMF sono congruenti perché entrambi supplementari dell’angolo ACF (in quanto opposti rispettivamente nei quadrilateri inscritti AMBC e EMFC).
Anche gli angoli AME e BMF risultano congruenti perché si ottengono sottraendo l’angolo AMF rispettivamente dall’angolo AMB e dall’angolo EMF che come detto sopra sono congruenti.
c) Per dimostrare che D,E,F sono allineati è sufficiente dimostrare che gli angoli EDA e BDF sono congruenti.
A tal fine osserviamo che l’angolo EDA e l’angolo EMA sono congruenti perché sono angoli alla circonferenza c2 che insistono sullo stesso arco EA.
L’angolo EMA e l’angolo BMF sono congruenti per quanto affermato al punto b).
Inoltre l’angolo BMF e l’angolo BDF sono congruenti in quanto angoli alla circonferenza c3 che insistono sullo stesso arco BF. Quindi per la proprietà transitiva della congruenza l’angolo EDA risulta congruente all’angolo BDF e quindi essendo A,D,B allineati risulta che anche D,E,F sono allineati.

3 - 17 Aprile 2000

E’ data una semicirconferenza c di diametro AB, centro O e raggio r.
a) Costruire il quadrato SPQR in essa inscritto, col lato SP sul diametro AB. Giustificare la costruzione.
b) Calcolare in funzione di r il lato del quadrato così inscritto.



Commento

Abbiamo ricevuto quattordici risposte provenienti da dieci scuole di cui due medie inferiori. Una delle risposte proveniva da allievi di una scuola secondaria superiore che hanno partecipato per la prima volta. Purtroppo la soluzione da loro proposta non è tra quelle accettate: auguriamo a questi ragazzi di fare meglio con il quesito di maggio.
Anche nel problema di questo mese era richiesta, nella prima parte, una costruzione: si trattava quindi di individuare, e giustificare, una strategia per ottenere la figura proposta. Tre delle risposte pervenute non hanno perseguito questo obiettivo e quindi non sono state accettate.
Tutti invece hanno risposto correttamente alla seconda parte del problema in cui si chiedeva di calcolare una misura.

Le scuole che hanno partecipato sono:

- SM di Roveredo in Piano (PN)
- SM “G. Pascoli” di Castel Bolognese (RA), due risposte
- ITI “Berenini” di Fidenza (PR), due risposte
- ITI “G. Ferraris” di S. Giovanni Valdarno (AR)
- ITI “E. Ferrari” di Torino (TO), tre risposte
- ITG “M. Buonarroti” di Caserta (CE)
- LS “G. Galilei” di Catania (CT)
- LS “G. Galilei” di Bitonto (BA)
- LS “Pitagora” di Rende (CS)
- LS “Patrizi” di Cariati (CS)

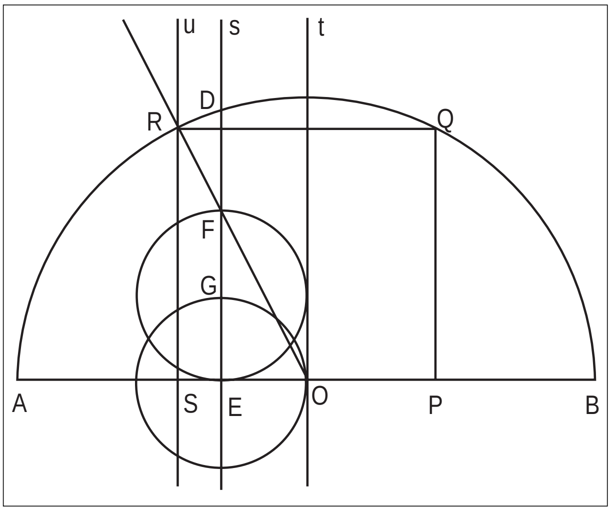
Fra le risposte che sono state accolte abbiamo individuato diversi modi per ottenere la costruzione richiesta: riporteremo una soluzione per ciascun tipo (e, per ciascuna soluzione, indicheremo le scuole che hanno inviato risposte analoghe).
Non verranno riportate via e-mail le risposte (in generale al secondo quesito) di chi ha usato editor particolari in quanto, come abbiamo più volte precisato, non sono adatti ai messaggi e-mail.
Presenteremo inoltre, sul sito web di FLATlandia, per la sua completezza, la soluzione del LS “G. Galilei” di Bitonto che propone due diverse costruzioni (la prima delle quali è uguale a quella inviata dall’ITG “Buonarroti”), e, per la sua originalità, quella del LS “G. Galilei” di Catania.

