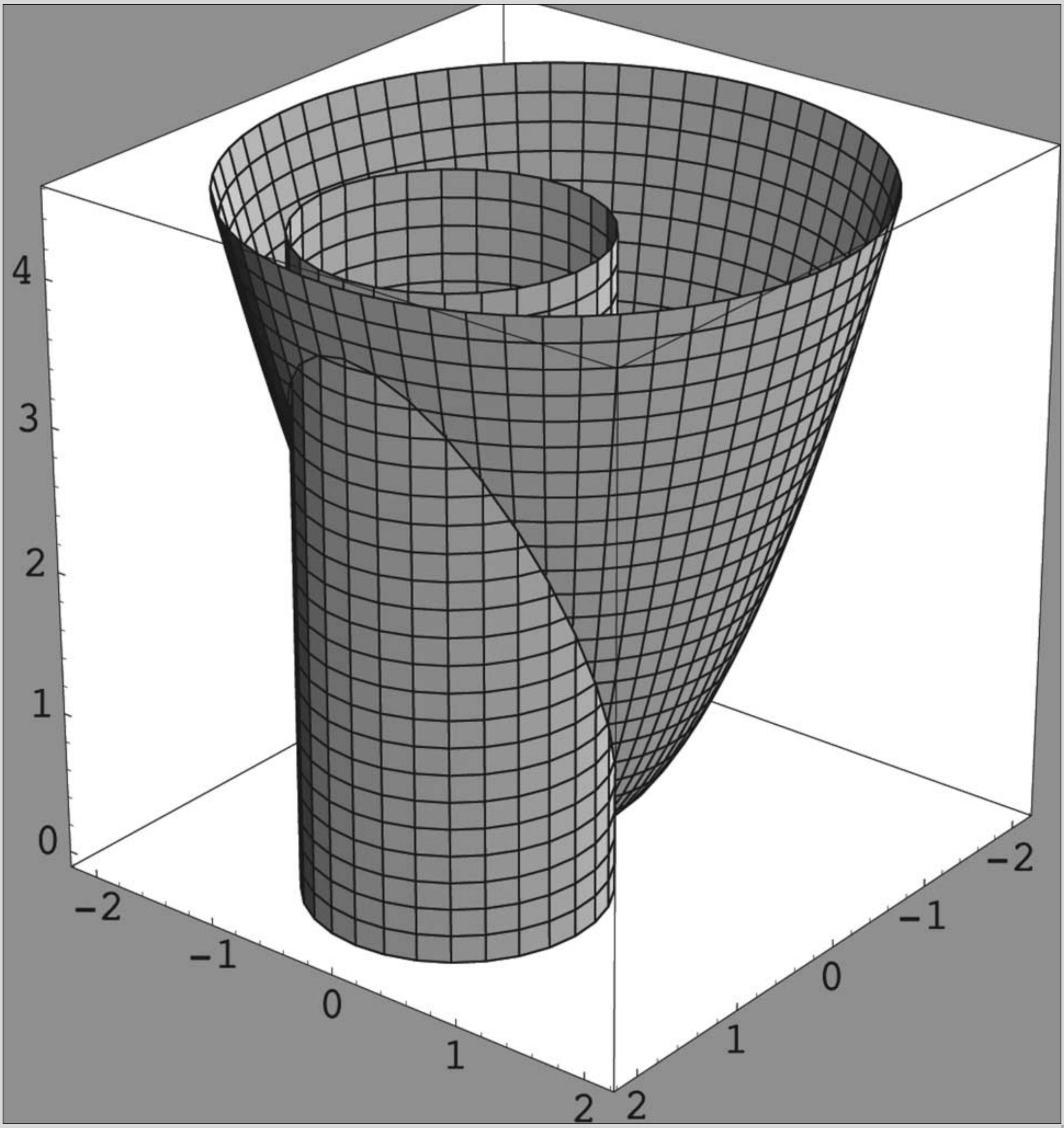
CABRIRRSAE 2003

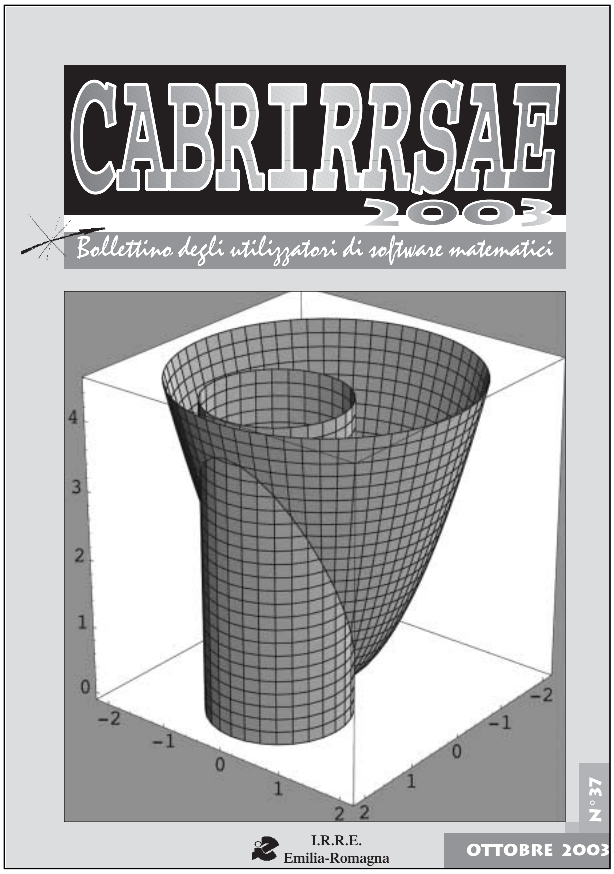
Bollettino degli utilizzatori di software matematici



N° 37

I.R.R.E.
Emilia-Romagna

OTTOBRE 2003



L'immagine

La figura realizzata col software Mathematica, mostra l'intersezione tra un paraboloide di rotazione ed un cilindro circolare retto di cui l'asse del paraboloide è una delle generatrici.

In questo numero

In apertura del bollettino viene presentata la trascrizione di una intervista a J.-M. Laborde, il padre di Cabri-Géomètre, avvenuta durante il convegno del 14 Febbraio 2003, i cui atti sono stati pubblicati nel numero precedente.

Nella sezione ***Cabri discusso*** proponiamo due articoli. Il primo contiene alcune considerazioni di un'insegnante di scuola secondaria di primo grado sulla importanza dell'uso di linguaggi di programmazione, abbinati a software, nell'insegnamento della matematica; il secondo riporta le riflessioni, suscitate dal problema di Flatlandia dell'Ottobre 2002, di un'insegnante che si occupa di ricerca didattica.

Nella sezione ***Come fare*** presentiamo quattro lavori dedicati tutti alla scuola secondaria superiore.

Nel primo, dopo alcune opinioni sulla opportunità di

Indirizzo

Bollettino CABRI*RRSAE* 2003
IRRE-Emilia Romagna
Via Ugo Bassi, 7 - 40121 Bologna
Tel. (051)22.76.69 - Fax (051)26.92.21
E-mail: cabri@kidslink.scuole.bo.it
http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/
Gruppo di discussione:
E-mail: cabrinews@kidslink.scuole.bo.it

Fardiconto:
http://kidslink.scuole.bo.it/fardiconto/

Flatlandia:
http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/flatlandia/

La versione elettronica del bollettino è consultabile a questo indirizzo:
http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/rivista.html

Supplemento al n.2, Marzo-Aprile 2003, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca Educativa dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24 - 10 - 1980. Direttore resp. Luciano Lelli, Direttore edit. Arnaldo Luisi, proprietà IRRE/ER.

Progettazione grafica e videoimpaginazione GRAPHICART
Via Fondazza, 37 - 40125 Bologna
Tel. Seg. Fax 051 30.70.73 - Tel. Seg. Modem 051 42.920.47

Sommario

---

segue da in qusto numero

ricorrere al computer per simulare fenomeni fisici, si propongono; una serie di esperienze sui sistemi di riferimento, in cui si utilizza il software Cabri.
Segue la "storia" di una risposta non accettata al problema di FLATlandia di Dicembre 2002, raccontata da uno studente liceale.
Nel terzo articolo si illustra la realizzazione con Cabri di tassellazioni del piano euclideo, a partire da poligoni a simmetria pentagonale, che furono studiate da Keplero.
Abbiamo infine un lavoro didattico sull'analisi infinitesimale in cui, con l'aiuto di Cabri-Géomètre II Plus, si ripercorre lo sviluppo storico di tale disciplina.
Chiude il bollettino una ***Proposta di lavoro*** dove i lettori sono invitati a cimentarsi in una costruzione con riga e compasso.

Corsi e seminari

La redazione annuncia con grande piacere che a Roma, dal 9 al 12 Settembre 2004, si terrà il prossimo CABRIWORLD.
Ne è stata data notizia nel nuovo sito su Cabri, curato da Cabrilog, Grenoble, Francia, all'indirizzo: **www.cabri.com**
Appuntamento quindi a Roma per tutti gli appassionati di Cabri-Géomètre

Cabri in Biblioteca

E' uscito il Quaderno di CABRI*RRSAE* n.23, *Alla Scoperta dei Luoghi Geometrici con Cabri Géomètre II nelle scuola media*, di Giuseppe Giacometti. Il quaderno contiene schede di lavoro che utilizzano la flessibilità del sw Cabri per condurre i ragazzi alla scoperta dei luoghi in un percorso didattico pensato e sperimentato per una scuola media inferiore.
Il quaderno è disponibile in formato PDF all'indirizzo http://kidslink.scuole.bo.it/cabri.
Può essere richiesto in formato cartaceo inviando, tramite l'Istituto di appartenenza, un fax all'IRRE-Emilia Romagna (051 269221).

Inviateci i vostri articoli

C**ABRI***RRSAE* pubblica contributi relativi all'utilizzo del pacchetto Cabri-géomètre e di altri software matematici, con particolare attenzione alla valenza didattica e all'inserimento nel curricolo scolastico.
Ogni articolo (non più di 4 cartelle) deve pervenire, su supporto magnetico e cartaceo, ad uno degli indirizzi indicati in copertina, rispettando le seguenti modalità:

• *SUPPORTO CARTACEO*
- testo e figure devono essere impaginate secondo le intenzioni dell'autore (anche in bassa qualità di stampa)
- una stampata delle sole figure ***in alta qualità di stampa***
- una stampata dei grafici ***in alta qualità di stampa***
- anche le immagini catturate dallo schermo devono essere accompagnate da una stampata ***in alta qualità***

• *SUPPORTO MAGNETICO*
- il file di *testo* in ***formato Word*** (estensione .doc, meglio sarebbe se fosse .mcw) non deve contenere le figure che invece devono essere collocate in un file a parte.
- altri materiali (tabelle, grafici, ecc.) devono pervenire in formato originale, con indicazione dell'applicativo che le ha generate, comunque sempre accompagnate da una stampata di alta qualità.
- altre immagini (tipo quelle tridimensionali) generate da qualunque programma, devono essere esportate come prodotti vettoriali, cioè con estensione A.I.

Il materiale inviato non sarà restituito.

Siamo ugualmente interessati a ricevere materiali più articolati sull'utilizzo di Cabri; tali materiali possono essere diffusi mediante la collana "Quaderni di **CABRI***RRSAE* ".

SPECIALE CONVEGNO

Intervista a Jean-Marie Laborde, l'ideatore di Cabri Géomètre

a cura di Giuseppe Accascina
Università La Sapienza - Roma
e Luigi Tomasi
Liceo Scientifico "G. Galilei" Adria - Rovigo

Giuseppe Accascina (a destra), Luigi Tomasi (a sinistra) durante l'intervista con Jean-Marie La borde (al centro)

Introduzione

L'idea per questa intervista è di Anna Maria Arpinati dell'IRRE Emilia Romagna ed è stata realizzata in occasione dell Convegno organizzato dall'IRRE Emilia Romagna sul tema "L'insegnamento della Geometria oggi e domani (CABRI*RRSAE* anno 10°) del 14 febbraio 2003, a Bologna, al quale ha partecipato con una brillante relazione sulle novità di Cabri II Plus anche Jean-Marie Laborde, ideatore e "padre spirituale" del software di geometria più diffuso nel mondo e in Italia.
In una pausa del convegno abbiamo incontrato Jean-Marie, che è stato molto disponibile a rispondere ad alcune nostre domande su Cabri Géomètre, la storia del software e i progetti attuali e futuri.
Le domande da porre sono state inizialmente preparate da chi scrive con l'aiuto di Anna Maria Arpinati.
All'intervista ha dato il suo contributo anche Giuseppe Accascina, Università di Roma, che ha integrato alcune domande e ne ha aggiunte altre particolarmente interessanti.
Durante l'intervista Jean-Marie Laborde ha ripercorso la storia di Cabri nei suoi 15 anni di vita ufficiale e i progetti di ricerca che hanno li hanno preceduti. Con la storia del software, l'autore ripercorre anche la storia delle innovazioni tecnologiche succedutesi in modo rapidissimo nel mondo dell'informatica che hanno accompagnato e favorito lo sviluppo di Cabri. Oggi parlare di interfacce grafiche e di software interattivo può sembrare una banalità, ma 15-20 anni fa non era così e non è stato scontato intraprendere questa strada. Nel ripercorrere la storia di Cabri, quindi, Jean-Marie Laborde ricorda che senza l'interfaccia grafica del computer Lisa e poi del Macintosh (entrambi prodotti dalla Apple), semplicemente Cabri non esisterebbe.
L'intervista è stata anche l'occasione per conoscere quali sono i progetti attuali e futuri di Cabrilog, la società fondata nel 2000 da Jean-Marie Laborde e che ora si occupa dello sviluppo e dell'aggiornamento del software, per computer e per calcolatrici grafico-simboliche, oltre che per parlare delle innovazioni e anche delle nuove tendenze delle tecnologie informatiche in relazione all'insegnamento della geometria e più in generale della matematica.
Riteniamo utile riportare di seguito alcune notizie riguardo la storia di Cabri, e le informazioni biografiche essenziali sull'intervistato (ricavate perlopiù dal sito: www.cabri.net).

Alcune date importanti su Cabri Géomètre

All'origine, il progetto consisteva nella realizzazione di un prototipo di ambiente al quale non era assegnata alcuna vera prospettiva di diffusione al pubblico o di commercializzazione. Si trattava essenzialmente di un progetto di ricerca che mirava alla migliore utilizzazione dei diversi concetti in materia di interfaccia grafica nel quadro della realizzazione di un software che fosse di aiuto per l'insegnamento e la ricerca in geometria.
In seguito all'interesse mostrato da insegnanti e ricercatori per il prototipo realizzato, un piccolo gruppo di ricercatori si è impegnato per far diventare Cabri-géomètre uno strumento professionale da diffondere. Sono quindi stati contattati diversi distributori, sia in Francia che all'estero, e progressivamente Cabri ha raggiunto il livello di riconoscimento, tanto scientifico-tecnologico che istituzionale, che ha oggi.

- Anno 1985: Il primo riferimento a Cabri-géomètre è stato fatto da Jean-Marie Laborde che propose la creazione di un *cahier de brouillon interactif pour la géométrie*, un Cabri-géomètre, che permettesse l'esplorazione delle proprietà degli oggetti della geometria e delle loro relazioni.
- Giugno 1986: richiesta di J.-M. Laborde alla società Apple di una fornitura di macchine Lisa per il sostegno di un progetto informatico. La motivazione iniziale, redatta da J.-M. Laborde era la seguente: "progettazione e realizzazione di un prototipo di ambiente informatico di aiuto all'apprendimento

della geometria".
• Ottobre 1986: Proposta di due progetti di ricerca: uno, destinato a laureandi dell'ENSIMAG (École Nationale Supérieure d'Informatique et de Mathématiques Appliquées di Grenoble) e l'altro a un progetto di dottorato all'università (tesi di dottorato di Franck Bellemain).
• Gennaio 1987: vengono scritte le prime linee di codice.
• Maggio 1987: Prima presentazione di Cabri-géomètre a degli studenti.
• Gennaio-Marzo 1988: Prima utilizzazione di Cabri-géomètre in situazione di insegnamento.
• Luglio 1988: Primo contatto con Olivier Frank e Brad Christiensen della Texas Instruments all'ICME6, a Budapest.
• Novembre 1988: Premio Apple per il migliore software educativo.
• Dicembre 1988: Edizione di Cabri-géomètre per la Nathan-Logiciels.
• Settembre 1989: Esce la versione per MS-DOS di Cabri-géomètre in Francia diffusa da Nathan-logiciels.
• Novembre 1989: Workshop di geometria interattiva.
• Giugno 1990: Cabri-géomètre diviene un Progetto IMAG, Università di Grenoble
• Fine 1992: Progetto di calcolatrice con la Texas Instruments.
• Gennaio 1993: Prime linee di codice di Cabri II.
• Luglio 1993: Université d'été su Cabri-géomètre a Grenoble.
• Dicembre 1994: Distribuzione da parte della Texas Instruments di Cabri II negli USA e nel Canada.
• Gennaio 1995: Annuncio della Texas Instruments della prossima uscita di una calcolatrice che integra Cabri Géomètre II al suo interno.
• Aprile 1995: Presentazione da parte della Texas Instruments della nuova TI-92.
• Gennaio 1996: Esce la versione per MS-DOS di Cabri II negli USA e nel Canada diffusa dalla Texas Instruments.
• Marzo 1996: Esce la versione Mac e MS-DOS di Cabri II in Francia diffusa dalla TI.
• Luglio 1996: Ecole d'été dedicata a Cabri-géomètre a Grenoble.
• Gennaio 1998: la versione Windows di Cabri II esce in Francia.
• Marzo 1998: la versione Windows di Cabri II esce negli USA.
• Maggio 1998: Texas Instruments distribuisce la TI-92+.
• Dicembre 1998: aggiornamento di Cabri II per MacOS.
• Cabri world 1999: Primo congresso internazionale dedicato alla geometria dinamica con Cabri-Géomètre. San Paolo, Brasile, dal 9 al 12 ottobre 1999.
• Gennaio 2000: versione di Cabri II sulla TI-89.
• Aprile 2000: nascita della società Cabrilog, fondata da Jean-Marie Laborde.
• Cabri World 2001: Secondo congresso internazionale su Cabri Géomètre, 14-15-16 e 17 giugno 2001 a Montreal, Canada.
• IberoCabri 2002: Primo congresso latino-americano dedicato a Cabri Géomètre, 24, 25 e 26 luglio 2002 a Santiago del Cile.
• Febbraio 2003: esce la versione Windows di Cabri II Plus.

Chi è Jean-Marie Laborde?

Jean-Marie Laborde è il fondatore e il Direttore di Ricerca del "Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique (LSD2)", un laboratorio di ricerca nell'ambito dell'IMAG – Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées all'Università di Grenoble (Francia).
Si è laureato in Matematica alla Ècole Normale Supérieure di Parigi nel 1969. Ha conseguito il dottorato di ricerca (Thèse d'État) in Informatica all'Università di Grenoble nel 1977. Jean-Marie Laborde ha iniziato a lavorare sul Progetto Cabri géomètre nel 1981, progettato inizialmente come un ambiente informatico per la teoria dei grafi. Nel 2000 ha fondato la società Cabrilog per lo sviluppo di Cabri Géomètre per computer e calcolatrici. Ha scritto molti lavori su Cabri e sull'uso degli strumenti informatici nella didattica della matematica.