Soluzioni

Gruppo studenti
Seconde classi
Liceo Scientifico “Galileo Galilei” Bitonto (BA)
(la prima costruzione è uguale a quella inviata dall’ITG “Buonarroti”)

Parte **a)**
Se SPQR è il quadrato inscritto nella semicirconferenza c di diametro AB, centro O e raggio r, si osserva che il triangolo rettangolo OPQ ha il cateto OP=1/2 PQ, per la simmetria rispetto alla retta t passante per O e perpendicolare ad AB.
Da questa osservazione nasce l’idea per la seguente costruzione del quadrato inscritto nella semicirconferenza:

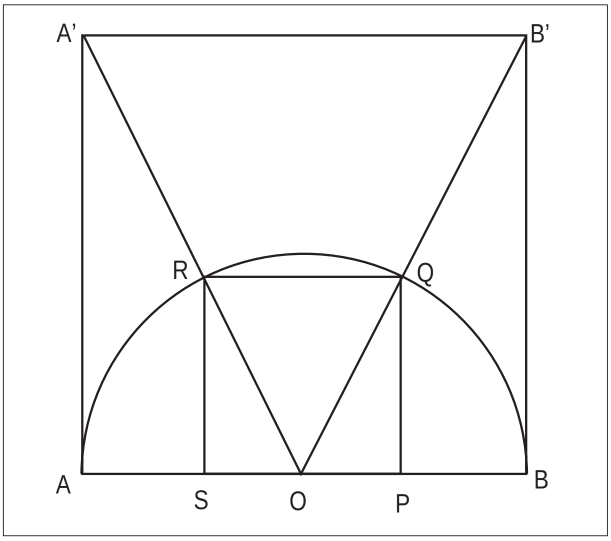
- tracciamo la semicirconferenza c di diametro AB=2r e centro O;
- prendiamo un punto E qualsiasi sul diametro AB;
- tracciamo la retta s per E perpendicolare ad AB e stacchiamo su questa un segmento EF=2 EO, mediante una prima circonferenza c’ di centro E e raggio EO e una seconda circonferenza c’’ di centro G, intersezione tra c’ ed s, e raggio EG;
- sia R l’intersezione tra la semiretta OF e la semicirconferenza c e tracciamo per R la retta u perpendicolare ad AB nel punto S. Il triangolo SOR è simile ad EOF e pertanto ha SO=(1/2)SR;
- RS è il lato del quadrato inscritto nella semicirconferenza c;
- completiamo la costruzione del quadrato tracciando il punto P simmetrico di S rispetto ad O ed il punto Q simmetrico di R rispetto a t.



Parte **a) bis**
La costruzione del quadrato inscritto nella semicirconferenza c può essere fatta anche nel seguente modo:

- costruiamo il quadrato ABB’A’ di lato AB che contiene la semicirconferenza;
- uniamo i vertici A’ e B’ con il centro O e siano R e Q i punti di intersezione con la circonferenza;
- da R e da Q mandiamo le perpendicolari ad AB che lo intersecano in S e P, ottenendo il quadrilatero SPQR inscritto nella semicirconferenza;
- verifichiamo che SPQR è un quadrato:

i triangoli OPQ e OBB’ sono simili avendo l’angolo POQ in comune, gli angoli OPQ = OBB’ retti pertanto QP:BB’=OQ:OB’; simmetricamente sono simili i triangoli SOR e AA’O; i triangoli A’B’O e RQO, avendo l’angolo ROQ in comune e i lati che lo comprendono in proporzione, sono simili per il 2° criterio e quindi RQ è parallelo ad A’B’ e si ha che RQ:A’B’=OQ: OB’. Per transitività RQ:A’B’=QP:BB’= SR:A’A. SPQR è quindi simile ad ABB’A’ e pertanto è esso stesso un quadrato.



Parte **b)**
Per calcolare il lato l del quadrato inscritto in funzione di r, applichiamo la relazione pitagorica al triangolo SOR:
$l^2 + (l/2)^2 = r^2$ da cui $l^2 = 4/5\, r^2$ e quindi $l = (2\, r \sqrt{5})/5$

Daniele Urzì
Classe IIB
Liceo Scientifico Galileo Galilei (Catania)
a) Siano OC il raggio perpendicolare ad AB ed M il suo punto medio (MO = MC = r/2). Puntando il compasso in M e con apertura uguale ad MO si tracci una circonferenza t. Si unisca A con M e sia D il punto di intersezione del segmento AM con t. Dal punto D si tracci una retta perpendicolare ad AB, che interseca AB in un punto S e la semicirconferenza iniziale in un punto R. Dal punto R si conduca la perpendicolare ad SR e sia Q il punto di intersezione con la semicir-

conferenza di partenza; si tracci da Q la perpendicolare a QR e sia P il suo punto d'intersezione con AB. Ricordando che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è congruente a due angoli piatti, in riferimento al quadrilatero SPQR, l'angolo SPQ è retto. Il rettangolo SPQR così ottenuto è il quadrato richiesto. Infatti, dimostriamo algebricamente che due suoi lati consecutivi sono congruenti.
Si dimostra facilmente che CO è l'asse di RQ. Quindi, essendo i segmenti SP ed RQ uguali e paralleli, CO è anche asse di SP (in particolare SO OP).
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AOM si trova :

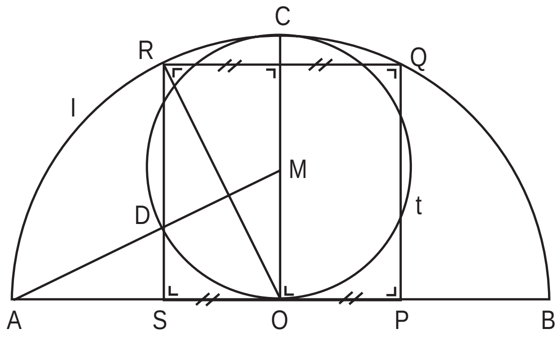


Figura in *Cabri II* di Carlo Longhitano

$$AM = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{5}$$

Si considerino le trasversali AM ed AO alle parallele SR e CO, per la corrispondenza di Talete si ha AM / AO = DM / SO, sostituendo

$$\frac{\frac{r}{2}\sqrt{5}}{r} = \frac{\frac{r}{2}}{SO} \Rightarrow SO = \frac{r}{\sqrt{5}}; \quad quindi \quad SP = \frac{2r}{\sqrt{5}}$$

Dal teorema di Pitagora Applicato al triangolo rettangolo SOR si ricava

$$RS = \frac{2r}{\sqrt{5}}$$

Quindi essendo RS = SP rimane dimostrato che il rettangolo SPQR è il quadrato cercato.

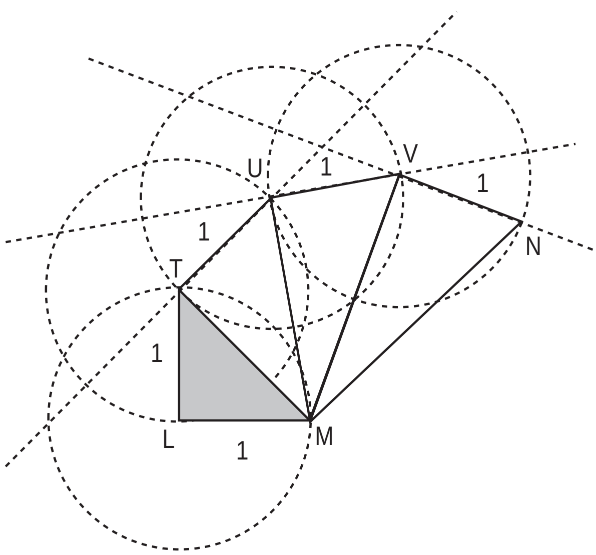
b) Dalla giustificazione da noi trovata si deduce facilmente che il lato l di un quadrato inscritto in una semicirconferenza di raggio r è

$$l = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot r$$

NOTA: si può dimostrare che il segmento AD è la parte aurea del raggio r.

Classe 2A
Scuola Media Statale di Roveredo in Piano (PN)
(è sezione staccata della scuola media "G.Zanella" di Porcia)

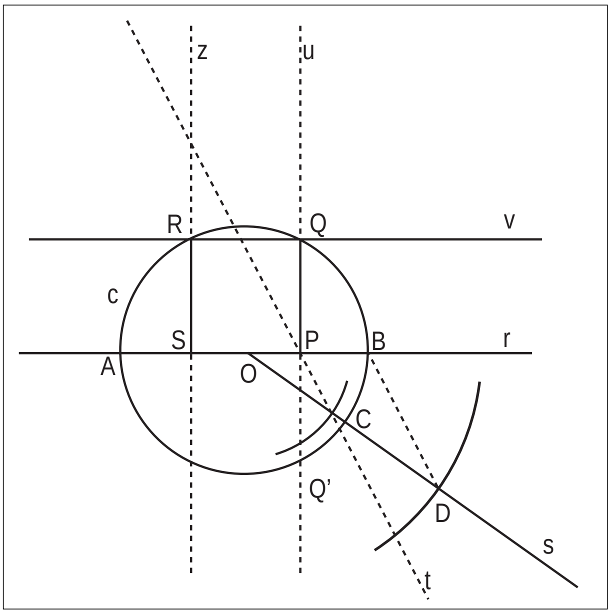
- In un quadrato inscritto in una semicirconferenza il punto medio del lato sul diametro coincide con il centro. Il raggio è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo in cui un cateto è doppio dell'altro (s'immagini il triangolo OPQ nella Fig.B). Se consideriamo il cateto minore pari all'unità, l'ipotenusa è $\sqrt{5}$.
- Costruiamo un segmento unitario ed uno pari a $\sqrt{5}$ da impiegare nella composizione B. Sarebbe sufficiente disegnare un triangolo rettangolo i cui cateti stanno nel rapporto 1 a 2, ma preferiamo proporre la costruzione della Fig. A in quanto rappresenta una procedura generale per ottenere segmenti pari a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ (MN), ecc., essendo LM ed LT segmenti unitari ed i triangoli considerati tutti rettangoli.



a)
1. Circonferenza c di centro O; retta r passante per O; intersezioni di c ed r (A,B).
2. Semiretta s di origine O; compasso di centro O e raggio LM (Fig. A), intersezione con s: punto C; compasso di centro O e raggio MN (Fig. A), intersezione con s: punto D.