Bibliografia

Ci siamo limitati ad alcune pubblicazioni uscite fino al 1997 in francese o in inglese.

- Capponi B., Laborde C., (1991) Cabri-Géomètre, un environnement pour l'apprentissage de la géomètrie élémentaire. *Actes de la VIème école d'été de didactique des mathématiques 1991*, Plestin les Grèves, pp. 220-22.
- Capponi B., Laborde C., (1995) *Cabri-classe, apprendre la géométrie avec un logiciel.* Editions Archimède.
- Laborde C. (1992) Solving problems in computer-based geometry environment: the influence of the features of the software. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 4, 128-135.
- Hillel J., Laborde C., Lee L., Linchevski L. (1992) Basic functions through the lens of computer algebra systems. *The Journal of Mathematical Behavior*. 11(2) 119-159
- Laborde C. (1993) Do the pupils learn and what do they learn in a computer based environment ? The case of Cabri-géomètre. In : Jaworski B. (ed.) *Proceedings of the 6th Technology in Mathematics Teaching Conference* (pp. 39-52). University of

Birmingham, School of Education.
- Laborde C. (1993) The computer as part of the learning environment : the case of geometry. In : Keitel C., Ruthven K. (eds.) *Learning from computers, mathematics education and technology* (NATO ASI Series vol.121, pp.48-67). Berlin: Springer Verlag. -
- Laborde C. (1994) Les rapports entre visuel et géométrique dans un EIAO. In: *Artigue M. et al. (eds.) Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp.387-94). Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.
- Laborde C. (1995) Designing tasks for Learning Geometry in a computer based environment, in: *Technology in Mathematics Teaching - a bridge between teaching and learning*, Burton L. & Jaworski B. (eds.) (pp.35-68), Londres: Chartwell-Bratt.
- Laborde C. (1996) *La géométrie et les figures dynamiques à l'écran de l'ordinateur: le passage d'un monde à l'autre*, V Encontro de Investigaçao em educaçao matematica, Troia, Portugal.
- Laborde C., Capponi B. (1994) *Apprendre à voir et manier l'objet géomètrique au delà du tracé dans Cabri-géomètre*. Em Alberto, Brasilia An 14 n° 62 Spécial Avril-Juin 1994.
- Laborde C., Capponi B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques* 14 (1) 165-210.
- Laborde C., Laborde J.-M. (1991) Micromondes et environnements d'apprentissage. In : Bellissant C. (ed.) *Actes des XIII Journées francophones sur l'informatique*. Grenoble : IMAG & Université de Genève. 157-177.
- Laborde C., Laborde J.-M. (1992) Problem solving in geometry: from microworlds to intelligent computer environments. In : Ponte J. et al. (eds.) *Mathematical Problem Solving and New Information Technology* (NATO ASI Series vol. 89, pp.177-192). Berlin: Springer Verlag.
- Laborde C., Laborde J.-M. (1995) The Case of Cabri-géomètre: learning geometry in a computer-based environment In: *Integrating Information Technology into Education* D. Watson & D. Tinsley (eds.) (pp.95-106) London: Chapman & Hall
- Laborde C., Laborde J.-M. (1996) Figures Dynamiques en géométrie, in: *Actes du Colloque Inter-Irem de géométrie*, Bayonne.
- Laborde C., Laborde J.-M. (1996) *Modeling, using Cabri-geometry*, Présentation plénière invitée au Comdex, Saõ Paulo, Brésil.
- Laborde C., Laborde J.-M. (1996) *Explorations en géométries non-euclidiennes, université d'été Cabri-géométre*, Grenoble..
- Laborde C., Laborde J.-M. (1996) *Nouvelles technologies et formation des Maîtres avec Cabri-géomètre*, Conférence Nationale des Enseignants de Mathématiques, Mexico.
- Laborde C., Laborde J.-M. (1996) *Cabri project, of the microworld for Geometry with direct manipulation*, Ministère de l'Education du Mexique, Mexico, Mexique.
- Laborde C., Laborde J.-M. (1996) *Cabri, de la théorie des graphes à la TI 92 - 15 ans de développement*, Universidad Pedagogica Nacional (UPN), Mexico.
- Laborde C., Laborde J.-M. (1996) *Some geometry with CabriII and on the TI-92* , Présentation invitée à ECTM (European Council of Teachers of Mathematics, Annual Fall Conference, Frankfurt, Allemagne.
- Laborde C., Laborde J.-M. (1996) *Intégration des nouvelles technologies dans le système éducatif, l'exemple de Cabri-géométre, version logicielle-version calculatrice*, Conférence invitée, 2ème Colloque Education et Informatique, commission problèmes des enseignants, Moscou.
- Laborde J.-M. (1993) *Modeling using geometry based computer technology*. PMENA. Asilomar, 20-25 octobre.
- Laborde J.-M.(ed.) (1995) *Intelligent Learning Environments, the case of geometry*. NATO ASI Series, Springer Verlag.
- Laborde J.-M. (1995) Des connaissances abstraites aux réalités artificielles, le concept de micromonde Cabri, in: *Actes des 4 èmes journées francophones Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur*, J.-F. Nicaud et al. (eds.), p. 29-40, Paris: Hermès,
- Laborde J.-M. (1995) De Cabri à Cabri-géomètre II, évolution de conception d'interface, in : *Premier colloque régional des pays francophones d'Asie du sud-est de Didactique des disciplines scientifiques et formation des enseignants*, C. Comiti, Tuyet Ngho Han (eds.), Ho-Chi-Minh-ville.
- Laborde J.-M. (1995) Microworlds and Learning Environments under Direct Manipulation, an example with Cabri-géomètre, in: *Proceedings of the 2nd Panhellenik Conference on Mathematics Education and Computers in Education*, Université de Chypre, Départements d'Informatique et d'Éducation
- Laborde J.-M. (1995) *The use of Cabri-geometry II as a geometrical modeling tool*, Intervention invitée à la Conférence sur les outils de modélisation mathématiques SEAM'95, San Francisco, USA.
- Laborde J.-M. (1995) *Quelques usages de Cabri-géomètre II*, Présentation faite à la Rencontre « Cabri-géomètre » , Zurich, Suisse.
- Laborde J.-M. (1996) *Modeling, using Cabri-geometry*, Diner-Conférence organisée par le NIATM (North Illinois Association of Teachers of mathematics), Rockford, USA.

- Laborde J.-M. (1996), *Algebra I with CabriII*, Séminaire du département Math-Info, San José.
- Laborde J.-M. (1996) *Some teaching oriented Cabri actvities*, Journée de conclusion d'un cycle annuel de formation d'enseignants de l'état du Minnesota, St Olaf College, Northfield, USA.
- Laborde J.-M. (1996) *The Cabri scientist*, Conference au Metropolitan Mathematics Club of Chicago, Chicago, USA.
- Laborde J.-M. (1996) *3D Cabri, why and how* , Rapport sur le 3D, Action de recherche contractuel avec TI.
- Laborde J.-M. (1997) Exploring Non-Euclidean Geometry in a Dynamic Environment like Cabri-géomètre , in: *Geometry Turned On* (Chap 25), MAA Publications, Providence USA.
- Pense B., Laborde J.-M. (1997) Geometry : *Multiple Perspective in a Technological Environment including Cabri on the TI-92*, Conférence annuelle, NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), Minneapolis.
- Tessier S., Laborde J.-M. (1994) *Descriptions des événements Apple acceptés par Cabri-géomètre*. Rapport Technique. RT 105
- Thibault Marie France (1991) *Simulation de modèles de géométries hyperbolique et elliptique á l'aide du logiciel Cabri-géomètre, L'informatique dans l'enseignement des sciences et de l'ingénierie*, 3ème colloque provincial, Montréal.
- Capponi B., Laborde C., (1991) Cabri-Géomètre, un

TESTO DELL'INTERVISTA

DOMANDA. Quale fu l'idea iniziale che la portò alla creazione, circa 15 anni fa, di Cabri?

LABORDE. In realtà il Progetto Cabri risale a prima di 15 anni fa, perché iniziò come un progetto di ricerca che doveva trarre vantaggio dall'uso del computer e dello schermo per svolgere esperimenti in teoria dei grafi. In effetti la comparsa in quegli anni dei nuovi computer Apple, Lisa e poi Macintosh, ha dato la possibilità di nuovi modi di interagire, basati sulla interfaccia grafica e sulla manipolazione diretta. Per me quest'ultima è la possibilità di toccare, di interagire direttamente con l'astrazione. L'astrazione potrebbe essere astrazione computerizzata, come per la teoria dei grafi, oppure, nel caso della geometria, riferita a triangoli, linee,… che si possono prendere e trascinare, in modo interattivo ed immediato.

DOMANDA. In quegli anni, gli inizi degli anni Ottanta, c'era già il mouse?

LABORDE. Sì, il mouse esisteva già. Penso sia stato introdotto nel 1979, o nel 1980, fu migliorato nei laboratori della XEROX e fu estremamente importante perché l'impatto del computer Lisa (Apple) e successivamente del Macintosh è basato molto sul mouse.… In effetti, il progetto Cabri iniziò con il computer Lisa, l'antenato del Macintosh, e poi pensando che la grafica di questo computer e il tipo di interazione diretta fossero interessanti per la teoria dei grafi e, nello stesso tempo, pensando che sarebbe stato interessante anche per la geometria, semplicemente mandai un progetto alla Apple.
Poi il progetto Cabri-géomètre vero e proprio iniziò nel 1985; all'inizio era un progetto ridottissimo; nessuno voleva assolutamente credere in questo progetto, sia dal punto di vista dell'Università sia dal punto di vista degli insegnanti; non sembrava possibile considerare il Macintosh uno strumento valido per il lavoro didattico nella scuola superiore. Nemmeno agli insegnanti, inizialmente, parve valido, perché allora si considerava il computer come uno strumento su cui scrivere a macchina con linee, parentesi,… - ricordate l'MS-DOS? - e l'uso del mouse era considerato troppo avanzato.

DOMANDA. Pensa, quale autore principale e "padre spirituale" di Cabri, che la sua idea iniziale alla base del software sia stata realizzata in questi 15 anni? Qualcosa di quel progetto si è perso per strada?

LABORDE. Non è stato raggiunto tutto quello che si voleva ottenere; quindi, in un certo senso, il progetto non si è ancora realizzato completamente. L'idea è di fare qualcosa di più vasto, ma tuttavia penso che già questo strumento, come tale - sfruttato da moltissimi utenti - muova molti studenti alla comprensione profonda del rapporto fra diversi concetti in matematica e questa, naturalmente, è la cosa più importante.

DOMANDA. Pensa che il fatto di non aver ottenuto tutto quello che lei si proponeva 15 anni fa sia dovuto ad un limite tecnologico?

LABORDE. No; in realtà siamo riusciti a esprimere le nostre idee in modo diverso da quanto inizialmente preventivato nel progetto iniziale. Cabri non era mai stato inteso come un grande progetto; non ci si aspettava che raggiungesse un tale grado di successo. Gradualmente sempre più persone, docenti e studenti, si sono interessate al progetto; abbiamo acquisito popolarità e siamo giunti alla fase attuale. Ma all'inizio si trattava semplicemente di un piccolo progetto di ricerca, un progetto sperimentale; non lo si considerava il punto di partenza per arrivare a grandi innovazioni, quali quelle, ad esempio, che ci hanno portato qui, oggi, a questo Convegno di Bologna, con così tanti insegnanti partecipanti, provenienti da tutta Italia, dal Nord alla Sicilia e alla Sardegna e più di seicento partecipanti.
Riguardo all'idea iniziale alla quale facevamo riferimento, in origine si pensava di limitarci alla geometria euclidea nella sua forma più pura, con semplicemente concetti euclidei, senza numeri, senza misure angolari,… . Solo più tardi gli amici tedeschi ci hanno fatto notare

che senza le misure angolari il programma diventava più difficile da usare nella scuola e allora la mia idea è stata – come è oggi – di vedere Cabri come uno strumento più generale, valido per la matematica, naturalmente basata sui rapporti geometrici tra oggetti, ma sostanzialmente come un ausilio per fare matematica, per creare modelli scientifici, non restringendo il campo alla sola geometria. Se si intende fare soltanto geometria euclidea questo è comunque possibile; basterà eliminare il superfluo nel menu di Cabri e rimarrà l'impianto puramente formale della geometria euclidea. Insisto comunque che Cabri è essenzialmente uno strumento per la matematica.

DOMANDA. Si parla di più di 10 milioni di utilizzatori di Cabri in tutto il mondo. Quale pensa sia la ragione dell'enorme successo e della diffusione di Cabri ?
LABORDE. Credo che la ragione non sia unica. Prima di tutto penso che il successo di Cabri sia dovuto alle solide basi matematiche del software, che gli permettono di dare risultati affidabili dal punto di vista matematico; per me questo è il punto di partenza per il quale lo strumento ha avuto successo.

DOMANDA. Pensa che questa possa essere la ragione unica del successo di Cabri?
LABORDE. Ho detto che *per me* questa è la ragione principale. So che può sembrare contraddittorio, perché sappiamo che altrove è stato accettato e apprezzato del software che non ha questi criteri, ma *per me*, a lungo termine, la solida base matematica di Cabri è la sua caratteristica prima. All'inizio del processo di sviluppo di questo innovativo programma di geometria dinamica il fondamento matematico poteva non sembrare il principio primo, ma a lungo termine si è rivelato tale.

DOMANDA. Il ruolo dei "didattici della matematica" che hanno collaborato a Cabri è alla base del successo del software?
LABORDE. A lungo termine sì, mentre all'inizio non era così evidente. Come provocazione, ricordo che agli inizi, la prima volta in cui ho voluto presentare il Cabri come nuovo "micromondo" per sviluppare idee geometriche nell'insegnamento, mi fu detto, dalla comunità dei "didattici della matematica", che Cabri-géomètre non era interessante perché non vi si ritrovavano fondamenti didattici e il software non era ben fondato.

DOMANDA. In Francia?
LABORDE. Non solo, dovunque.

DOMANDA. E i matematici?
LABORDE. La reazione dei matematici fu controversa; ci sono matematici interessati allo strumento tecnico e che lo acquisiscono come tale e matematici più "elitari", che pensano di non aver bisogno di questo tipo di strumento perché lo possiedono già a livello mentale. Io credo che non tutti possiedano questo strumento nel proprio cervello; o meglio, che puoi avere questo strumento nel cervello quando sei già un matematico.
Avevo detto inizialmente che c'erano diverse ragioni del successo di Cabri: il secondo motivo, oltre al solido fondamento matematico, è che Cabri è basato sulla manipolazione diretta ed è incentrato sull'utente. L'utente può essere essenzialmente un principiante; colui che impara può essere un ricercatore ad alto livello, ma può essere anche un bambino di scuola materna, un insegnante, uno studioso di didattica o qualunque tipo di persona. Cabri è uno strumento al cui centro vi è l'utente (user-centered). Considero l'utente come uno studente-principiante perché chiunque con Cabri può imparare qualcosa di nuovo e questo ha la sua base nel processo di interazione che si realizza con questo tipo di strumento.

DOMANDA. Sappiamo che Cabri è molto intuitivo nell'uso. Su quale principio si basa questa facilità d'uso del software?
LABORDE. Si tratta di un principio che ho cercato di esprimere alcuni anni fa. Naturalmente, anche in Cabri, come in molti altri programmi, è valido il seguente principio: "ciò che vedi è ciò che ottieni" (WYSIWYG = "What You See Is What You Get"). Questo è naturalmente molto importante anche in Cabri, ma *per me* il programma è basato su un altro principio analogo: "ciò che vedi è ciò che ti aspetti". Hai cioè a disposizione un software nel quale puoi trasportare le tue abitudini, intese come abituali modalità operative, e su cui puoi fare delle cose, se hai un minimo di conoscenze sul quale puoi estendere le tue abilità operative, oppure le puoi facilmente acquisire. Inoltre - e questo è veramente innovativo - Cabri ti permette di sfruttare al massimo le tue abilità operative e le tue conoscenze matematiche e di scoprirne di nuove, cosa che non è sempre possibile con altri software.
Un'altra ragione, inoltre, del successo di Cabri è la connessione che il gruppo di progettisti ha coltivato con i ricercatori e gli esperti di didattica, con gli insegnanti e con la comunità didattica in generale. Il fatto di aver potuto stabilire questa relazione con gli esperti in didattica è stata una chiave importante per la diffusione del software.

DOMANDA. È una relazione che il vostro gruppo di ricerca ha stabilito direttamente oppure hanno contribuito altri dall'esterno?
LABORDE. No, si è sviluppato tramite scambi durante le conferenze, partecipazione a meeting, aggiornamento di insegnanti e raccogliendo informazioni dalle relazioni presentate nelle sessioni di aggiornamento, cercando cioè di avere contatti costanti all'interno della comunità

didattica.
Devo anche ricordare, perché penso sia un processo molto importante, il fatto che siamo stati in grado di sviluppare una forte cooperazione con un “attore” molto importante, la società Texas Instruments, per avere la possibilità di sviluppare una speciale versione di Cabri tramite la Texas Instruments (TI-92, TI-89), così da avere una maggiore visibilità sul mercato e un rapporto maggiore con la comunità degli utenti. Per noi (Cabrilog) è essenziale mantenere un buon livello di cooperazione con questa società (Texas Instruments).
Siamo in dirittura di arrivo nello sviluppo di una versione particolare di Cabri - Cabri Junior - per la calcolatrice TI-83, che dal punto di vista dell’interfaccia è più avanzato del Cabri II Plus e, inoltre, più piccolo, più maneggevole e più economico di qualsiasi altra versione per calcolatrice grafica e permette di fare geometria dinamica. L’accento infatti è posto sulla possibilità di fare geometria dinamica su una calcolatrice grafica: Cabri Junior sulla calcolatrice TI-83 e TI-83SE darà la possibilità di esporre e di permettere a un numero enorme di allievi di scoprire cos’è un teorema in azione.

Lo schermo della TI-83 SE con Cabri Junior.

DOMANDA. Il progetto è in collaborazione con la TI ?
LABORDE. Sì, questo progetto è una parte della collaborazione con la Texas Instruments.

DOMANDA. La calcolatrice sarà più economica rispetto alle precedenti?
LABORDE. Sì, nel senso che sarà di facile accesso. Se vogliamo che la tecnologia si diffonda, la dobbiamo rendere davvero accessibile e non la dobbiamo lasciare solo sui computer, che sono abbastanza costosi e non disponibili ovunque. La tecnologia dei computer è una tecnologia di nicchia mentre la potenza delle calcolatrici come la TI83 sta aumentando e abbiamo quindi buone possibilità che abbastanza presto equivalga a quella dei computer e che quindi si possa diffondere questa tecnologia e, in un certo senso, anche banalizzarla, come se fosse un oggetto come una penna. Oggi nessuno si meraviglia più di una penna perché questa tecnologia è diventata uno strumento standard. Occorre ammettere che oggi un computer non è ancora diventato uno strumento standard al pari di una penna; non abbiamo quindi ancora integrato questa tecnologia nel normale modo di lavorare delle persone.

Jean-Marie Laborde con Luigi Tomasi e Giuseppe Accascina durante l’intervista

DOMANDA. Come le sembra cambiato l’insegnamento della geometria/matematica grazie a Cabri?
LABORDE. Questa domanda sarebbe meglio proporla a qualcun altro... A volte, durante le conferenze, ho incontrato insegnanti che vengono a parlarmi e mi dicono, semplicemente, che il loro modo di insegnare la matematica è stato completamente rivoluzionato da quando hanno iniziato ad usare Cabri. Voglio dire che usano la geometria dinamica, nel senso che non si limitano più alla pura geometria; la geometria, in sé, è interessante, ma essi usano lo strumento geometrico per applicarlo ad altri campi della matematica.