3. Segmento BD; retta t parallela a BD passante per C; intersezione r con t: punto P. (Per il Teorema di Talete i segmenti OP ed OB sono nel rapporto di 1 a $\sqrt{5}$).
4. Retta u per P, perpendicolare ad r, e sua intersezione con c: Q, Q'; retta v per Q, parallela ad r, e intersezione con c: punto R; retta z per R e perpendicolare ad r, intersezione tra le due rette: punto S. Poligono (quadrato) PQRS.

b)
Il raggio della semicirconferenza misura $\sqrt{5}$ quando il lato del quadrato è di 2, quindi il lato è pari al doppio del rapporto tra il raggio e $\sqrt{5}$.

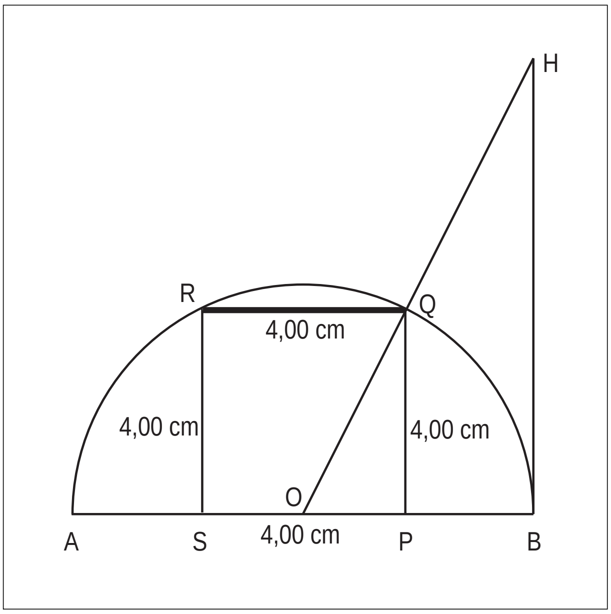


Michele Medioli
Classe IA
del liceo Scientifico Tecnologico dell'ITI "Berenini"
(analoga risposta hanno inviato gli allievi del LS "Pitagora").

Risposta **A)**
COSTRUZIONE
Data la semicirconferenza AB di centro O, costruire il quadrato ABCD sul diametro AB ed unire i vertici C e D con il punto O. I segmenti CO e DO intersecano la semicirconferenza nei punti Q e R. Siano S e P le proiezioni ortogonali di R e Q sul diametro AB . Si dimostra che SPQR è il quadrato richiesto:
DIMOSTRAZIONE
I triangoli AOD e BCO sono congruenti perché sono triangoli rettangoli con i cateti congruenti.
I triangoli SOR e AOD sono simili, perché sono rettangoli e hanno un angolo in comune; analogamente per i triangoli PQO e BCO.
Inoltre i triangoli SOR e PQO sono congruenti per essere simili a figure congruenti e per avere RO congruente a QO.
Essendo DA il doppio di AO, anche RS è doppio di SO e QP è il doppio di PO:
dunque si ha RS congruente a SP che è congruente a PQ.
La figura SPQR è un quadrato avendo 3 lati congruenti e i due angoli compresi retti.

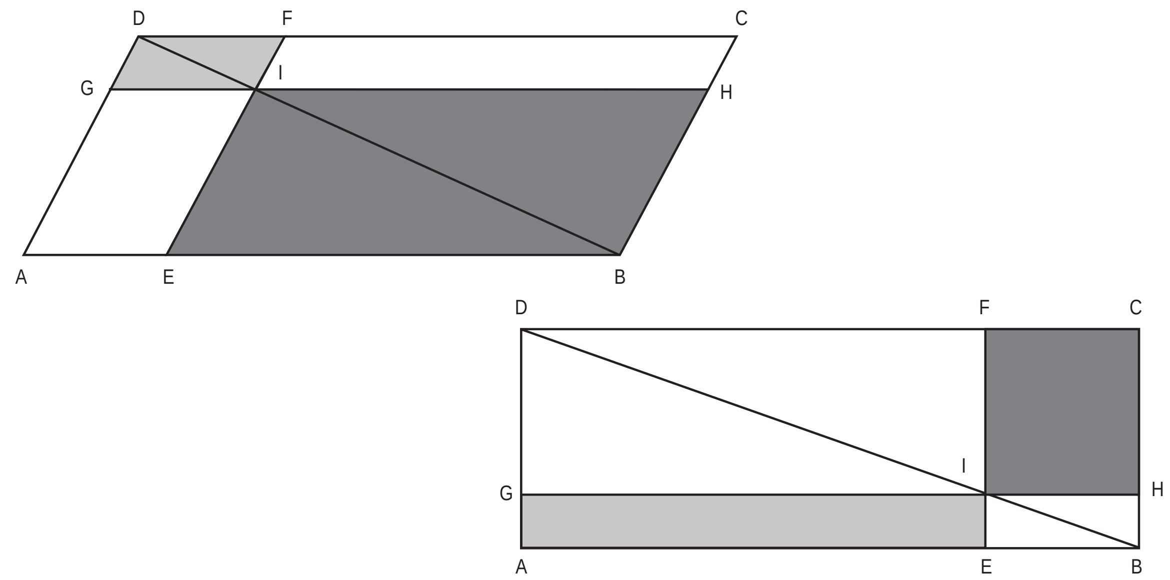
Alberto Boscaggin e Paolo Gurgo
Classe IIA s.t.
dell'ITI "E. Ferrari"
(analoga risposta hanno inviato gli altri allievi dello stesso istituto e quelli degli ITI "Berenini"(I-B) e "G. Ferraris")

A) Costruiamo un triangolo OBH, rettangolo in B e avente OB per cateto minore e BH = 2r per cateto maggiore.
Indichiamo con Q il punto di intersezione tra il segmento OH e la semicirconferenza e con P la proiezione di Q su diametro AB.
Individuiamo i punti S e R, simmetrici di P e Q rispetto all'asse del segmento AB. Il quadrilatero SPQR è un quadrato.
Giustificazione:
Il triangolo OPQ è simile al triangolo OBH poiché hanno un angolo in comune HOB e un angolo retto.
Quindi possiamo scrivere, HB : PQ = OB : OP cioè, 2r : l = r : OP da cui OP = l/2
Poiché SO = OP , SP = PQ = l
Poiché la costruzione è simmetrica rispetto all'asse del segmento AB, il triangolo OSR è congruente al triangolo OPQ. Quindi il quadrilatero SPQR è un quadrato.



2 - 15 Maggio 2000

Siano A, B, C, D i vertici di un parallelogramma nominati in verso antiorario. Sia I un punto qualunque della diagonale BD. Sia EF il segmento per I parallelo al lato AD che ha gli estremi E ed F che appartengono rispettivamente ai lati AB e CD. Sia GH il segmento per I parallelo al lato AB con gli estremi G ed H che appartengono rispettivamente ai lati AD e BC.
a) Dimostrare che dei quattro parallelogrammi che si formano quelli attraversati dalla diagonale sono simili.
b) Supposto che l'angolo ABC sia retto e che il segmento BI sia la terza parte di BD stabilire il rapporto delle aree dei parallelogrammi AEIG e CFIH.
c) Rispondere alla domanda del punto precedente nel caso in cui l'angolo ABC non sia retto ed I sia un punto qualunque della diagonale BD.



Commento

Questo mese abbiamo ricevuto undici risposte provenienti da dieci scuole, fra le quali due scuole medie e una scuola elementare. E' giunta una ulteriore soluzione inviata da parte di alcuni allievi di una classe terza di liceo scientifico cui abbiamo risposto a parte in quanto l'attività di *FLATlandia* è rivolta agli studenti della scuola media e del biennio di scuola superiore.
Ci complimentiamo con le quinte classi del Circolo Didattico di Alessandria per il lavoro da loro svolto, anche se largamente carente nelle giustificazioni.

Le scuole che hanno partecipato sono:

SE "G. Galilei" II Circolo Alessandria
SM "Cerreta" Bologna
SM di Roveredo in Piano (PN)
ITI "Berenini" di Fidenza (PR)
ITI "E. Ferrari" di Torino (TO)
ITG "M. Buonarroti" di Caserta (CE)
ITG "Rondani" di Parma (PR)
LG "S. Weil" di Treviglio (BG)
LS "G. Galilei" di Catania (CT)
LS "G. Galilei" di Adria (RO), due risposte

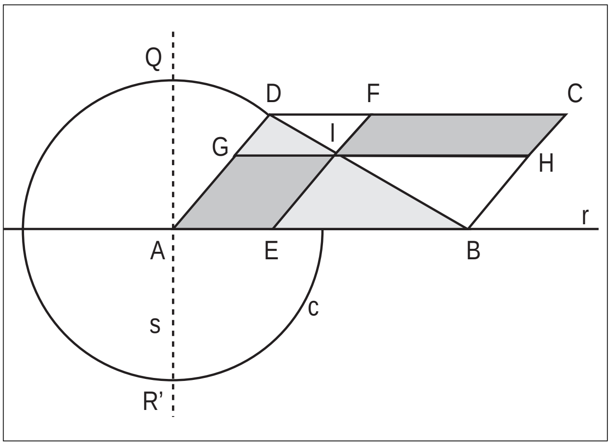
Il problema di questo mese non presentava particolari difficoltà: si trattava di esaminare i legami fra le figure ottenute scomponendo un parallelogrammo con due rette parallele ai lati ed intersecantisi su una diagonale. In effetti, come è