[A questo punto interviene il collega Amerigo Di Libero, LS “Vittorio Veneto” Milano - che nel frattempo ci ha raggiunto - e formula la seguente domanda]:

DOMANDA. Nella versione precedente di Cabri (non Plus), mi sembrava che il processo fosse essenzialmente questo: gli enti geometrici venivano concettualizzati, ma il discorso rimaneva nella geometria. Con gli esempi presentati nella versione di stamattina, con la sovrapposizione di un modello a una figura, in Cabri II Plus, mi sembra che si possa fare

il cammino inverso. Data la tendenza attuale della didattica della matematica, di insegnare per modelli, Cabri II Plus potrebbe aiutare in questa direzione.
LABORDE. Lei ha ragione nel dire che la maggior parte dell'attività matematica è fondamentalmente organizzata per spiegare il mondo reale e per fare ipotesi su di esso. Tutto il problema è passare dal mondo reale al modello e dal modello tornare al mondo reale. Naturalmente si possono anche sviluppare dei ragionamenti interni alla matematica, ma questo ragionamento interno sarà valido e fruttuoso solo se alimentato da qualcosa che viene dalle motivazioni iniziali e in rapporto al fine. Quello che stiamo cercando di fare è introdurre la possibilità di fare più Comìuter Design, ampliare il ruolo delle immagini e introdurre elementi del mondo reale. È precisamente in questa direzione che ci stiamo movendo…
Il motivo per cui ci pensiamo solo oggi è che solo recentemente siamo arrivati ad affrontare questo problema dal punto di vista algoritmico e della potenza di calcolo. Oggi i computer hanno la potenza per poter manipolare grandi quantità di dati, come per le immagini, in modo realistico, preciso e sofisticato. In passato, agli inizi del Macintosh, era praticamente impossibile ruotare un'immagine in modo interattivo e immediato. Oggi possiamo fare molto per due ragioni: la prima ragione è l'aumento della potenza e della velocità di calcolo dei computer e delle calcolatrici e la seconda è di tipo matematico: la "matematica" che permette di far ruotare un'immagine velocemente è molto recente ed ha solo 15 anni. Questa è veramente "new math", nel senso di matematica e di algoritmi che sono stati sviluppati di recente.

DOMANDA. È questa la ragione per cui certi programmi di grafica molto diffusi - ad esempio Adobe Photoshop - non riescono ad ottenere la stessa velocità di rotazione di un'immagine in modo immediato e interattivo?
LABORDE. Sì, perché noi abbiamo sviluppato gli algoritmi necessari per fare questo mentre chi produce i programmi di grafica commerciale non è interessato ad essi perché per loro non è molto importante che l'utente possa manipolare la figura tra la situazione iniziale e quella finale. Ad esempio, all'utente di Photoshop interessa solo il momento iniziale e quello finale dell'immagine; non è interessato al controllo del processo. Photoshop è centrato sul risultato e non sul processo: l'importante è l'immagine finale. Per noi è invece importante che l'utente possa controllare il processo.
ACCASCINA. Quello che ho pensato stamattina [si riferisce alla conferenza di Jean-Marie Laborde sulle novità di Cabri II Plus. Per un sunto vedi Bollettino CabrIrrsae n. 35/36, aprile-luglio 2003] mentre ascoltavo la sua conferenza e si parlava di Photoshop, pensavo ai nostri studenti di ingegneria, alla popolarità di Photoshop e anche al suo costo - che è superiore a quello di Cabri - e infine al fatto che Cabri può ruotare in tempo reale immagini (che Photoshop non fa) proprio grazie alla matematica e ad algoritmi matematici. Questa, penso, è una buona considerazione da proporre ai nostri studenti. A diversi nostri studenti la matematica non piace e alcuni di loro tendono a pensare che la matematica sia morta, sostituita dal computer. Questo è un buon esempio per dimostrare che è vero il contrario.

DOMANDA. Abbiamo sentito parlare di una versione di Cabri 3D (per la geometria dello spazio) in preparazione. A che punto è la realizzazione di questo progetto?
LABORDE. A questa domanda ho già risposto stamane durante la conferenza. [Per un sunto vedi Bollettino CABRI*RRSAE* n. 35/36, aprile-luglio 2003].

DOMANDA. Che impressione/valutazione dà della diffusione di Cabri in Italia e di tutta le comunità web che attorno a Cabri è presente in Italia tramite il sito dell'IRRE Emilia Romagna, il Bollettino CabrIrrsae e la Lista di discussione CabriNews ?
LABORDE. Il fatto che l'IRRE Emilia Romagna possa organizzare un convegno con una così larga partecipazione di insegnanti da tutta Italia è dovuto alla qualità delle persone dell'IRRE collegate al Cabri. Forse è dovuto anche all'interesse per Cabri e alla qualità del software, ma io penso che l'ingrediente fondamentale sia il fatto che in Italia, e specialmente in Italia – è semplicemente una mia constatazione – si cerchi di conservare una certa ricchezza della cultura in senso lato e che la geometria sia parte di questa cultura a cui in Italia si è ancorati. Questo è evidente nei vostri musei della scienza, nelle vostre mostre di macchine matematiche – come ad esempio il "Theatrum machinarum" di Modena, etc.
Io sono molto colpito quando vedo i cataloghi di queste mostre e penso che questa sia una delle specificità dell'Italia. Con questo non voglio diminuire la qualità del lavoro fatto dal gruppo di lavoro dell'IRRE Emilia Romagna che ruota attorno a Cabri, ma voglio dire che anche in questo convegno è possibile vedere questo senso della cultura che avete in Italia, che è collegato ad ogni campo dell'attività umana in senso globale. Lo considero molto importante.
Sono colpito dal risultato finale di questo lavoro fatto dal gruppo dell'IRRE Emilia Romagna, voglio dire, da tutte le attività, dalle persone, dagli insegnanti, da tutti quelli - numerosissimi - che hanno partecipato oggi al Convegno organizzato dall'IRRE Emilia Romagna.

DOMANDA. Ci sarà una versione di Cabri II Plus anche per il sistema Macintosh ? … e per Linux? Quali sono i progetti futuri di Cabrilog e qual è il tipo di interazione che ci sarà con gli utilizzatori? E

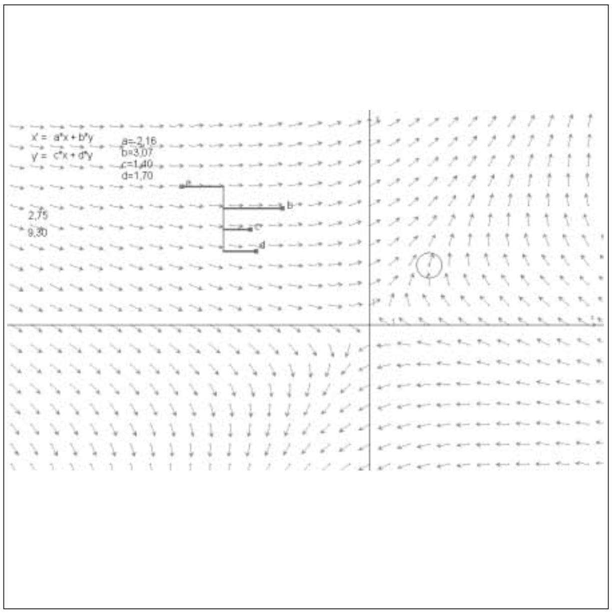
con quelli italiani?
LABORDE. Sì, saranno disponibili delle versioni di Cabri II Plus per Mac e per Linux. Stiamo lavorando molto per rendere disponibile Cabri II Plus il più presto possibile per il Macintosh. Se vogliamo, è un problema di riconoscenza: Cabri non sarebbe mai esistito se non grazie all'innovazione apportata dell'interfaccia del Macintosh, anche se quest'ultima è basata su un'interfaccia elaborata dai Laboratori della Xerox.
Cabri II Plus deve essere messo a disposizione di coloro che hanno guidato questa evoluzione e contribuito allo sviluppo della comunità informatica dal punto di visto dell'interfaccia grafica. È chiaro, quindi, che non possiamo *non* offrire una versione di Cabri per Mac. In caso contrario sarebbe come tradire chi ci ha creato.
Un altro punto – questo abbastanza provocatorio – riguarda Linux. Fintantoché Linux sarà un sistema usato nel campo della ricerca noi dovremo fare una versione per Linux di Cabri. Quindi la prossima generazione di Cabri sarà un prodotto disponibile per Windows, per Mac e per Linux.
Ma, per me, questo discorso rimane un po' provocatorio. Si può dire che ci sarà una versione di Cabri *non* per Linux, ma per gli utilizzatori di Linux. Ho parlato della comunità degli utilizzatori di Linux nel campo della ricerca scientifica, perché Cabri è un potente strumento di lavoro per la ricerca matematica e molti ricercatori sono forniti di Cabri. Ma io personalmente – è un'opinione personale – penso che Linux non sarà il sistema del futuro, perché a mio parere appartiene al passato e non è un esempio di innovazione nel campo dell'informatica. UNIX fu concepito circa trent'anni fa e temo che lo sviluppo di Linux - (so che quello che sto per dire è fortemente provocatorio, ma lo dico in qualità di informatico, sono molto preoccupato per il modo in cui i sistemi operativi si stanno sviluppando oggi) - rappresenti – ancora una volta – la rivincita degli informatici e il loro tentativo di dominare parte della società.
Linux non è un sistema per tutti e non è diffuso ovunque: è un sistema rivolto a professionisti dell'informatica. Non sto difendendo Windows e alcun sistema operativo in particolare: sto solo dicendo che Linux è un sistema per informatici e per esperti e io non vorrei che tutte le persone che usano il computer debbano diventare tali.
Forse ricorderete che una delle prime campagne promozionali della Apple, nel 1984, usava per la pubblicità uno slogan simile al seguente: "abbiamo insegnato l'uomo al computer". Ebbene, io penso che UNIX, Linux e altri sistemi realizzino invece il percorso inverso rispetto a quello indicato nello slogan citato: per questi sistemi è di nuovo l'uomo che deve adattarsi e imparare com'è fatto il computer. Occorrerà quindi fare, per questi sistemi, una nuova rivoluzione, come quella operata dall'interfaccia grafica del Mac nel 1984, che ha reso i computer più vicini al linguaggio dell'uomo e quindi più facili ed interattivi da usare.
Finché ci sarà, quindi, una comunità di informatici che usa il sistema Linux, faremo una versione di Cabri per Linux; tale versione è però fatta per gli utenti di Linux più che per il sistema stesso.

DOMANDA. Ci sarà in futuro nel menu di Cabri un tasto per trasformare direttamente una figura in un'applet contenuta in una pagina html ?
LABORDE. Sì, ci sarà. Oggi nella Società Cabrilog (Grenoble, Francia) abbiamo diverse persone che lavorano nello sviluppo del software Cabri. Al tempo di Cabri II, invece, eravamo in due o tre persone in tutto che lavoravano su Cabri. Oggi abbiamo una vera e propria squadra di persone molto esperte che vengono dal campo della matematica, dell'informatica, della psicologia, della didattica e degli ingegneri informatici che lavorano a tempo pieno sul software.
Stiamo approntando CabriJava per Cabri II Plus e un CabriViewer con alcuni insegnanti. L'uso del linguaggio Java rappresenta una tecnologia molto interessante anche se, lo sapete, questa tecnologia non è stata accettata dalle principali case costruttrici di computer. Per questo motivo Java non è veloce quanto avrebbe potuto esserlo se questa tecnologia fosse stata integrata nei chips interni dei computer. Per motivi che potete immaginare non è così e Java risulta quindi avere dei limiti di prestazione.
Cabri II Plus, Cabri 3D e la prossima generazione di Cabri necessitano di molta potenza. Questa è la ragione per la quale stiamo tentando di mantenere CabriJava (per Cabri II Plus), ma anche qualche altro tipo di viewer che abbia la stessa potenza e le stesse prestazioni – efficiente come un vero software – ma che sia un viewer di Cabri gratuito e libero.
Stiamo anche lavorando per sviluppare un'interfaccia per Cabri, una tecnologia simile a quello dello joystick. Bisogna immaginare un mouse che diventa l'estremità di una leva simile ad un joystick; la grossa differenza sta nel fatto che quando per esempio stai andando fuori dallo schermo, in qualche modo si arriva ad un ostacolo che si tocca. Con questa interfaccia si ha quindi un feedback non visivo, ma tattile; è quindi possibile fare geometria anche senza vedere lo schermo – ad esempio per i non vedenti - perché si ha un riscontro non visivo.
Abbiamo anche il progetto di usare uno stilo – non una penna – da muovere sullo schermo per disegnare sullo schermo delle figure, che il computer poi elaborerà ed interpreterà anche se il disegno sullo schermo non sarà preciso.
L'ultima cosa che voglio menzionare è che un ricercatore sta lavorando su un'interfaccia vocale per Cabri, per dare ordini vocali - che permettano – ad esempio – di trasformare un triangolo in un triangolo rettangolo con un semplice comando vocale – aumentando così il livello di interazione diretta con il programma, il che rappre-

senta uno stadio più elevato rispetto alla manipolazione diretta. Con l'interazione diretta si ha l'impressione che quel che succede sullo schermo sia in un certo senso un'estensione diretta del corpo. Si potranno ad esempio – con comandi vocali – cambiare il colore di una figura, cambiare il suo spessore,…; stiamo già facendo rilevanti progressi in questa direzione. Evidentemente questa caratteristica futura di Cabri non sarà facilmente utilizzabile in classe, specie se rumorosa…

DOMANDA (Di Libero). Nella conferenza di stamattina ci ha mostrato un esempio di sistema di equazioni differenziali che Cabri ha risolto solo a livello grafico, ma che, se si lavora con un sistema come ad es. Matlab, si può risolvere numericamente. Pensa che Cabri possa essere sviluppato in questa direzione?

LABORDE. C'è un gruppo di persone che sta lavorando anche su questo argomento, in modo da disegnare l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale, che possiamo chiamare "linee di livello". Questa possibilità è stata sviluppata per il Cabri II Plus, ma, a volte – anche fortunatamente – dobbiamo fare delle scelte su cosa includere nelle nuove versioni del software e cosa invece tralasciare.

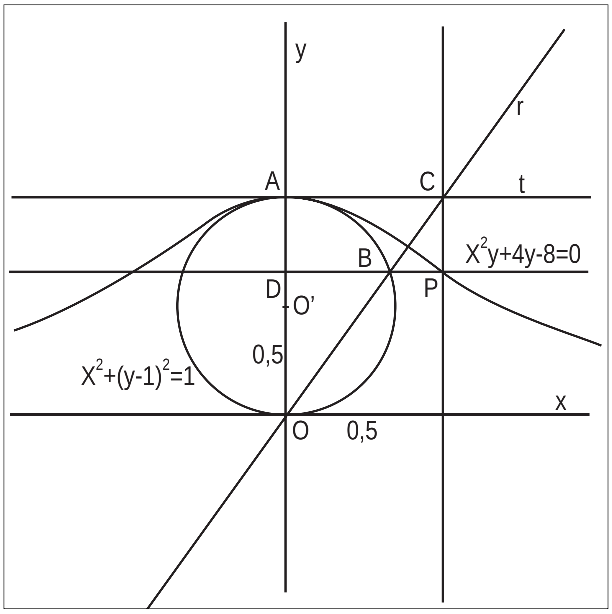


Risoluzione grafica di un sistema lineare di equazioni differenziali

(Quel che dirò ora lo potete registrare, ma consideratelo per ora come qualcosa di ufficioso). Se la prossima generazione del software – Cabri III – che sarà molto più potente ed innovativa – se questo progetto si svilupperà abbastanza velocemente, allora questo tipo di cose (risolvere equazioni differenziali, sistemi di equazioni differenziali, disegnare curve di livello, …) ci saranno. Se, invece, questo progetto non si svilupperà abbastanza alla svelta, avremo allora un Cabri + + (Cabri Plus Plus), con una soluzione simile a quella vista nella conferenza.

Nella conferenza di stamattina vi ho accennato che potremo trovare simbolicamente i valori dell'equazione di una circonferenza e scoprire la relazione tra il coefficiente della curva di Agnesi (la versiera) e il diametro della circonferenza di partenza. Questo sarebbe un grande miglioramento, ma probabilmente non l'avremo a disposizione già dalla prossima versione. Ora non ho idea se sarà inserita in una versione futura del Cabri II Plus – chissà, magari tra un anno – e se sarà incorporata nel futuro Cabri III. Cabri III sarà uno sviluppo completamente nuovo ed è già allo studio; non l'abbiamo ancora sufficientemente sperimentato e non sappiamo se manterrà tutto quello che ora sembra promettere.

[Cabri non gestisce simbolicamente i parametri. Se la circonferenza ha diametro *a*, allora la curva di Agnesi ha equazione: (x^2 + a^2) y = a^3. Nella figura seguente si vede che Cabri II Plus è in grado di fornire l'equazione della circonferenza e l'equazione del luogo, ma usa sempre i numeri e non il diametro della circonferenza come parametro. *ndr*].



Equazione della versiera di M.G. Agnesi.

DOMANDA (Accascina). E riguardo al calcolo simbolico? La cosa che faccio abitualmente quando vado ad insegnare ai futuri insegnanti (della SSIS) è di metterli in guardia sulle approssimazioni di Cabri. Quando Cabri dice "Questo punto appartiene a questa retta", dico spesso loro: attenzione, qui non si tratta di calcolo simbolico; quindi ci sarà una certa approssimazione e non potete dire con sicurezza che il punto appartenga alla retta.

LABORDE. Devo dire due o tre cose riguardo a questa domanda interessante e sarò di nuovo un po' provocatorio. Dal mio punto di vista, "dalla mia prospettiva", non possiamo ottenere alcuna differenza nella qualità dei risultati tra l'elaborazione numerica e la cosiddetta "manipolazione simbolica". Quindi in entrambi i casi si hanno delle limitazioni, anche nel caso della rappresentazione simbolica. Si ha l'impressione che nella "manipolazione simbolica" non ci siano limitazioni perché non si percepiscono i limiti, ma, in realtà, ci sono e in Cabri sono le stesse. Personalmente non ho niente in contrario ai sistemi basati sia sulla manipolazione numerica che sulla cosiddetta manipolazione simbolica perché la seconda è basato sulla prima. Nei computer, in ogni caso, ci sono solo dei bit, che sono 0 e 1, e tutto è simbolico.

DOMANDA (Accascina). Ecco perché lei dice "cosiddetto" calcolo simbolico.
LABORDE. Sì, tutto è simbolico, in un computer, se vogliamo. E comunque, il programma che lei menzionava (*Derive*, ndr), è nella maggior parte dei casi, come Cabri, basato su un'approssimazione numerica e in alcuni casi basato su manipolazioni simboliche.

DOMANDA (Accascina). Quindi avevo ragione per metà?
LABORDE. Sì, proprio così.