stato rilevato in alcune risposte, il punto **b)** era un caso particolare del punto **c)** e presentava addirittura dei dati superflui. In tutte le risposte pervenute il problema è stato risolto: qualcuno si è dilungato eccessivamente nelle giustificazioni, qualcuno e' invece stato troppo conciso a scapito della completezza; l'esposizone è in generale buona, pochi gli errori rilevati, dovuti soprattutto a distrazione.
Si sono delineate sostanzialmente due tipi di soluzioni sia per il punto a), in cui sono stati utilizzati il teorema di Talete o la similitudine di triangoli, sia per le parti **b)** e **c)**, in cui sono stati utilizzati l'equiscomponibilità di figure o il calcolo delle aree. Riportiamo, via e-mail, la risposta della SM di Roveredo, citando quelle simili, la risposta dell'ITI "Berenini" (prima e seconda parte) e un commento al punto b) di Daniele Urzi', LS "G. Galilei" di Catania.
Riportiamo inoltre, nel sito web di FLATlandia, la figura animata dell'ITI "Berenini" e la risposta dell'ITI "Ferrari", simile nelle parti b) e c) a quelle inviate dal LS "Galilei" di Adria.

NOTA: le correzioni o i commenti al testo sono riportate in parentesi quadra.

Soluzioni

CLASSE 2A - Scuola Media Statale di Roveredo in P. (PN)
(Sezione Staccata della S.M.S. "G. Zanella" DI Porcia)
[Soluzioni simili a questa sono state inviate dagli allievi dell'ITG "Buonarroti", del LS "G. Galilei" e dell' ITG "Rondani"]



[r ed s sono rette perpendicolari passanti per A, centro della circonferenza c;
D si muove lungo la circonferenza c, quando coincide con R o R' il parallelogramma si fa rettangolo;
I si sposta lungo il segmento DB]

a)

- I triangoli DGI, IEB sono simili (gli angoli corrispondenti risultano congruenti essendo formati da lati paralleli per costruzione).
- I parallelogrammi DFIG, IGBE hanno gli angoli corrispondenti congruenti avendo i lati paralleli per costruzione, inoltre i lati corrispondenti stanno nello stesso rapporto (di similitudine) dei triangoli del punto precedente; quindi [i parallelogrammi] risultano simili.

c)

- Il segmento DB divide in due triangoli congruenti ciascuno dei tre parallelogrammi di cui è diagonale o che la contiene: ogni triangolo ha due lati coincidenti con i lati consecutivi del parallelogramma ed il terzo lato in comune con l' altro triangolo (metà del parallelogramma).
- Dai triangoli congruenti ABD, BCD sottraiamo rispettivamente la coppia di triangoli GID, EBI e IFD, BHI; rimangono i parallelogrammi AEIG e IHCF che risultano equivalenti per differenza di triangoli congruenti. (Il loro rapporto è uno).

b)

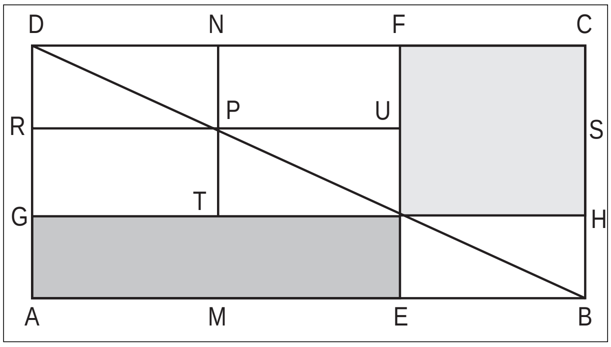
- Il quesito proposto riguarda un caso particolare di parallelogramma, il rettangolo.
  Tutti i parallelogrammi considerati precedentemente ora risultano, per costruzione, essere dei rettangoli che conservano le proprietà dei parallelogrammi. Il rapporto tra le aree quindi, risulta uno.

Paolo Guasti, Jacopo Guarneri, Massimiliano Montuschi e Gian Luca Zuccheri
classe 1B dell'indirizzo scientifico tecnologico
ITIS "BERENINI" di Fidenza.

a)

Le figure DGIF e IEBH sono parallelogrammi perché hanno coppie di lati opposti paralleli.
Inoltre l'angolo GDF è uguale all'angolo EIH perché sono entrambi corrispondenti dell'angolo AGI.
L'angolo DFI è uguale ad IHB perché corrispondente di DCB.
Perciò i due parallelogrammi hanno angoli congruenti.
GIF è congruente a GDF perché sono angoli opposti di un parallelogramma e EBH è congruente a EIH perché sono angoli opposti di un parallelogramma; quindi, per la proprietà transitiva, GIF è congruente a EBH ; analogamente si