DOMANDA (Accascina). Di solito, quando lavoro con Derive, la prima cosa che insegno ai miei studenti è di farsi dare dal computer delle risposte sbagliate. Lei sa perché, naturalmente, riesco a fare questo con Derive, ma non riesco a farlo con Cabri e non so perché…
LABORDE. Perché Cabri non è così scarso naturalmente… (risponde ridendo J.-M.Laborde). Io potrei comunque insegnarle come fare …

INTERVISTATORI. Ringraziamo Jean-Marie della disponibilità e delle stimolanti risposte date alle nostre domande.
(trascrizione di Cristina Gazzieri e Luigi Tomasi, luglio 2003)

ERRATA CORRIGE

Si segnala un errore presente nel bollettino n. 35/36 di Aprile-Luglio 2003.
A pag. 34 nell'elenco dei nomi degli autori i parallelogrammi è riportato erroneamente il cognome Grossi anzichè Grassi.

CABRI DISCUSSO

Basic, Logo, Cabri… un patrimonio da non perdere

di Graziella Cellai
Scuola media "Leonardo Da Vinci" Rufina - Firenze

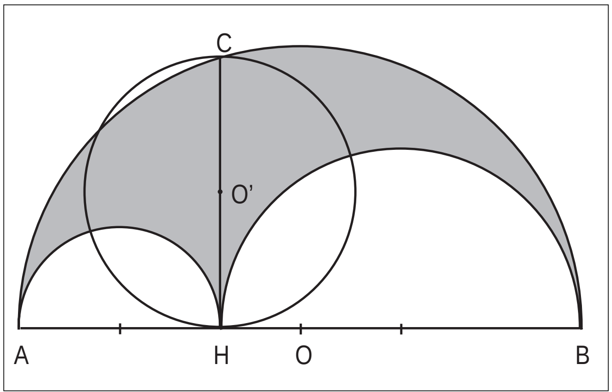
Quest'articolo nasce soprattutto dalla considerazione che i programmi Basic e Logo, fino a pochi anni fa abbastanza in uso nella scuola media, stanno per essere abbandonati, spesso sostituiti dal nulla. Essi rappresentano invece, a mio avviso, un utile strumento di supporto alla Matematica del triennio della Media inferiore, ancora più efficaci se utilizzati insieme a Cabri. Spero con queste mie riflessioni di invogliare qualche collega a riprenderne l'utilizzo, dal momento che, credo, costituiscono una ricchezza culturale che è un peccato perdere.

Da circa quindici anni insegno Matematica e Scienze in una scuola media con Sperimentazione di Informatica; sperimentazione nata e concepita come supporto alla Matematica.
I programmi inizialmente utilizzati sono stati il Basic, come ausilio alla Aritmetica, ed il Logo per la Geometria. Personalmente ho sempre ritenuto l'offerta del binomio Matematica-Informatica di grande interesse; ed è stato per questo motivo che, nel momento in cui si sono fatte più incalzanti le pressioni affinché la nostra Sperimentazione cambiasse connotati (TIC), ho fatto quanto ho potuto per restituire a questa attività lo smalto e l'interesse che con il tempo si andavano perdendo. E' stato così che ho scoperto Cabri, la lista Cabrinews, Flatlandia…e devo dire non è stato un incontro privo di conseguenze. Oltre ad ampliare la mia personale preparazione, ha avuto infatti un notevole effetto ricostituente; dato che non mi sono sentita più sola nel tentativo di cercare strade alternative nell'insegnamento.
Ciò detto, vorrei dire due parole circa l'applicazione didattica, effettuata in questi anni, relativamente ai programmi Logo, Basic e Cabri.
Come ho già detto quest'ultimo si è inserito quando già da diverso tempo utilizzavo gli altri due linguaggi, rendendo quindi necessario un ripensamento sul loro ruolo e sulla loro efficacia. Il percorso-tipo, nato dalla sintesi dei tre programmi, inizia in prima media, classe in cui sono date le basi del Basic, affrontando le prime istruzioni ed i primi semplici programmi sequenziali e, al

più, con selezione, ma introducendo già sul finire dell'anno le variabili ed il loro uso in input, oltre che come assegnazioni interne ai programmi effettuati.
Nello stesso tempo si forniscono le prime conoscenze relative al Logo; dai primi comandi, alle procedure e sottoprocedure, anch'esse in fine d'anno con l'uso di variabili. Con Cabri si comincia lo studio della Geometria "dinamica", insistendo nel porre in relazione gli elementi comuni e non comuni nelle diverse situazioni affrontate. Cabri quindi fa la parte del leone in prima, e poi ancora in seconda, classe nella quale però affrontiamo in Basic i programmi con iterazione. La comprensione di questo tipo di linguaggio non è cosa da poco per i ragazzi di questa fascia di età, soprattutto se si chiede loro la costruzione del ciclo, con tutti gli elementi indispensabili: variabile contagiri, incremento della variabile, condizione per l'uscita.
L'apprendimento di questo tipo di algoritmo e di quello con selezione con gli eventuali operatori logici, è una conquista spesso graduale e condizione indispensabile perché i ragazzi facciano in terza il "salto di qualità"che li rende capaci di creare lavori interessanti, anche con l'utilizzo di altri software. In pratica, in terza, Logo è stato da noi utilizzato in tandem con Cabri: le costruzioni fatte, le eventuali figure studiate, sono poi state realizzate in Logo. Ciò ha costretto gli alunni ad un ripensamento sui contenuti e ad una *programmazione* che riassume spesso elementi diversi, geometrici ed informatici, in una sintesi estremamente significativa. Così sono nati i lavori sull'Omotetia, sui Teoremi di Euclide, sul triangolo inscritto nella semicirconferenza, su alcune figure significative relative al cerchio, sulla rappresentazione geometrica del prodotto di due polinomi o del quadrato del binomio, ecc. Tali attività vogliono l'uso massiccio delle variabili, spesso l'applicazione del Teorema di Pitagora, per la determinazione della lunghezza di un segmento variamente orientato rispetto agli assi (quindi conoscenza del piano cartesiano), considerazioni sugli angoli di volta in volta determinati dalla tartaruga, magari l'utilizzo di operatori logici…
E' facile rendersi conto, quindi, che non è un lavoro da poco. Personalmente ritengo che se i ragazzi riescono in terza ad effettuare questa sintesi, grande è il merito nascosto del Basic. E' grazie all'utilizzo di tale linguaggio, infatti, che i ragazzi si abituano a collocare un determinato problema in uno dei tre algoritmi fondamentali.
Mi pare comunque che debba essere sottolineata la validità che assume in questo contesto l'utilizzo del Logo: utilizzato insieme a Cabri, non solo perde quell'aspetto "tartarugoso" che in passato era andato assumendo, ma anzi, ne rappresenta un validissimo completamento, in quanto i ragazzi si possono cimentare nella ricostruzione-programmazione di figure di cui hanno precedentemente studiato le proprietà e le caratteristiche.
Ancora, una delle attività che è possibile realizzare in Logo è quella relativa alla ricorsività. Tale attività permette infatti di stabilire un parallelismo con il ciclo iterativo in Basic, parallelismo quindi tra linguaggi diversi che traducono, ciascuno coerentemente con le proprie caratteristiche, uno stesso tipo di algoritmo. Oltre alle consuete figure che erano un tempo riportate nei libri di testo, il nuovo Logo può applicare la ricorsività anche al colore, che, come è noto, è individuato nella *palette* mediante una terna di numeri. L'aggancio di tali numeri a delle variabili, fà in modo che una certa figura possa variare il colore iniziale fino ad un determinato colore finale, analogamente a quanto fa in Basic la variabile contagiri (è qui evidente un simpatico aggancio con l'Educazione Artistica, che può essere argomento utile in sede di colloquio d'esame).
Riguardo poi alla fantasia matematica che dovremmo favorire…
Sicuramente Cabri rappresenta uno strumento importantissimo, specialmente se si riesce a far in modo che siano i ragazzi in prima persona a scoprire proprietà e caratteristiche in figure e costruzioni. Si tratta di un percorso certo impegnativo, soprattutto perché richiede non poco tempo e pazienza, specialmente nella fase iniziale.
Fino a quest'anno poi, per la scuola media inferiore non vi sono stati testi disponibili a cui poter far riferimento, per la ricerca di attività interessanti da svolgere con i ragazzi. In questo senso ho trovato proficuo il vecchio testo del Tonolini, "Geometria", Ed. Minerva Italica; dove si possono trovare esercizi indubbiamente interessanti da risolvere con l'utilizzo di Cabri.
In quest'ottica, la partecipazione a Flatlandia, rappresenta il naturale completamento di un percorso.
E' stato così che avuto la possibilità di rendermi conto delle capacità di osservazione e ragionamento in alunni che non avrei mai creduto capaci di tanto. E, devo dire che qui "osservazione" vuol dire molto di più di ciò che comunemente si intende: vuol dire cogliere delle caratteristiche, ma anche individuare percorsi di risoluzione che io stessa non avevo colto, generalizzare le osservazioni medesime, ecc.
Un altro aspetto, non meno importante del precedente, è quello del recupero-potenziamento. I problemi proposti infatti richiedono spesso la conoscenza di argomenti diversi, da rimontare secondo un percorso logico. Gli alunni sono così obbligati a "rivedere" le loro conoscenze, con modalità diverse a seconda del livello di preparazione: per taluni si tratterà di recupero, per altri di consolidamento-potenziamento.
Ancora, costretti a doversi esprimere con uno scritto, gli alunni hanno fatto progressi non indifferenti nell'acquisizione di un linguaggio preciso, specifico.
Infine, cosa per me insospettata, ma che ha avuto invece grande rilevanza, è stato l'essere in contatto con referenti esterni, diversi dall'insegnante. Questo fatto ha dato al mio gruppo di alunni una motivazione in più, di notevole, simpatica efficacia.

Il triangolo curvilineo

Per chiarire il pensiero esposto, allego uno dei lavori svolti con la classe: la figura è realizzata in Logo, le variabili in input sono rappresentate dai segmenti AH e BH.



Dato un semicerchio di diametro AB, da un punto H di questo si traccia la perpendicolare ad AB e chiamiamo C il punto di intersezione di tale retta con la semicirconferenza.
Si descrivono, dentro il semicerchio dato due semicirconferenze, di diametro AH ed HB. Dimostrare che il triangolo curvilineo di vertici AHB, è equivalente al cerchio di diametro HC.

Poniamo:
$AH = 2x \mapsto r1 = x$
$HB = 2y \mapsto r2 = y$
$AB = AH + HB = 2x + 2y = 2(x + y) \mapsto AO = x + y$
(raggio della semicirconferenza maggiore)

Inoltre sappiamo
A cerchio = πr^2,
quindi del semicerchio (S)
$S = \pi r^2/2$
Applicando la formula precedente per determinare l'area dei tre semicerchi di diametro AB, AH e HB avremo:
$S(AB) = (x + y)^2 * \pi/2$, da cui otteniamo
$S(AB) = (x^2+2xy+y^2)*\pi/2$
$S(AH) = x^2*\pi/2$
$S(HB) = y^2*\pi/2$
Inoltre, considerando che l'area del triangolo curvilineo è
AREA TRIANGOLO CURVILINEO =
S(AB) - S(AH) - S(HB)
sostituendo avremo
AREA TRIANGOLO CURVILINEO =
$(x^2 + 2xy + y^2)*\pi/2 - x^2*\pi/2 - y^2*\pi/2 =$
$= x^2*\pi/2 + xy*\pi + y^2*\pi/2 - x^2*\pi/2 - y^2*\pi/2 = \pi xy$

Proponiamoci adesso di determinare il valore dell'area del cerchio costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa.

Il primo passaggio ci permette di stabilire la misura di tale altezza, applicando il secondo Teorema di Euclide, dato che i due diametri AH ed HB possono essere considerati come le proiezioni dei cateti del triangolo rettangolo ABC. Avremo quindi:
$CH^2 = AH*HB$, da cui, sostituendo
$CH^2 = 2x*2y = 4xy$
Applicando la proprietà distributiva della radice rispetto alla moltiplicazione
$CH = \sqrt{4xy} = 2\sqrt{xy}$
$HO' = (2\sqrt{xy})/2 = \sqrt{xy}$ (raggio del cerchio da noi considerato)
Ancora, sostituendo nella formula dell'area del cerchio
$A = \pi r^2$, avremo
$A = \pi*(\sqrt{xy})^2$
E, semplificando, $A = \pi xy$
Come si può facilmente osservare il valore trovato per l'area del cerchio è esattamente quello che abbiamo trovato per l'area del triangolo curvilineo.

FLATlandia: un invito al dialogo attraverso il problema di ottobre 2002

di Maria Cantoni
Università Cattolica del Sacro Cuore - Brescia

Premessa

Alcune riflessioni sul problema di Flatlandia, Ottobre 2002 (e più in generale su molti altri precedenti e seguenti), mi hanno portata a considerare gli "invii mensili", forse anche perché imprevedibili come contenuto, molto stimolanti per le riflessioni culturali e didattiche a cui mi hanno spinta. Mi sono domandata allora se, al di là della risoluzione richiesta agli studenti, essi sarebbero potuti divenire **filo conduttore** di scambio di opinioni e di ricerca per noi insegnanti, prendendo anche in considerazione i modi, certamente diversi, con cui gli studenti richiedono il coinvolgimento del docente.

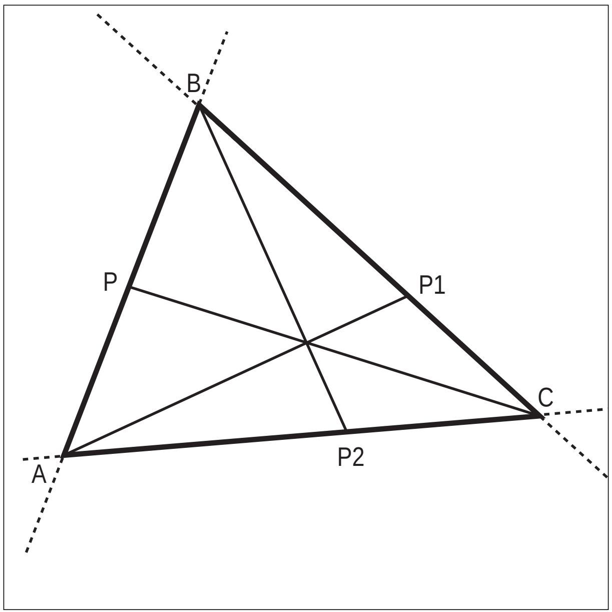
Le riflessioni

Mi sono posta a risolvere il problema di CabriFlatlandia con curiosità perché mi è capitato in altri casi che lo svolgimento mi abbia dato suggerimenti didattici originali vuoi per l'argomento trattato, vuoi per lo strumento Cabri usato per il lavoro grafico. Senza ribadirlo altrove, ritengo che la flessibilità dello strumento usato abbia determinato gli spunti didattici, del tutto teorici per ora, che il problema mi ha suggerito.

Il problema
a) In un qualunque triangolo ABC, costruire sul lato AB

un punto P in modo che i triangoli PCA e PCB abbiano ugual perimetro. Giustificare la costruzione.
b) E' unico il punto trovato?
c) Ripetendo la costruzione sugli altri due lati di ABC si può osservare un fatto "notevole", di cui non si chiede la dimostrazione. Qual è?

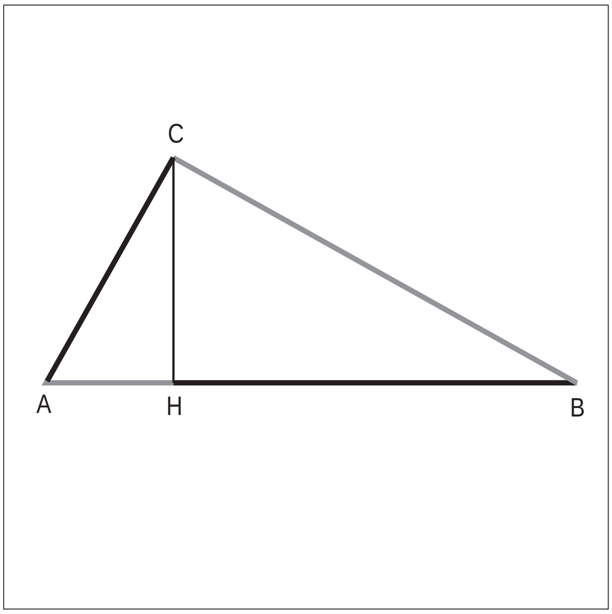
Tralascio il lavoro risolutivo relativo ai primi due punti che invitano, gli studenti della scuola media inferiore soprattutto, a meditare proficuamente sulla situazione (molto interessanti, credo, sarebbero le cose da dire a questo proposito).
Per quanto riguarda il terzo punto, il disegno suggerisce immediatamente l'intersezione dei tre segmenti in gioco.



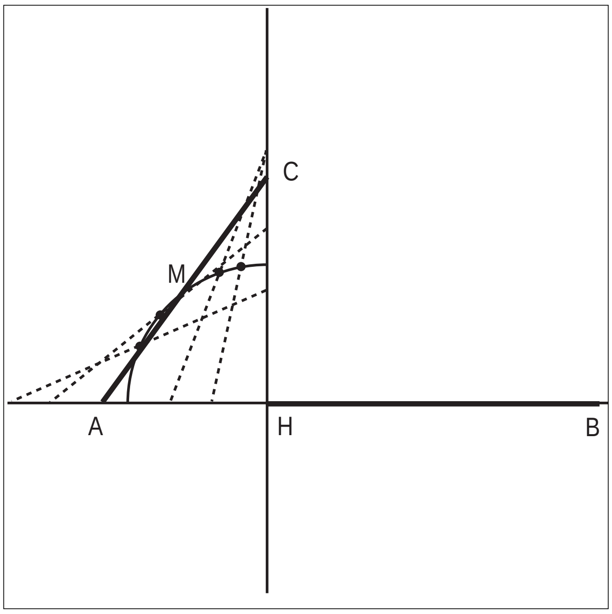
Tutto potrebbe finire qui, ma un triangolo rimanda inevitabilmente
ad altre problematiche sui triangoli;
alla metodologia di lavoro (lavoro di ricerca, di costruzione della conoscenza);
alla possibilità di usare il problema stesso come stimolo per approfondimenti.

Gli studenti come protagonisti della ricerca
Farò brevi cenni metodologici attraverso esempi di discussioni ed analisi di situazioni. (Potrebbero essere a questo proposito utili i laboratori nei quali tentare nuove metodologie di lavoro?).

Primo esempio:
I Teoremi di Euclide come scoperta attraverso l'esplicitazione di **informazioni** relative ai triangoli rettangoli, (proposta che può avere luogo già alla fine della scuola media inferiore), segmenti e loro misure.
Conosciuta una coppia di segmenti tra quelli evidenziati (AC, AB, BC, CH, AH, HB) essa è sufficiente, come informazione, per disegnare, a meno di isometrie, il corrispondente triangolo rettangolo, se per un momento



tralasciamo le coppie "simmetriche" AC, HB e CB, AH che sono particolarmente interessanti, ma forse più complesse delle altre per la nostra riflessione immediata.
Un breve cenno su queste ultime per quanto riguarda la scuola media: con Cabri è possibile esplorare la situazione in modo particolarmente efficace.

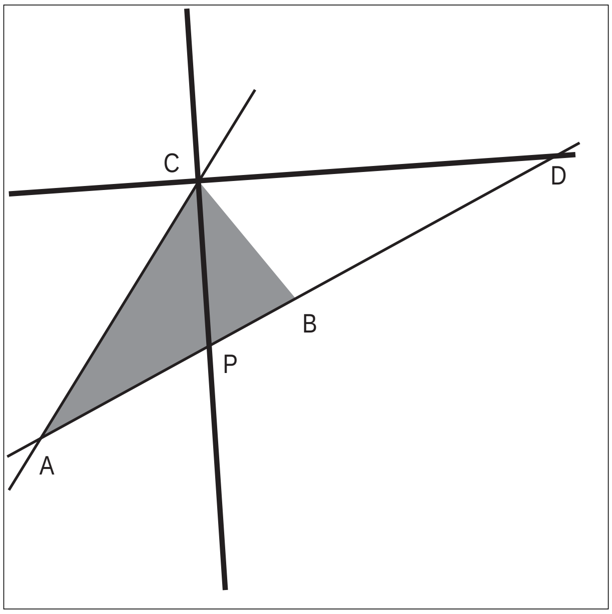


Si potrebbe arrivare a capire la differenza di contenuto informativo di tali coppie rispetto alle altre e scoprire il luogo dei punti M, approfondire lo studio del triangolo rettangolo e prender coscienza di "panorami " che continuamente si dilatano.
A livello superiore si potrebbe notare la non immediata costruzione del triangolo pur riconoscendo "di necessità" un legame tra i due segmenti.
Ritornando alle altre coppie, se, accanto alla costruzio-

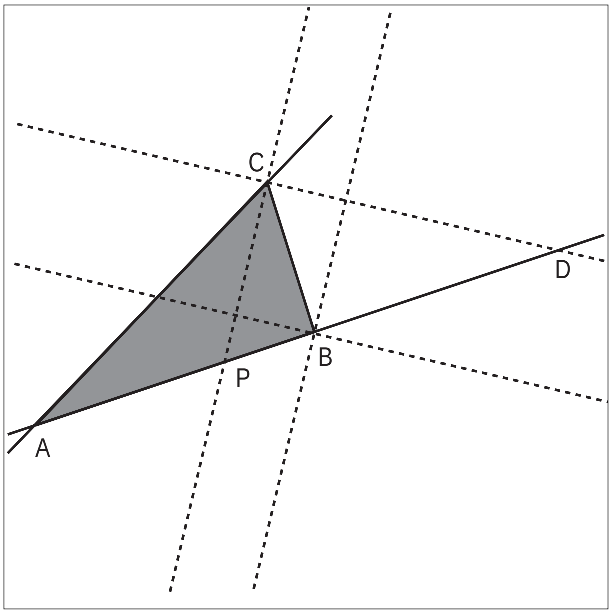
ne, grafica analizzo anche la possibilità di ricavare la misura di tutti gli altri segmenti che ho evidenziato (sempre a partire dalla coppia che uso per la costruzione), noto che l'uso del Teorema di Pitagora non è sufficiente per risolvere il problema.
Partendo dalla considerazione che la risoluzione di un problema è implicita nelle informazioni che posseggo, non posso che farmi una domanda: *Ho trascurato qualche cosa?*
Analizzando meglio scopro che, accanto al triangolo iniziale, vi sono altri due triangoli simili al precedente. Se esprimo le relazioni che intercorrono tra i lati corrispondenti dei suddetti triangoli, vengo ad avere, tra le altre, due proporzioni interessanti che mi portano direttamente a scoprire ciò che nei libri è dimostrato come Teoremi di Euclide.

A questo punto posso completare il lavoro che mi ero proposta.
Un'analisi appropriata e le conoscenze già raggiunte sono stati strumenti di nuova conoscenza.

Secondo esempio:
Le bisettrici degli angoli di un triangolo dividono internamente ed esternamente il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati. Come arrivarci?



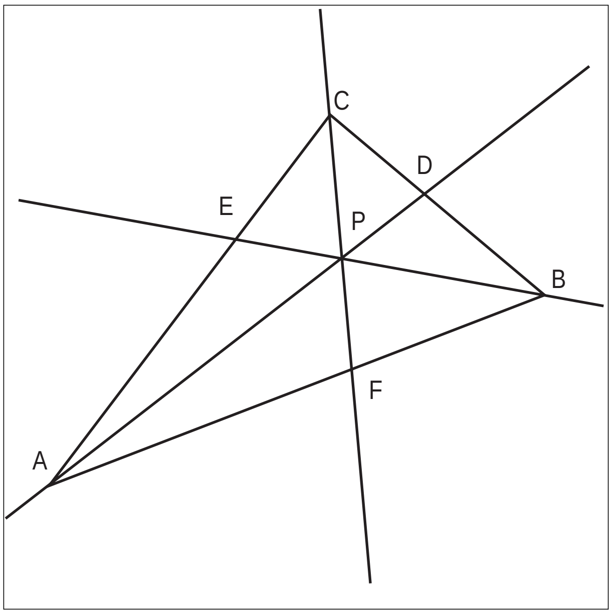
Il disegno con Cabri rende evidente l'angolo retto e la variabilità della situazione. Forse si potrebbe aggiungere qualche suggerimento con la conseguente variabilità non casuale delle misure in gioco. Si porterebbe in tal caso la suggestione della misura nel rapporto con una realtà "virtuale" così come avviene con la realtà concreta e nello stesso tempo si potrebbe efficacemente evidenziare la necessità di superarne il limite.
Resa così visibile una situazione di proporzionalità, potrebbe essere usato lo strumento già sperimentato dei triangoli simili?



Quindi dai triangoli simili in evidenza ai triangoli simili da "catturare"! Il Cabri incomincia ad esaltare suggerimenti!

(Con un approfondimento neppure tanto audace, tutto ciò potrebbe portare al birapporto armonico dei punti ABPD che può essere richiamato in seguito in situazioni più avanzate.)

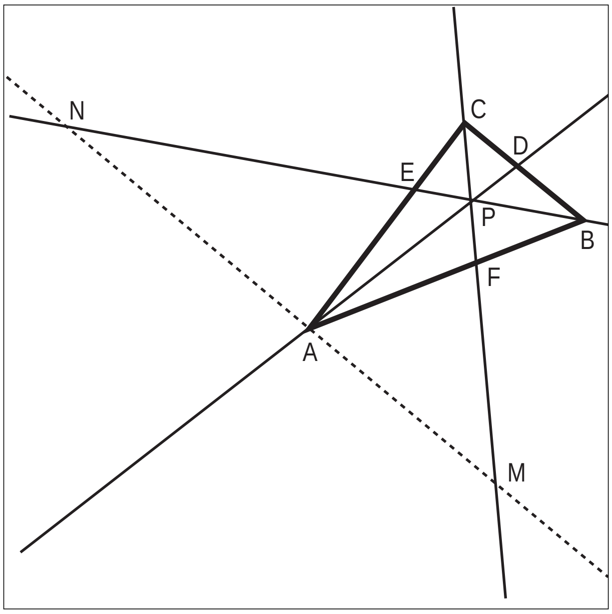
Terzo esempio: verso il Teorema di Ceva
Tracciate le tre bisettrici di un triangolo, si potrebbe poi anche vedere (indipendentemente dal fatto che esse si incontrino o no in uno stesso punto) che, considerati i tre rapporti (relativi ai tre lati) del tipo AP/PB, il loro prodotto porta ad 1! Parallelo con le mediane…e ritorno alla scoperta empiricamente raggiunta dell'invariante della situazione: i tre segmenti si incontrano in un punto!



Possiamo scoprire una relazione generale partendo dal-

l'invariante?
Non credo che con una discussione (soprattutto se gli studenti sono abituati a porsi "problemi") sia difficile ribaltare la situazione. Consideriamo per esempio un punto P interno ad un triangolo e proiettiamolo da ogni vertice sui lati opposti *(vedi figura precedente)*.

"Manipoliamo" la figura con Cabri (qualcuno potrebbe nuovamente, se lo ritenesse opportuno, esaltare l'osservazione introducendo le misure dei segmenti in cui i lati vengono divisi) ricordando in parallelo l'esperienza analoga per le bisettrici.
Ci troveremmo esattamente di fronte a ciò che abbiamo già vissuto: un problema di rapporti e la tentazione di far apparire triangoli simili.



Io credo che i passi precedenti possano portare a ipotizzare una relazione tra i segmenti evidenziati.
Con l'aiuto dell'insegnante (nasce qui il problema di orientare i segmenti come già sarebbe stato utile per il birapporto armonico) si può completare l'approfondimento che porta al Teorema di Ceva (pubblicato da Giovanni Ceva nel 1678).

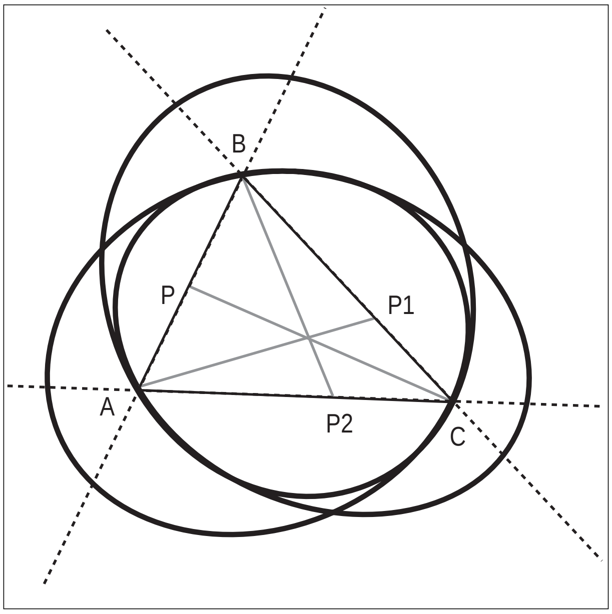
Teorema di Ceva
Dato un triangolo ABC e i punti D, E, F lungo i lati (vedi figura n.7), ***condizione necessaria e sufficiente*** *affinché AD, BE e CF si intersechino in uno stesso punto è che*

(BD/CD) CE/AE) (AF/BF) = -1

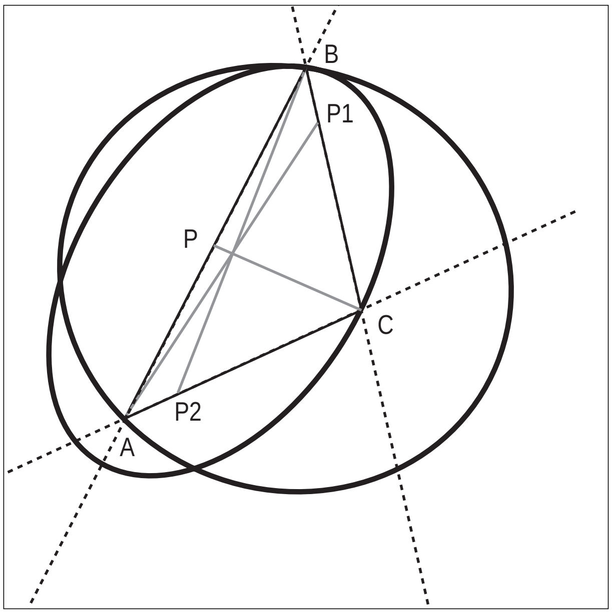
Si è fatto un cambiamento di livello concettuale: alcune scoperte empiriche sono state dimostrate, sono divenute strumento concettuale ed evidenziano il percorso culturale fatto.
Ritornando al problema iniziale, la particolare configurazione dei punti P fa sì che essi dividano i lati del triangolo proprio in rapporti che soddisfano il teorema scoperto.

Nuovi approfondimenti

Di nuovo tutto sarebbe potuto finire qui, ma avendo memorizzato **una macro** per costruire le coniche, ho evidenziato le ellissi che hanno P e C come fuochi e A e B come punti, ecc.
Automaticamente è risultato il disegno:

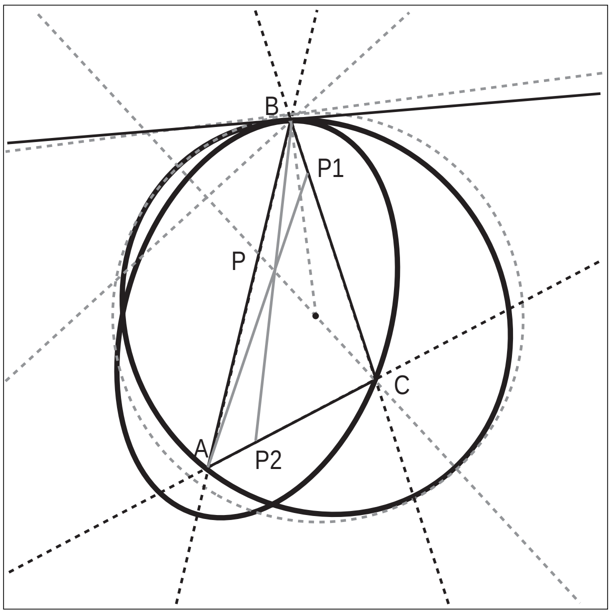


Suggestivo, ma che cosa mi suggerisce? Che a due a due le coniche sono tangenti? E le altre intersezioni?
I problemi che qui si potrebbero porre dipendono naturalmente dal livello scolastico nel quale si discute il problema.
Non facciamo ipotesi, sottintendendo che quasi sempre il lavoro può andare in direzioni diverse: verificare la capacità di sfruttare alcune conoscenze già raggiunte o portare ad una nuova conoscenza, ma anche "camminare" fin dove sia possibile in alcune direzioni per mostrare, anche da lontano, l'ampiezza dei panorami oltre ai confini di conoscenza in cui ci troviamo.



Ciò che va sottolineato è che la caratteristica di Cabri, di fornire una grande variabilità di figure della stessa situazione, dovrebbe essere sfruttata come prassi. A questo punto, ammesso di poter continuare, e' possibile porre la questione dell'intersezione di due ellissi.

"Produciamo" allora un disegno "diverso" e ci soffermiamo su di esso, trascurando una conica per meglio vedere le cose *(vedi figura precedente)*.
Il disegno sarebbe coerente se davvero in B le due ellissi fossero tangenti.
Graficamente otteniamo subito il risultato (che naturalmente non ha alcun valore dimostrativo) e lo raggiungiamo sfruttando il birapporto armonico. Non ci dilunghiamo su questo punto, perché ci porterebbe lontano e lasciamo immaginare tutta la serie di percorsi culturali che vi potremmo collegare.



A questo punto però nasce il problema della dimostrazione.
Essa riporta al teorema che in una conica a centro, la tangente in un punto P è bisettrice di uno degli angoli formati dalle due rette che uniscono P ai fuochi. Nel nostro caso le due rette sono le stesse per entrambe le coniche.
Certamente la dimostrazione di questo teorema non è proponibile nella scuola superiore, perché riporta ad una concatenazione di conoscenze troppo impegnative e quindi poco utili al lavoro scolastico.
Quello che però potrebbe diventare interessante, se in qualche caso fortunato si giungesse mai a parlare di polo e polare, sarebbe di sviluppare il discorso in un laboratorio parallelo alla fisica in cui in cui si parli di proprietà ottiche dei fuochi. Potrebbe divenire affascinante allora accostare l'itinerario matematico (senza dimostrazioni, direi), che da una conoscenza all'altra "costruisce" il sapere facendo mutare continuamente livello concettuale.

COME FARE

media superiore

Fisica con Cabri: i sistemi di riferimento

di Renato Verdiani
Collaboratore esterno IRRE-ER

Premessa

Fisica teorica e Fisica sperimentale

Fino a pochi anni fa erano solo due le possibili suddivisioni di questa disciplina: Fisica teorica e sperimentale. Gli insegnanti potevano prediligere l'una o l'altra o integrare la prima con attività di laboratorio.
Adesso, con l'elevata capacità di elaborare dati e immagini di un computer, siamo costretti ad aggiungerne un'altra: *Fisica virtuale*.
Basta scorrere qualche pagina web (come questa con indirizzo: www.ba.infn.it/www/didattica.html) per accorgerci che "si può simulare tutto"!
Col linguaggio HTML e con le cosiddette Applet Java, non c'è esperimento di fisica che non possa essere riprodotto virtualmente con un computer.
Se però indaghiamo più a fondo, possiamo notare che l'uso di tali simulazioni da parte dei docenti è minimo: la terza suddivisione non è molto prediletta!
Proviamo a dare una possibile giustificazione.
Sono convinto che le simulazioni di fisica debbano sottostare a questi due principi assoluti [1]:

1) se un fenomeno fisico può essere riprodotto in laboratorio anche con "materiale povero" **non deve essere simulato** con un computer;
2) una simulazione di un fenomeno fisico per essere didatticamente valida deve possedere i seguenti requisiti:
   a) se la legge fisica è già implementata nel software che gestisce la simulazione, tale legge non deve essere nota agli studenti, il computer non deve eseguire alcun calcolo significativo e l'insegnante deve aiutare i propri studenti a scoprire la legge come se

fossero davanti ad un esperimento reale;
b) se la legge fisica non è implementata nel software, allora il computer può (deve) eseguire calcoli e solo attraverso l'analisi di questi si potrà determinare la legge fisica che dovrà essere conseguenza del fenomeno simulato.

Mi spiego con alcuni esempi.

Il fenomeno della riflessione della luce

Nessuna simulazione, comunque sofisticata e accattivante, potrà aggiungere validità didattica alla verifica sperimentale (angolo d'incidenza uguale a quello di riflessione), che può essere eseguita semplicemente con un goniometro, uno specchio e una qualunque sorgente luminosa.

Nessun insegnante sarà stimolato ad usare un software di simulazione per costruire una lezione su questo fenomeno.

Il moto di un corpo lungo un piano inclinato

Nel n.31 del bollettino degli utilizzatori di CABRI è stata pubblicata la simulazione dell'esperimento di Galilei sul piano inclinato.[2]

E' chiaro che il movimento del corpo è comandato da un software che tiene conto dell'equazione oraria di un moto rettilineo uniformemente accelerato e quindi, *per forza*, il risultato finale sarà quello voluto. Però il computer si limita a dare solo i valori numerici richiesti dall'utente (la posizione del punto T e la distanza del segmento OP) e nient'altro; gli studenti arrivano alla relazione $s = k\,t^2$ in modo autonomo, dopo aver elaborato tutti i dati ottenuti.

La simulazione acquista validità didattica solo se è utilizzata come indicato nell'articolo, ma può diventare banale (e quindi da non utilizzare) se si dichiarasse esplicitamente di voler *verificare che lungo un piano inclinato la legge del moto è* $s = k\,t^2$, e se il computer, oltre alla parte grafica, eseguisse anche il calcolo s/t^2 (in altre parole si verificherebbe solo quanto è stato bravo il programmatore che ha realizzato la simulazione, ma nessun valore verrebbe aggiunto a quanto può trovarsi descritto in un libro di testo con un disegno ben fatto).

I sistemi di riferimento

Il moto di un punto materiale (situato in un sistema di riferimento) viene osservato anche da un altro sistema di riferimento.

Quale sarà la traiettoria vista da osservatori situati nei due sistemi se questi ultimi si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme o di moto rettilineo uniformemente accelerato?

La validità didattica è assicurata se il computer si limiterà a simulare solo il moto del punto materiale e quello dei due sistemi di riferimento; la traiettoria dovrà essere scoperta dagli studenti sotto la guida dell'insegnante che deve gestire tutte le fasi della simulazione.

L'articolo che segue è lo spunto per una **lezione** sui sistemi di riferimento con tali caratteristiche.

I sistemi di riferimento

Quando si studia il moto di un corpo dal punto di vista cinematico, il primo concetto da mettere ben a fuoco è quello di "sistema di riferimento".