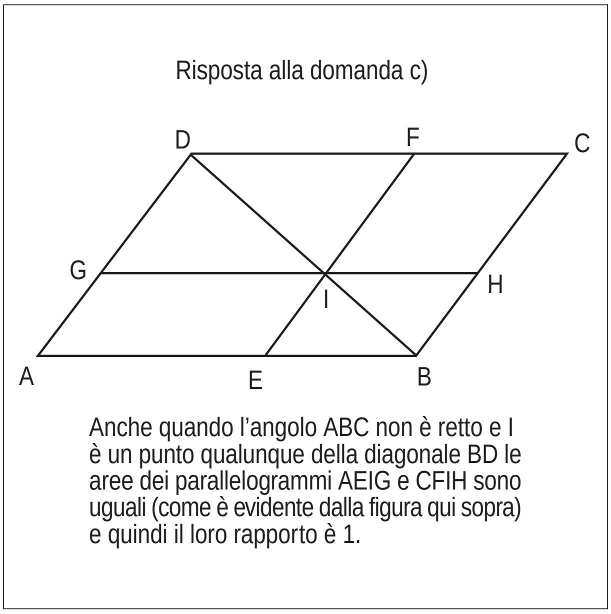
prova che DGI è congruente a IEB.
Inoltre le coppie di lati che comprendono angoli congruenti sono proporzionali, infatti, utilizzando il teorema di Talete nel fascio di rette AB // GH // DC tagliate da AD e DB e nel fascio di rette AD // EF // BC tagliate da AB e DB, si ottengono rispettivamente le seguenti proporzioni:



GD: DI = AG: IB
AE: DI = EB: IB
GD: AG = AE: EB, ma essendo AG = EI e AE= GI (segmenti paralleli compresi tra rette parallele)si ottiene GD: AI =GI: EB.

b)
I parallelogrammi AEIG IHCF che in questo caso sono rettangoli, hanno aree uguali perché se si considera il punto P di DB tale che PB= 2/3 DB e da esso si conducono il segmento RS // AB e il segmento MN // AD, detti T e U rispettivamente le intersezioni di MN con GH e EF con RS, i rettangoli AEIG e IHCF risultano scomposti in due rettangoli congruenti perchè AM =ME =EB =IH =US =1/3 AB e MT=ET=IU=FU=1/3 BC sempre grazie al teorema di Talete. Pertanto le aree di AEIG e IHCF sono uguali e quindi il loro rapporto è 1.

c)



Commento al punto b) proposto da:
Daniele Urzì
Classe 2B
Liceo Scientifico "G.Galilei" Catania

Nel punto **b)** si ha che BI =(1/3) DB. Dalla similitudine dei triangoli DGI ed IEB si ricava che il rapporto fra le superficie dei rettangoli DGIF e IEBH è uguale a 4.
In generale è facile dimostrare che se la diagonale BD viene divisa in n parti uguali ed è BI = (1/n) BD il rapporto tra i rettangoli sopra indicati è uguale a $(n-1)^2$.

Alberto Boscaggin
Classe 2A st ITIS E. Ferrari Torino

a)
Il triangolo EIB è simile al triangolo ABD, poiché EI è parallela a AD Il triangolo GID è simile al triangolo ABD, poiché GI è parallela a AB.
Quindi EIB è simile GID.
Essendo EIHB e GIFD due parallelogrammi, i lati opposti sono congruenti. I due parallelogrammi hanno quindi [gli angoli uguali e] i lati ordinatamente in proporzione, per cui sono simili.

b)

Il triangolo ABD è simile al triangolo EBI.

Il loro rapporto di similitudine è BD/IB, cioè BD/((1/3)*BD), cioè 3 Quindi AB = 3EB, cioè AB = 3IH, da cui IH = (1/3)*AB

AD = 3IE, cioè AD = 3AG, da cui AG = (1/3)*AD

Il triangolo ABD è simile al triangolo GID

Il loro rapporto di similitudine è BD/ID, cioè BD/((2/3)*BD), cioè 3/2

Quindi AB = (3/2)*GI, cioè AB = (3/2)*AE, da cui AE = (2/3)*AB

AD = (3/2)*GD, cioè AD = (3/2)*IF, da cui IF = (2/3) * AD

Il rapporto tra le aree è dato da (AE*AG)/(IH*IF)

Sostituendo i valori trovati, abbiamo

((2/3)*AB*(1/3)*AD)/((1/3)*AB*(2/3)*AD) = 1

c)

Il triangolo GID è simile al triangolo EBI.

Il loro rapporto di similitudine è ID/IB = k

Quindi GI = k*EB, cioè AE = k*IH

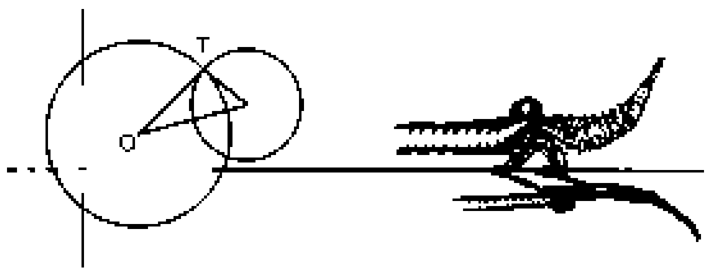
Indichiamo con m [la misura del]l’altezza di GID relativa al lato GI e con n [la misura del]l’altezza di EBI relativa a EB

Quindi m = k*n.

Il rapporto tra le aree dei due parallelogrammi è (AE*n)/(IH*m).

Infatti l’altezza di AEIG è congruente all’altezza di EBI e l’altezza di CFHI è congruente all’altezza di GID. (sono la distanza tra rette parallele).

Sostituendo, abbiamo (k*IH*n)/(IH*k*n) = 1



Alcune considerazioni

Scorrendo la tabella che affianca la mappa, sfogliando le risposte pubblicate e ripensando a quante invece non lo sono state è interessante osservare, nel microcosmo dei partecipanti a FLATlandia, le differenze che si evidenziano nel comportamento e nell'interesse relativi alla attività.
Vi sono classi che partecipano coralmente, gruppi costituiti da ragazzi di classi parallele, ragazzi che partecipano singolarmente o in collaborazione con uno o più compagni.
Dietro di loro ci sono sicuramente insegnanti che riconoscono il ruolo formativo della geometria, stimolando nei loro allievi la curiosità per le questioni geometriche.
Segnaliamo ancora la partecipazione di una quinta elementare, che ha inviato più volte le costruzioni realizzate con il software Cabri II.
Vi sono classi e ragazzi che seguono l'attività con una continuità veramente lodevole, altri invece che partecipano in modo saltuario, trovando probabilmente difficoltà a conciliare il loro percorso scolastico con i quesiti proposti. Alcuni, dopo una prima apparizione hanno abbandonato l'attività. Non vorremmo che questi ultimi fossero demotivati dall'insuccesso della loro risposta.
La partecipazione a FLATlandia non deve essere necessariamente una dimostrazione di abilità, anche se le risposte da pubblicare vengono scelte fra le migliori. Deve essere soprattutto la espressione di un interesse a misurarsi e a confrontarsi in un impegno logico-matematico, che si svolge tramite le nuove tecnologie, che accomuna scuole e ragazzi sparsi in tutta la nazione e non solo. Abbiamo avuto occasione di appurare che i problemi di FLATlandia vengono letti, attraverso Internet, anche da scuole di lingua italiana che si trovano all'estero.

Ringraziamenti

Ancora una volta le curatrici di questo terzo resoconto sull'attività di FLATlandia desiderano ringraziare:
Anna Maria Arpinati e Valerio Mezzogori, per aver progettato e promosso questa attività;
Consolato Pellegrino per il prezioso apporto delle sue competenze disciplinari nella scelta dei problemi e nella correzione degli elaborati;
Alberto Mingardi per la sua collaborazione nella gestione delle pagine web;
il Consiglio Direttivo dell'IRRSAE Emilia Romagna per avere approvato l'attività e messo a disposizione i mezzi dell'Istituto per la sua riuscita;
la casa editrice Loescher di Torino, distributrice del software Cabri-géomètre, per avere finora supportato l'iniziativa sostenendo le spese delle precedenti e della presente pubblicazione.

Saluti

Tutto il gruppo di FLATlandia ringrazia e saluta il prof. Consolato Pellegrino che ci ha seguiti e consigliati in questi tre anni di attività e che, causa i suoi molteplici impegni di lavoro, non può continuare a collaborare col gruppo.

"Nessun altro studio richiede meditazioni più pacate; nessun altro meglio induce ad essere cauti nell'affermare, semplici ed ordinati nell'argomentare, precisi e chiari nel dire; e queste semplicissime qualità sono sì rare che possono bastare da sole ad elevare chi ne è dotato al di sopra della maggioranza degli uomini.
Perciò io esorto a studiare matematica pur chi si accinge a diventare avvocato o economista, filosofo o letterato, perché io credo e spero che non gli sarà inutile saper ben ragionare e chiaramente esporre."

A. Padoa (1868 - 1937)

FLAT*landia*, geometria on-line

L'IRRSAE dell'Emilia Romagna,
valendosi dell'apporto di operatori interni
e di collaboratori esterni all'Istituto,
ha proposto questo servizio in rete
rivolto a docenti e alunni
che si interessano di matematica.
Il servizio, promosso nell'anno scolastico '97/'98,
e giunto al suo quarto anno di attività,
ha visto l'adesione di Istituzioni Scolastiche
di vario tipo.

Tutto il progetto è in linea con le direttive
della C.M. 270 (Prot. N. 2475)
del 12 Novembre 1999, denominata Progetto SeT
(Progetto speciale per l'Educazione Scientifica e
Tecnologica)

Nel presente volumetto il resoconto
del terzo anno di attività

I.R.R.S.A.E. Emilia Romagna - Sezione Scuola Media

Supplemento al n. 5 settembre - ottobre 1999, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento Educativi dell'Emilia Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Giancarlo Cerini, proprietà IRRSAE - Emilia-Romagna.