E' opportuno quindi richiamare alla mente la definizione di "moto di un corpo" o meglio, cosa si intende quando affermiamo che "un corpo è in moto".

Da qualunque testo leggiamo:

Un corpo è in moto quando la sua posizione cambia nel tempo rispetto ad un sistema di riferimento.

La definizione *non è difficile* ma, normalmente, gli studenti recepiscono solo il concetto espresso dalle parole "la posizione cambia" e pongono poca attenzione al legame della posizione col tempo e col sistema di riferimento.

Un insegnante per mettere a fuoco anche questi due punti ha a disposizione solo pochi strumenti e, normalmente, si limita a ripetere questi esempi: per il "legame col tempo" alzerà un oggetto dalla cattedra e poi lo riporrà nello stesso punto per far notare che "la posizione non è cambiata", ma che "il corpo si è mosso".

Per il legame col sistema di riferimento farà uso del "classico esempio dei due treni": quando siamo seduti sul sedile di un treno fermo alla stazione, per un breve istante siamo incapaci di decidere se è il nostro treno che sta partendo o invece è quello sul binario adiacente che si muove in senso opposto.

Vediamo come la seguente proposta può dare "valore aggiunto" alla comprensione della definizione del moto di un corpo in relazione al legame della posizione con un sistema di riferimento.

Il percorso didattico si svilupperà attraverso quattro tappe: con la prima, si osserverà il moto di un punto materiale da due sistemi di riferimento (SR-A e SR-B) immobili l'uno rispetto all'altro; con la seconda, si osserverà il moto dello stesso punto dai due sistemi di riferimento con SR-B immobile mentre l'altro si muoverà (da sinistra a destra) di moto rettilineo uniforme; con la terza, si osserverà il moto dello stesso punto con SR-A immobile, mentre l'altro si muoverà (da destra a sinistra) di moto rettilineo uniforme; infine con la quarta tappa, si osserverà il moto di un corpo in caduta libera, soggetto quindi all'attrazione gravitazionale, dal SR-B che si muove (da destra a sinistra) di moto rettilineo uniformemente accelerato.

Prima Esperienza: SR-1.FIG

Sulla lavagna elettronica di CABRI si presenta una figura con due rettangoli, uno interno all'altro,
sui quali è disegnato il primo quadrante di un sistema di assi cartesiani.

Un punto materiale (simulato da un grosso punto verde senza nome, ma che in seguito chiameremo "***A***") è situato dentro il rettangolo minore.
Sulla parte bassa del monitor c'è infine un punto P, situato nell'origine di un vettore nascosto. (figura 1)

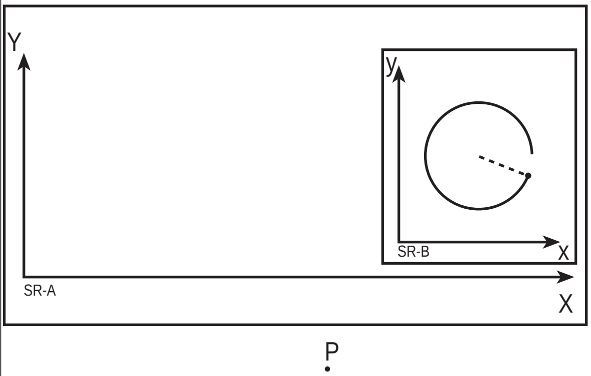


Fig. 1

Chiameremo "interno" un osservatore situato nel SR-B determinato dal rettangolo più piccolo; chiameremo invece "esterno" un osservatore situato nel SR-A determinato dal rettangolo più grosso.
Con questa prima costruzione possia-mo simulare il primo caso.
Il moto del punto ***A*** dovrà essere comandato applicando verso sinistra la molla virtuale di CABRI al punto P.
In questo caso non abbiamo alcuna difficoltà ad interpretare il moto di ***A***: quando i due sistemi di riferimento sono in quiete relativa tra loro, sia l'osservatore esterno che quello interno "vedono" il punto descrivere una circonferenza.

Seconda Esperienza: SR-2.FIG

La nuova costruzione, apparentemente simile alla precedente, ci permetterà invece di simulare la situazione del secondo caso: l'osservatore interno si trova sul SR-B che è immobile mentre l'osservatore esterno si muove (di moto rettilineo uniforme) insieme al SR-A da sinistra verso destra rispetto all'altro.

Si carica in memoria la nuova costruzione SR-2.FIG (figura 2)e successivamente si *muoverà a mano* il punto P verso destra. Poiché risulta impossibile memorizzare le posizioni assunte dal punto ***A*** dall'osservatore che si trova in SR-A, bisogna preparare un foglio di carta trasparente (lucido per lavagna luminosa), sul quale devono essere disegnate due rette perpendicolari che rappresentino il primo quadrante di un sistema di assi cartesiani ortogonali.
Quindi si deve procedere in questo modo: si fanno coincidere gli assi cartesiani del foglio trasparente con gli assi disegnati sul rettangolo grande e poi si ricopia con un pennarello indelebile su tale lucido la posizione del punto ***A***. (figura 3)

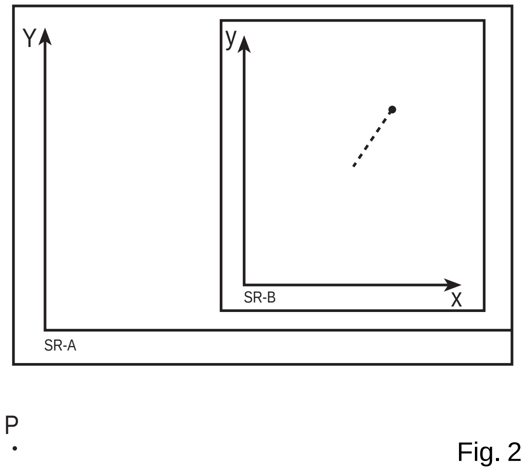


Fig. 2

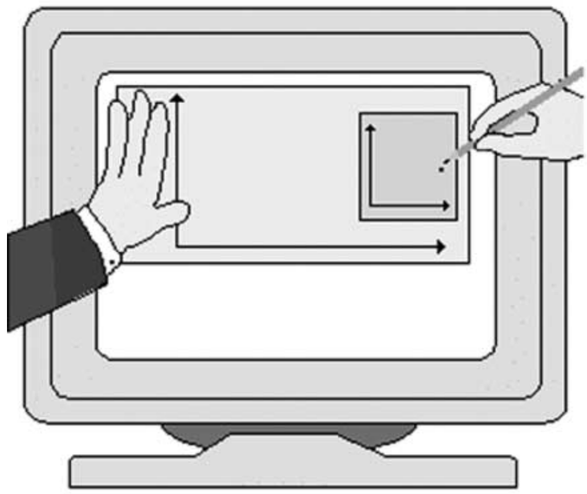


Fig. 3

Successivamente si dovrà spostare col mouse il punto P di un piccolo tratto; poi si dovrà spostare il lucido in modo che gli assi coincidano sempre con gli assi del rettangolo grande e quindi si dovrà ricopiare ancora la posizione del punto ***A***.
Dovremo avere la pazienza di ripetere tali operazioni per numerose volte, in modo da "memorizzare" sul lucido quello che, come abbiamo affermato in precedenza, non riesce a fare il computer.
Se avremo lavorato con cura, sul lucido rimarrà impresso un insieme di punti che descrivono la traiettoria del moto del corpo "vista" dall'osservatore esterno. (figura 4)

Terza Esperienza: SR-3.FIG

La nuova costruzione ci permetterà di simulare la situa

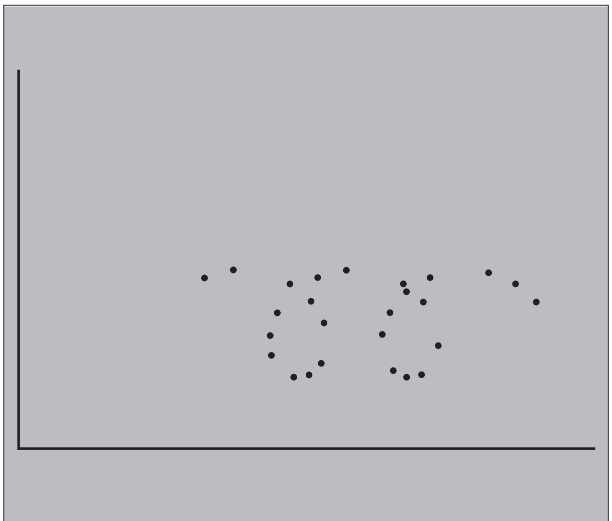


Fig. 4

zione del terzo caso: l'osservatore esterno si trova sul SR-A, che è immobile mentre l'osservatore interno si muove (di moto rettilineo uniforme) insieme al SR-B da destra verso sinistra rispetto all'altro.
Si carica in memoria la nuova costruzione SR-3.FIG e successiva-mente si farà muovere il punto P con la molla virtuale. (figura 5)

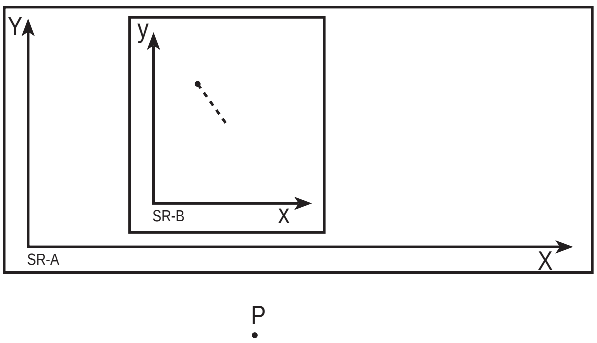


Fig. 5

E' interessante far notare agli studenti che, *inesorabilmente*, il nostro cervello "vedrà" il punto ***A*** che si muove di moto circolare poiché, senza accorgercene, ci mettiamo automatica-mente dentro il SR-B.
Occorre quindi riportare tutto nelle condizioni iniziali e prima di applicare la molla al punto P, si dovrà chiedere a CABRI di disegnare le posizioni del punto ***A***, applicando l'istruzione TRACCIA a tale punto.
Sul monitor comparirà la "vera" traiettoria, vista dall'osservatore esterno.
La traiettoria è una curva caratteristica che i matematici hanno chiamato "cicloide". (figura 6)

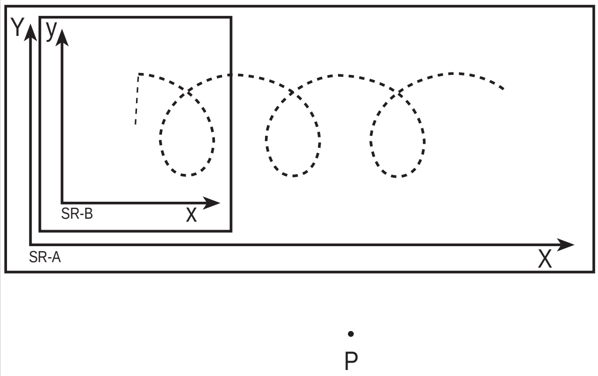


Fig. 6

E' superfluo dire che l'osservatore interno situato sul SR-B vedrà sempre una traiettoria circolare.
Le conclusioni, teoriche, assumono adesso un ruolo molto importante dato che, con una semplice sovrapposizione del lucido precedente sul monitor, i punti presenti sul lucido si sovrappongono alla traiettoria presente sullo schermo e cioè:
dalla traiettoria descritta da un corpo ***non è possibile*** *stabilire se tale corpo si è mosso stando in un riferimento in moto, oppure se il sistema di riferimento del corpo è fermo, ma è in moto quello dal quale viene osservato.*
I due sistemi di riferimento, in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro, si dicono inerziali e nessuno di essi può ritenersi privilegiato e tale da essere considerato assoluto.

Quarta Esperienza: SR-4.FIG

Con la nuova costruzione possiamo simulare il moto di un grave in caduta libera osservato da un sistema di riferimento SR-A (considerato "fermo"), mentre il grave si trova in un SR-B che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato.
(Per quanto affermato nelle conclusioni precedenti, è una pura "convenzione" considerare fermo il SR-A e inoltre non è necessario simulare la situazione opposta, cioè il SR-A in moto accelerato e il SR-B immobile.)
La costruzione realizzata con CABRI è più complessa delle precedenti, poiché abbiamo voluto rappresentare il moto del corpo con una sequenza di immagini stroboscopiche: muovendo il punto P, il corpo non lascerà la tradizionale *traccia* (continua) di CABRI, ma tracce ad intervalli temporali costanti (che possiamo considerare unità di tempo arbitrarie).
Il fenomeno simulato può essere descritto in questi termini: una sfera si trova saldamente legata ad un sistema di riferimento (SR-B) che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato da destra a sinistra (figura 7);

ad un certo istante (il quinto intervallo di tempo nella simulazione) il legame si rompe e la sfera cade liberamente in verticale; durante la caduta la sfera lascia la sua traccia (stroboscopica) come quella riportata nella figura 8 che rappresenta una situazione statica (il SR-B immobile).

Si chiede di determinare la traiettoria vista dall'osservatore situato nel SR-B nella situazione dinamica. Facciamo notare che la sfera, dopo che ha iniziato la sua caduta, non è più vincolata al SR-B e quindi il computer può memorizzare solo le posizioni corrispondenti a quelle osservate dal SR-A. (figura 9)

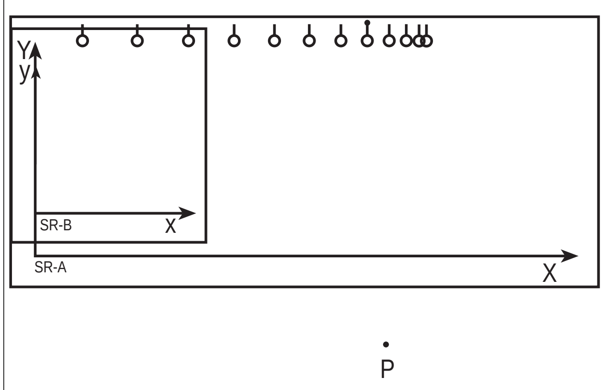


Fig. 7

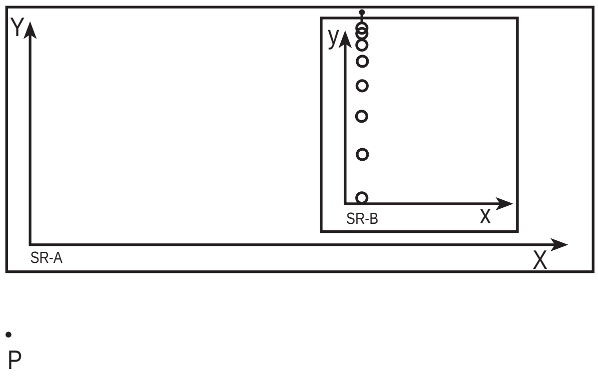


Fig. 8

Si carica in memoria il file SR-4.FIG e, applicando la molla al punto P, si potrà osservare la traccia lasciata dalla sfera, sia quando è saldamente legata al SR-B, sia quando cade liberamente.

L'immagine finale che si ottiene (figura 9) permette di svolgere una lezione approfondita sul fenomeno simulato, lezione che sintetizziamo nei seguenti punti.

- Il *principio d'inerzia* è perfettamente rispettato: conducendo dei segmenti perpendicolari all'asse x passanti per i centri delle singole sfere (figura 10) possiamo notare che risultano equidistanti tra loro. Infatti la velocità della sfera nei primi 5 intervalli di tempo aumenta ma, dall'istante in cui si libera dal SR-B, tale velocità rimane costante.
- Il *moto* della sfera in caduta libera rimane uniformemente accelerato: conducendo dei segmenti perpendicolari all'asse y passanti per i centri delle singole sfere (figura 11) possiamo notare che le posizioni coincidono con quelle della figura 8.

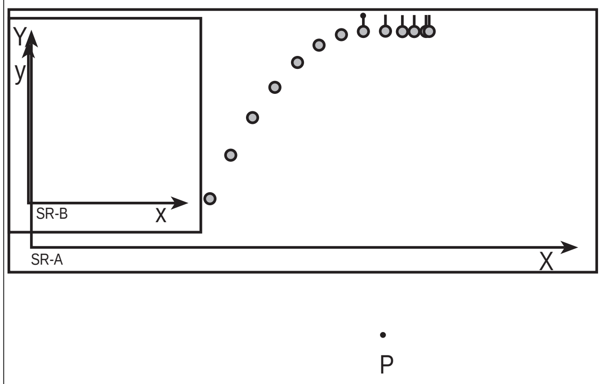


Fig. 9

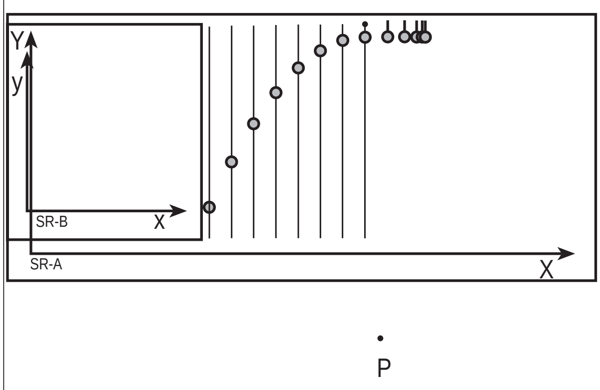


Fig. 10

Per trovare la traiettoria "vista" dall'osservatore interno al SR-B, occorre procurarsi un nuovo lucido per lavagna luminosa e procedere nel modo seguente.

Sul lucido si disegna il primo quadrante di un sistema di

assi cartesiani; si sovrappone l'asse x del lucido con l'asse x del SR-A; si fa coincidere l'asse y del lucido col punto di maggior dimensioni della fila di punti in alto, che corrisponde alla posizione assunta dal SR-B nell'istante in cui il corpo viene lasciato libero; si segna con un pennarello indelebile la posizione della sfera corrispondente.
Successivamente, si sposta il lucido verso sinistra fino a far coincidere l'asse y col primo punto assunto dal SR-B dopo il primo intervallo di tempo; lasciando sempre l'asse x coincidente con quello del SR-A, si segna col pennarello la posizione della sfera corrispondente.
Si ripete per tutte le sette posizioni.

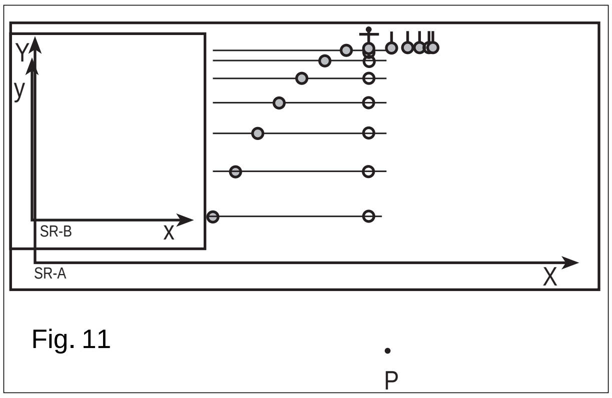


Fig. 11

Nella figura 12, è mostrato l'atto del segnare la posizione della quinta sfera, dopo aver fatto coincidere l'asse y del lucido con il quinto punto situato sulla parte superiore del SR-A. Nella stessa figura possiamo notare che, per facilitare il compito, le 7 posizioni della sfera e le analoghe posizioni assunte dal SR-B sono state numerate.
Non credo sia opportuno riportare il risultato finale e non credo sia opportuno neppure fare commenti di carattere teorico che permetteranno di definire i sistemi di riferimento non inerziali e le forze apparenti. Ciascun insegnante è lasciato libero di commentare questa simulazione in modo autonomo.
E' sottinteso però che tutti i *file.fig* saranno inviati per posta elettronica a chiunque ne faccia richiesta al seguente indirizzo: rever@dedalo.com

Indicazioni di carattere tecnico

a – Animazione con la molla di Cabri
Costruiamo un segmento orizzontale AB e successivamente costruiamo un punto P su tale segmento. Se applichiamo a P la molla virtuale di Cabri, noteremo che P, giunto all'estremo B, ripercorre indietro il segmento BA fino ad A e poi il movimento si ripete.
Costruiamo invece un vettore orizzontale AB e successivamente costruiamo un punto P su tale vettore. Se applichiamo a P la molla virtuale di Cabri, noteremo che P, giunto all'estremo B, torna subito ad A e poi il movimento si ripete.
Abbiamo sfruttato questa seconda tecnica per simulare

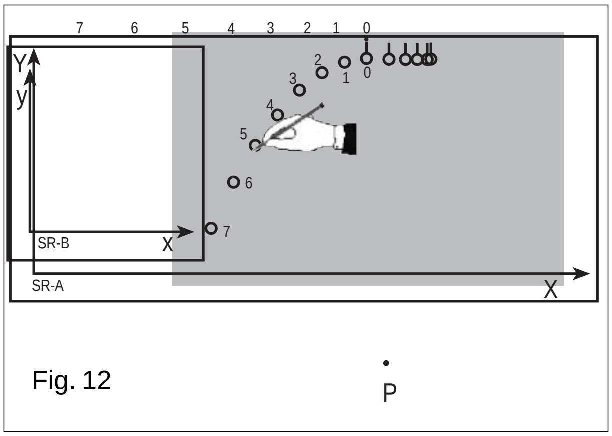


Fig. 12

il moto circolare del punto ***A*** nelle varie esperienze.
La lunghezza del vettore nascosto su cui si muove P è calcolata in modo che, dopo che ***A*** ha compiuto un giro completo, P riparta daccapo dando l'illusione che ***A*** continui a ruotare indefinitamente.
Se P si muovesse su un segmento, il punto ***A*** descriverebbe una circonferenza avanti e indietro.

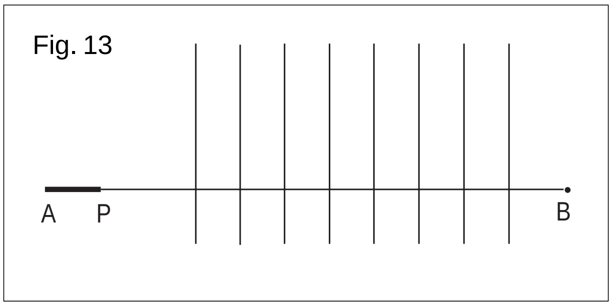
b – Animazioni automatiche con l'Applet CabriJava
Nell'esperienza n. 1 si può evitare di muovere il punto P applicando la molla virtuale di CABRI.
In altre parole si può ottenere l'animazione del punto ***A*** in modo automatico senza dover intervenire manualmente.
Occorre avere il file *CabriJava.jar* nella stessa cartella in cui è memorizzato il file SR-1.FIG e quest'ultimo deve essere lanciato da un programma in HTML il cui listato è il seguente:

```
<HTML>
<BODY BGCOLOR="#FFFFF6">
<FONT SIZE="+2">SISTEMA DI RIFERIMENTO: 1° Esperienza</FONT><BR>
<APPLET CODE="CabriJava.class" WIDTH=750 HEIGHT=500
   ALIGN=bottom archive="CabriJava.jar">
   <PARAM NAME=lang VALUE="it">
   <PARAM NAME=border VALUE=3>
   <PARAM NAME=bgcolor VALUE="#FFFFF1">
   <PARAM NAME=file VALUE="SR-1b.fig">
   <PARAM NAME="autocontrol" VALUE="false">
   <PARAM NAME="loop" VALUE="false">
   <PARAM NAME="spring" VALUE="point 40 size
   -10,0">
</APPLET>
</BODY>
</HTML>
```

Come possiamo notare il file Cabri è "SR-1b.fig" poiché, in questa costruzione, è stato nascosto anche il punto P; la molla è applicata ad esso con l'istruzione :
<PARAM NAME="spring" VALUE="point 40 size -10,0">

L'animazione può essere interrotta semplicemente portando il cursore del mouse fuori del riquadro entro il quale si sviluppa il disegno.

c – Immagini stroboscopiche
Costruire 8 rette verticali equidistanti tra loro e un segmento AB che le intersechi. (figura 13)
Prendere su AB un punto P e costruire anche il segmento AP.



Determinare i punti d'intersezione tra il segmento AP e le 8 rette verticali.
Nascondere tutti gli oggetti escluso il punto P. Applicare la molla a P e … l'immagine che si forma "parla" da sola: P lascia una traccia stroboscopica del suo moto (…rettilineo uniforme!).

Nota (1)
Nel Quaderno 17 di CABRI*RRSAE*, nella parte dedicata alle PROPOSTE DI SIMULAZIONE DI ALCUNI PROCESSI FISICI, si può leggere questo trafiletto:

…E' opportuno comunque sottolineare come, in ogni caso, per quanto "realistica" sia la simulazione, si tratta pur sempre di una **finzione** *che può servire a far meglio conoscere allo studente il modello teorico che di quel fenomeno egli* **ha già studiato** *e Cabri si presta ad interpretare le leggi che descrivono il fenomeno idealizzato, appunto, in un modello. Nel proporre una qualunque simulazione come momento didattico, deve essere chiaro che si tratta di una* **descrizione "illustrata" di un particolare fenomeno**. *In particolare le applicazioni qui presentate,…, sono, possiamo dire, delle illustrazioni alla stessa stregua di come ogni buon libro di testo si sforza di illustrare con delle figure quello che man mano espone nella trattazione di un determinato argomento.*
La differenza, sicuramente notevole, sta nel fatto che al computer è possibile variare dinamicamente le "illustrazioni" o renderle animate al contrario della staticità tipica del libro.

Le affermazioni e gli esempi descritti in questo articolo non fanno parte di questa categoria (descrizioni illustrate), il computer (Cabri) riproduce, anche se virtualmente, fenomeni fisici non noti a priori agli studenti e che possono essere resi il più possibile simili alla realtà.

Nota (2)
Normalmente, in un laboratorio (non virtuale), l'esperimento di Galilei si esegue sistemando una fotocellula lungo un piano inclinato in una posizione X variabile rispetto al punto di partenza O e registrando con un cronometro i tempi impiegati da un carrello a percorrere la distanza OX.

E' possibile rendere ancora più realistica la simulazione variando leggermente la costruzione proposta.
Prima di tutto occorre nascondere sia il vettore che rappresenta l'asse dei tempi sia la misura sottostante e poi aggiungere un punto S poco prima della posizione iniziale del punto T.

Le misure dovranno essere prese così: si sposta il punto P in una posizione arbitraria e si legge il valore OP dato da CABRI; si applica la molla virtuale al punto T allungandola del tratto TS.

Con un cronometro esterno (comandato cioè da uno studente e **non** da Cabri!!!) si misura il tempo impiegato dalla sfera a percorrere il tratto OP; si sposta P in un'altra posizione e si ripete la misura del tempo. La tabella si costruisce con le coppie di valori spazio-tempo.
Il moto della sfera sarà uguale in tutte le prove se abbiamo l'accortezza di "tirare la molla" sempre dello stesso tratto TS.

FLATlandia Dicembre 2002

di Marco Botarel
Liceo Scientifico "G. Verdi" Valdobbiadene - Treviso

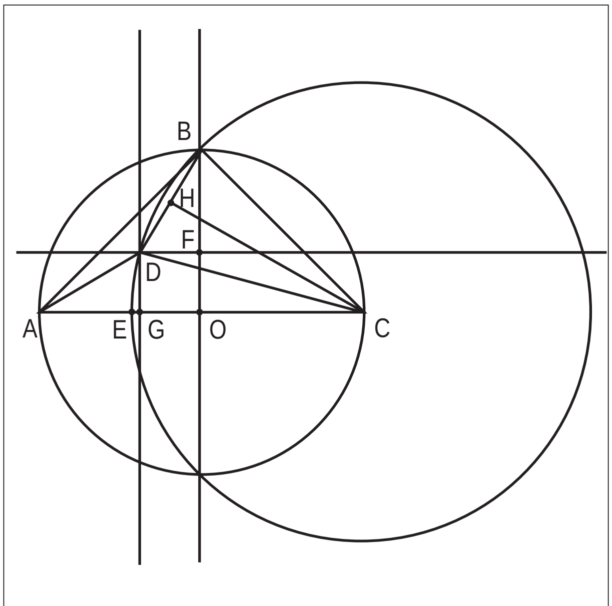
Per il biennio del Liceo Scientifico la nostra scuola ha introdotto quattro moduli di laboratorio per ogni anno scolastico. Nel mese di Novembre abbiamo iniziato il laboratorio di informatica, organizzato dal nostro insegnante di matematica, che ha avuto la durata di due mesi e mezzo. Durante questo periodo abbiamo usufruito di alcuni programmi tra i quali **Cabri-géomètre II**, acquistato recentemente dalla scuola.
Quest'ultimo è stato molto utile, perché grazie alla sua semplicità e alle sue numerose funzioni, siamo riusciti a costruire figure geometriche e verificare proprietà che in classe avevamo potuto dimostrare solo a livello teorico.
La proposta di partecipare alla risoluzione di un vostro problema ci è stata avanzata appunto dal nostro professore; quindi un gruppetto di ragazzi della nostra classe,

con un po' di fantasia e sfruttando le nozioni acquisite in classe, ha cercato di dare una dimostrazione.

Il problema al quale abbiamo partecipato (FLATlandia, Dicembre 2002) è il seguente:
E' dato il triangolo rettangolo isoscele ABC di ipotenusa AC.
- *Individuare mediante una costruzione un punto D interno al triangolo, tale che sia DC = BC = BA e l'angolo DCB congruente all'angolo DAC.*
- *Determinare in tal caso la misura di ciascun angolo del triangolo CAD.*

La dimostrazione che avevamo proposto è la seguente.

Per costruire il triangolo rettangolo isoscele ABC di ipotenusa AC, si traccia la circonferenza di centro O e diametro AC; per O si traccia la perpendicolare ad AC che interseca la circonferenza in B.
Il triangolo ABC è rettangolo, perché inscritto in una semicirconferenza ed è isoscele, perché la mediana e l'altezza coincidono: quindi gli angoli adiacenti all'ipotenusa misurano 45°.
Si costruisce poi la circonferenza di centro C e raggio CB che incontra in E l'ipotenusa AC.
Sia D un punto dell'arco BE, quindi l'angolo BCD può variare da 0° a 45°.



Dimostriamo che quando l'angolo BCD misura 30° anche l'angolo DAC misura 30°.

Si costruiscono:
- una retta parallela ad AC e passante per D, che incontra in F il segmento BO;
- una retta perpendicolare ad AC e passante per D, che incontra in G il segmento AC;
- la bisettrice dell'angolo BCD, che incontra in H il segmento BD; essa è anche altezza e mediana del triangolo CBD, che è isoscele, avendo i lati DC e BC uguali perché raggi della stessa circonferenza.

Si ha che:
- l'angolo DCA misura 15° perché ottenuto come differenza tra gli angoli BCA e BCD;
- gli angoli DCA e FDC sono uguali perché alterni interni delle rette parallele DF e AC, tagliate dalla trasversale DC, quindi anche FDC misura 15°;
- l'angolo BDC misura 75° perché il triangolo BCD è isoscele e il suo angolo al vertice misura 30°;
- l'angolo BDF misura 60° perché ottenuto come differenza tra gli angoli BDC e FDC;
- l'angolo HCD misura 15° perché CH è la bisettrice dell'angolo BCD.

Il triangolo BFD è metà di un triangolo equilatero, quindi l'ipotenusa BD è il doppio del cateto minore DF e, poiché DB è il doppio di DH, si ha DF = DH.
Consideriamo i triangoli DCH e CDG: essi sono entrambi rettangoli rispettivamente in H e G, hanno l'ipotenusa in comune e gli angoli DCH e DCG uguali.
I triangoli sono uguali per uno dei criteri di congruenza dei triangoli rettangoli e di conseguenza i cateti DG e DH sono uguali e per la proprietà transitiva dell'uguaglianza GD è uguale a DF.
Il quadrilatero DFOG è un quadrato, perché è un parallelogrammo che ha due lati consecutivi uguali (GD e DF) e l'angolo compreso retto.
Consideriamo i triangoli DAG e BDF: essi sono uguali, poiché rettangoli rispettivamente in F e in G, DG = DF per dimostrazione precedente e AG = BF, perché differenza di segmenti uguali (OB = OA, perché raggi della stessa circonferenza GO = OF, perché lati del quadrato DFOG).
Ne consegue che gli angoli DAG e DBF sono uguali e misurano 30°; per la proprietà transitiva dell'uguaglianza risulta che l'angolo DAC è uguale a BCD.
Consideriamo il triangolo ADC: esso ha l'angolo CAD di 30°, l'angolo ACD di 15° e l'angolo ADC di 135° perché supplementare alla somma degli altri due.

Il nostro lavoro non è stato pubblicato e ci siamo resi conto che non avevamo precisato come si individua il punto D.
Noi, in effetti, dopo aver indicato con D un punto dell'arco BE e osservato che l'angolo BDC poteva variare da 0° a 45°, avevamo visualizzato l'ampiezza degli angoli DAB e DBC, trascinato il punto D lungo l'arco della circonferenza finché per entrambi gli angoli erano apparse le misure di 30°.
Solo dopo eravamo passati alla dimostrazione, sapendo che i risultati così ottenuti con Cabri potevano costituire solo un indizio dell'esistenza del punto D.
Terminata la dimostrazione avremmo dovuto indicare

una costruzione dello stesso punto D.

Possibili costruzioni sono le seguenti:

a) si traccia una circonferenza di centro C e raggio OC, che incontra in L la circonferenza di centro O e diametro AC. Il triangolo ALC, inscritto in una semicirconferenza, è rettangolo ed avendo il cateto minore metà dell'ipotenusa, ha l'angolo LAC di 30°. L'intersezione di AL con l'arco BE è perciò il punto D cercato.
b) il triangolo AOB ha gli angoli acuti di 45° e, poiché DAG e DBF misurano entrambi 30°, ne consegue per differenza che BAD e ABD sono uguali e perciò il triangolo ABD è isoscele. L'intersezione dell'asse di AB con l'arco BE è perciò il punto D cercato.
c) da dimostrazione precedente risulta che DFOG è un quadrato. La diagonale del quadrato forma con i lati angoli di 45° ed è bisettrice degli angoli stessi. L'intersezione della bisettrice dell'angolo GOF con l'arco BE è il punto D cercato.

Tassellazioni di Keplero, pentagonali, con Cabri

di Andrea Centomo
Scuola media "G. Ciscato" Malo - Vicenza

Introduzione

L'astronomo Giovanni Keplero (1580-1630), a tutti noto per la scoperta delle leggi che governano il moto dei pianeti in riferimento eliocentrico, ha dato importanti contributi allo sviluppo della matematica [3]. Una parte significativa, anche se non cospicua, dell'opera di Keplero è dedicata allo studio delle tassellazioni del piano euclideo. In modo informale, ricordiamo che con il termine *tassellazione* intendiamo una qualsiasi ripartizione del piano in una quantità numerabile di figure dette tasselli. Come noto le uniche tassellazioni del piano euclideo monoedriche, ossia costruite a partire da un unico tassello fondamentale, e con poligoni regolari, sono quelle con triangoli equilateri, quadrati ed esagoni regolari. Ci sono diversi modi per generalizzare queste tassellazioni. Tra questi modi, quelli prescelti da Keplero sono essenzialmente due. Il primo, consiste nel mantenere fermo il presupposto per cui tutti i tasselli devono essere poligoni regolari ma di ammettere che la tassellazione possa non essere monoedrica.
Sviluppando questo aspetto, Keplero riuscì a classificare tutte le tassellazioni archimedee del piano euclideo, ossia quelle tassellazioni in cui, in ogni vertice, si incontrano lo stesso numero e tipo di poligoni regolari. Il secondo modo, consiste invece nell'includere tra i possibili tasselli di una tassellazione non monoedrica dei poligoni stellati. Come vedremo tra breve, questa generalizzazione permise a Keplero di affrontare, tra le altre cose, un problema matematico ancora oggi aperto. Come si è detto in precedenza, tra i poligoni regolari che non ammettono una tassellazione del piano euclideo vi è il pentagono. Il fatto che non esista una tassellazione con soli pentagoni regolari, non esclude a priori l'esistenza di tassellazioni in cui tutti i tasselli fondamentali abbiano simmetria pentagonale. Tassellazioni di questo genere non sono tuttavia mai state scoperte e anzi si è fatta strada la seguente congettura [5]:
non esistono tassellazioni del piano euclideo in cui ogni tassello abbia simmetria pentagonale.

A dispetto della probabile non esistenza di tassellazioni del piano euclideo in cui tutti i tasselli abbiano simmetria pentagonale, Keplero riuscì a costruire dei motivi che ammettono tassellazioni in cui tutti tranne uno dei tasselli fondamentali non ha simmetria pentagonale. Come è stato inoltre evidenziato in [4] le tassellazioni ottenute dai motivi kepleriani con tasselli a simmetria pentagonale sono di interesse per un'altra ragione. Dalla reinterpretazione di una di queste, quella ottenuta a partire dal motivo Aa descritto oltre, si può ottenere una tassellazione di Penrose. La scoperta, che risale al 1974, delle tassellazioni di Penrose, oltre a rivelarsi successivamente essenziale per la creazione di modelli per lo studio della Fisica dei quasicristalli(1), ha contribuito in modo decisivo allo sviluppo del concetto moderno di tassellazione aperiodica. Il lettore interessato all'approfondimento di questo aspetto è rinviato alla bibliografia.
In questo articolo si rivisitano, utilizzando CABRI, i motivi a simmetria pentagonale di Keplero e le tassellazioni da essi ottenute. Le funzionalità di CABRI risultano particolarmente adatte allo studio di questi argomenti e permettono, in alcuni casi, di far luce su aspetti geometrici non banali. I materiali qui elaborati possono essere in parte utilizzati per percorsi didattici di carattere matematico e storico scientifico sia nella scuola media inferiore che superiore.

Interludio

Prima di procedere allo studio dei motivi di Keplero vogliamo dare spazio ad una breve riflessione riguardante le tassellazioni in ambienti geometrici diversi da quello euclideo. Non è difficile intuire come il concetto di tassellazione si possa estendere sia alla geometria ellittica che alla geometria iperbolica. Se la congettura sopra esposta venisse un giorno dimostrata, ci si troverebbe di fronte ad una curiosa situazione per cui la geometria euclidea sarebbe l'unica geometria priva di tas-

sellazioni dove tutti i tasselli hanno simmetria pentagonale. Infatti tassellazioni con pentagoni sono possibili sia nella geometria (ellittica) sulla sfera, sia nel piano iperbolico.
L'esistenza di una tassellazione pentagonale nella geometria sulla sfera è una conseguenza diretta dell'esistenza del dodecaedro. Se infatti si inscrive in una sfera un dodecaedro e si congiungono i suoi vertici con opportuni archi di circonferenza si ottiene una tassellazione, che nel senso della geometria ellittica è fatta di soli pentagoni regolari. In modo meno immediato si possono costruire diverse tassellazioni pentagonali nel piano iperbolico. In figura 1 è rappresentata, come esempio, una tassellazione pentagonale nel modello del disco di Poincaré del piano iperbolico. La figura è stata realizzata con l'ausilio del menù iperbolico di CABRI[2].

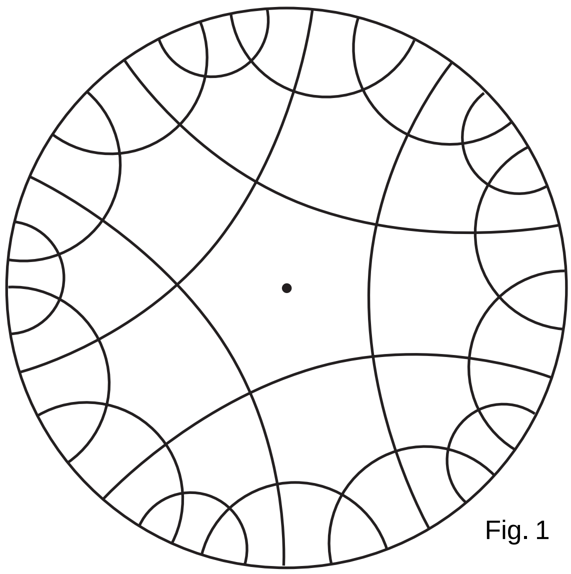


Fig. 1

Tassellazioni di Keplero

Nel secondo capitolo dell'*Harmonice Mundi* [2], pubblicata nel 1619, Keplero mostra numerosi motivi formati da poligoni regolari e stellati che, in molti casi, ammettono una tassellazione del piano euclideo. Tra questi motivi spiccano, per quanto esposto in precedenza, i motivi formati a partire da poligoni con simmetria pentagonale.

Il Motivo Z

Il motivo dell'*Harmonice Mundi* indicato da Keplero con Z è forse meno interessante rispetto ai rimanenti tuttavia la sua costruzione ci serve sia per descrivere le funzionalità di CABRI necessarie per il seguito, sia per precisare alcune notazioni. Il motivo Z (vedi figura 2), che ha simmetria pentagonale, è costruito a partire da un pentagono regolare, da un decagono regolare e dal poligono stellato |5,2|. Come noto i poligoni regolari e le stelle si ottengono in CABRI selezionando il comando Poligono Regolare. Attraverso questo comando possiamo quindi costruire direttamente sia il pentagono che il decagono regolare. In realtà, per costruire il motivo Z, non si ha alcun bisogno di costruire esplicitamente il decagono; esso risulta automaticamente dopo aver eseguito con il comando Simmetria Assiale dieci riflessioni successive del pentagono, evidenziato in grigio nella figura 2, intorno ai lati. Per quanto riguarda il poligono stellato |5,2|, che è stato il primo da noi utilizzato nella ricostruzione del motivo, esso si può ottenere a partire dalla stella {5,2}.

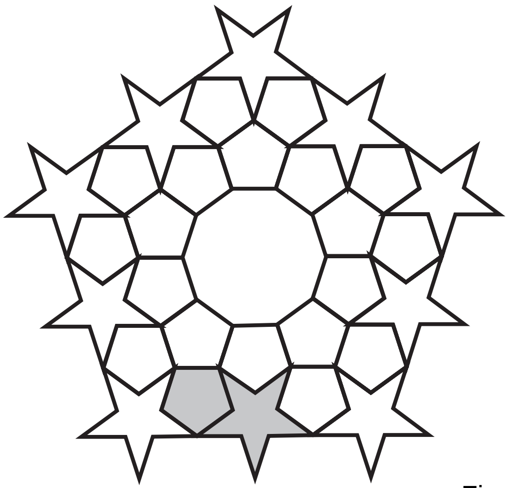


Fig. 2

Per chiarezza preferiamo tuttavia illustrare una sua possibile costruzione esplicita con CABRI.(vedi figura 3)

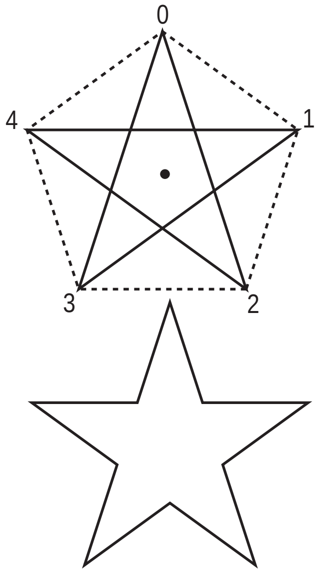


Fig. 3

Prima si può costruire, con il comando Poligono Regolare, un pentagono regolare e quindi numerare da 0 a 4 i suoi vertici. La stella {5,2} si ottiene congiungendo ciascun punto j, j = 0, ... ,4, con il punto ottenuto eseguendo la somma j + 2 modulo 5[3]. Il passaggio dalla stella al poligono |5,2| si effettua congiungendo in modo ovvio i punti di intersezione dei lati della stella e i vertici del pentagono di partenza. Usando opportunamente i comandi Traslazione e Simmetria Assiale, a partire dal poligono stellato evidenziato in grigio, si possono costruire i rimanenti nove poligoni stellati che formano il contorno del motivo Z.

Il motivo Z non ammette una tassellazione del piano euclideo in quanto, con lievi modifiche, esso è un pentagono regolare.

La Tassellazione Aa

Il motivo Aa dell'*Harmonice Mundi*, di cui è rappresentata in figura 4 una porzione sufficientemente significativa, è di maggiore interesse, rispetto al precedente, dal punto di vista della teoria delle tassellazioni del piano euclideo.

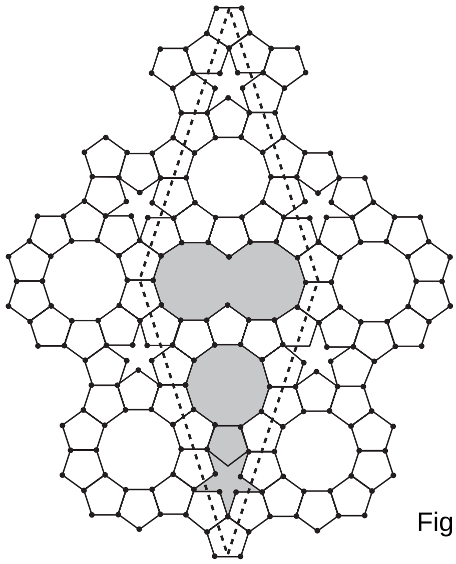


Fig. 4

La sua costruzione con CABRI risulta semplicissima, in quanto è sufficiente costruire un pentagono regolare (evidenziato in grigio) e quindi procedere per opportune successive riflessioni intorno ai lati dei pentagoni che via via si generano. Nella figura 4 abbiamo evidenziato in grigio i tasselli fondamentali a simmetria pentagonale del motivo: un pentagono regolare, un poligono stellato |5,2| e un decagono; in grigio scuro abbiamo evidenziato il tassello denominato da Keplero il *mostro*, data la sua evidente deviazione dalla simmetria pentagonale. Il *poligono-mostro* è un poligono equilatero a 16 lati ottenuto intersecando due decagoni.

Un aspetto matematico non banale consiste nel vedere se e come il motivo Aa può essere esteso ad una tassellazione dell'intero piano euclideo. La risposta, come evidenziato in [1], è affermativa. Infatti se consideriamo il rombo tratteggiato di figura 4 si può vedere che esso ammette la tassellazione di figura 5.

L'uso di CABRI permette di evidenziare un punto delicato nella costruzione della tassellazione: ossia, come nel suo centro, dove cinque rombi vanno ad intersecarsi,

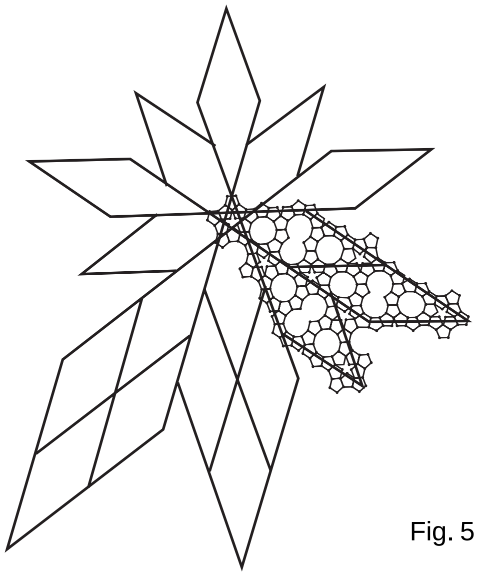


Fig. 5

i poligoni appartenenti ai diversi rombi in effetti si sovrappongano perfettamente. Attraverso CABRI è possibile anche studiare le caratteristiche geometriche fondamentali dei rombi soggiacenti alla tassellazione.

La Tassellazione Bb

L'ultimo motivo che esaminiamo è il motivo Bb, sempre tratto dall'*Harmonice Mundi*, che è rappresentato in figura 6. Si può notare come i tasselli fondamentali che formano il motivo siano due pentagoni regolari, con lati di lunghezza diversa, e il poligono stellato |10,3|. Tutti i tasselli fondamentali hanno simmetria pentagonale. Con il solo ricorso alla funzione Simmetria Centrale è possibile costruire l'intero motivo Bb a partire dal poligono |10,3|. Anche in questo caso, come per

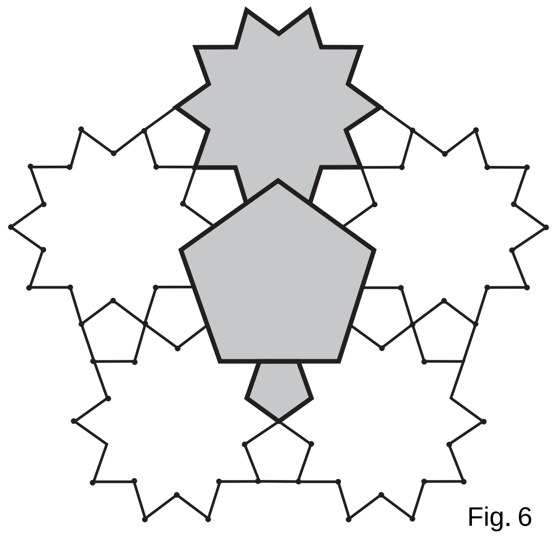


Fig. 6

il motivo Aa, possiamo verificare come il motivo Bb si possa estendere ad una tassellazione dell'intero piano euclideo, considerando la costruzione con rombi di figura 7.

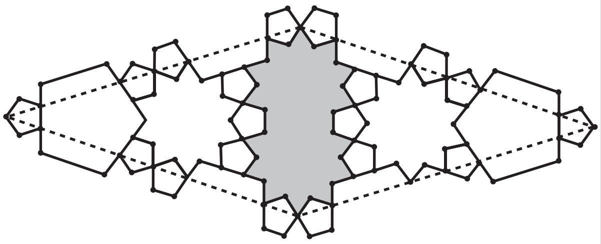


Fig. 7

Si può notare che per poter ottenere una tassellazione del piano si è costretti ad introdurre ancora una volta un *mostro*, ossia un tassello fondamentale privo di simmetria pentagonale, ottenuto questa volta intersecando due poligoni stellati.

Bibliografia

[1] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tiling and Patterns*, W.H. Freeman, New York, 1987.
[2] J. Kepler, *Gesammelte Werke*, C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1937.
[3] C. Boyer, *Storia della Matematica*, A. Mondadori Editore, Milano, 1984.
[4] M. Senechal, *Quasycristals and Geometry*, Cambridge University Press, 1995.
[5] L. Danzer, B. Grünbaum, G.C. Shephard, Can all tiles of a tiling have five-fold simmetry?, *American Mathematical Monthly*, 89, 1982.
[6] M. Motteran, T. Millevoi, B. Scimemi (a cura di), *Matematica e Calcolatore*, Tecnodid Editrice, Napoli, 2002.

(1) Per un introduzione ai quasicristalli e all'importanza delle tassellazioni aperiodiche nel loro studio si rimanda al notevole [4].

(2) Segnalo per lo studio delle tassellazioni e più in generale per lo studio della geometria iperbolica nei due modelli di Poincaré del piano iperbolico, l'uscita dell'edizione in lingua italiana, da me curata con J. Castellanos dell'Università del New Mexico, della versione Java del software NonEuclid. Il software è liberamente scaricabile al sito internet http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/.

(3) L'uso del rapporto tra congruenze algebriche e poligoni stellati nella didattica è esposto nel lavoro di M.A. Chimetto, Congruenze numeriche e poligoni stellati, in [6].

Dal problema della tangente alla funzione primitiva:

un percorso storico di analisi con Cabri-Géomètre II Plus

di Margherita Barile
Dipartimento di Matematica, Università di Bari
e Palmira Ronchi
SSIS Puglia, Sede di Bari

Introduzione

La versione di *Cabri II Plus*, in cui i luoghi sono promossi ad oggetti geometrici a tutti gli effetti, amplia notevolmente le potenzialità applicative di questo software nel campo dell'analisi. Le principali novità sono l'estensione della funzione "intersezione di oggetti" a tutti i luoghi, e la possibilità di creare grafici immediatamente dalla formula della funzione, utilizzando "applica l'espressione".

L'agevole manipolazione dei grafici consente di sperimentare, sulla scia della storia della matematica, i principali metodi per la determinazione delle tangenti, delle funzioni derivate e delle primitive. Il rapido passaggio dall'espressione al grafico, inoltre, favorisce la verifica dei risultati, ed educa gli studenti all'uso parallelo dei registri analitico-formale e sintetico-visivo.

L'insegnante, a sua volta, potrà utilizzare *Cabri* come lavagna interattiva, dove introdurre in maniera dinamica dimostrazioni di teoremi e visualizzare gli andamenti delle variabili e delle funzioni trattate.

Presentiamo alcuni esempi concreti di attività da effettuare in classe, ispirate alle scoperte di importanti matematici dei secoli passati.

1. Da Galileo a Fermat. La retta evanescente.

Si vuole determinare la tangente alla parabola in un suo dato punto C. A tal fine si cerca il punto A di intersezione della tangente con l'asse della parabola. Per risolvere il problema sperimentalmente con *Cabri Gèomètre II Plus*, una volta tracciata una parabola con il relativo asse, si fissa un punto A sull'asse, quindi il punto C della parabola, in modo che il segmento AC intersechi la parabola in un altro punto B (vedi figura 1). Allontanando il punto A dall'origine, il punto B si avvicinerà a C: la retta AC, inizialmente secante, diverrà tangente nel momento in cui B si sovrapporrà esattamente a C.

Detto D il piede della perpendicolare condotta da C all'asse della parabola, confrontando le distanze AO e OD, si potrà constatare che, indipendentemente dalla scelta di C, la tangenza si ha esattamente quando AO=OD. Questa è una caratterizzazione risalente alla geometria greca: la riporta Apollonio come Proposizione 33 del Libro I del suo famoso trattato ***Le** coniche* [2, pag. 57], e la riprende Galileo nei *Discorsi intorno a due nuove scienze* [6, pag. 773].

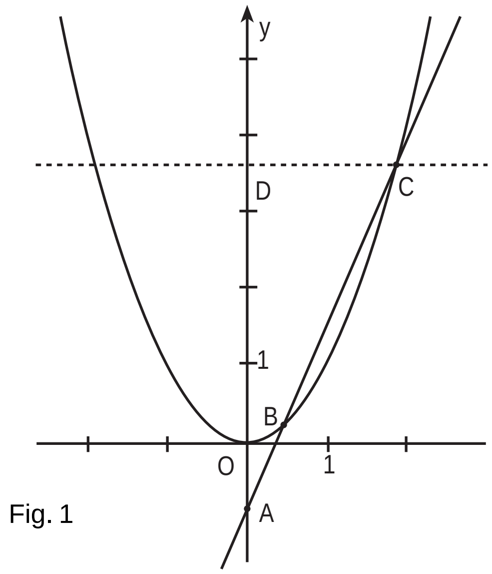


Fig. 1

Si può anche osservare che, naturalmente, durante il processo di avvicinamento di B a C, la distanza AB cresce sempre. In altri termini, *la tangente alla parabola in C è la retta che massimizza la distanza tra il punto A ed il più vicino punto d'intersezione B della secante con la parabola.* Questo criterio risale a Fermat, che lo espose nel suo saggio *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* del 1638 [5, pagg. 135-136, vedi anche 3, pag. 19]. Egli ebbe le prime intuizioni di quello che, nel corso del Seicento, grazie ai contributi di Leibniz e Newton, sarebbe divenuto il *calcolo infinitesimale*. Il criterio di Fermat è basato sull'osservazione di grandezze variabili con continuità (i "fluenti", secondo la terminologia newtoniana), e questo aspetto è la vera novità rispetto alla geometria euclidea, basata (come, ad esempio, il criterio di tangenza di Apollonio), sul confronto tra grandezze statiche, legate da proporzioni. La fonte di ispirazione per Newton è data dai fenomeni fisici, soprattutto meccanici, in cui una curva rappresenta la traiettoria di un punto in movimento.

Con il nuovo metodo dinamico, si affaccia sullo scenario matematico anche un nuovo tipo di grandezza geometrica: è l'*infinitesimo***,** inteso come lunghezza limite del processo di contrazione di un segmento. Nella visione newtoniana, si tratta della cosiddetta "quantità evanescente" che si ottiene un istante prima che il segmento svanisca in un punto. La tangente ad una curva nel punto è, in questo quadro, il limite della successione delle secanti passanti per C e per un secondo punto B della curva, che si realizza quando, nel processo di avvicinamento di B a C, i due punti, un attimo prima di coincidere, risultano a distanza infinitesima. Per rendere efficacemente visibile questo momento, si può modificare la costruzione descritta sopra. Anzitutto, poiché si desidera che il punto B scompaia una volta raggiunto C, occorre definirlo come l'intersezione della parabola con il *segmento* AC, anziché con la retta AC. Quindi si nasconde la retta AC e si traccia, al suo posto, la retta BC: l'oggetto, ovviamente, è lo stesso, fintanto che B e C sono distinti. Il cambio di definizione diviene però decisivo nel momento in cui B transita per C: allora, per un fugace attimo, *Cabri* avverte ancora i due punti come distinti, e, di conseguenza, traccia la retta che li congiunge. Successivamente i due punti si fondono, la retta BC non è più definita e, infatti, svanisce.

Da Cabri II a Cabri II Plus: La nuova versione prevede la possibilità di determinare i punti di intersezione non solo di rette e coniche, ma di due luoghi qualsiasi; quindi essa consente di applicare il procedimento ad una qualunque curva definita come luogo geometrico o come grafico di una funzione. La realizzazione di quest'ultimo è particolarmente semplice grazie alla funzione "applica l'espressione".

2. La funzione derivata.

La derivata è stata concepita, come limite della pendenza delle secanti, per la prima volta da Isaac Barrow, matematico inglese contemporaneo di Newton, che raffigurava il rapporto incrementale mediante il cosiddetto "triangolo differenziale": un triangolo rettangolo avente come ipotenusa il segmento congiungente i punti P(x, y) e P'($x+dx$, $y+dy$) del grafico di una funzione [4, pag. 50]. I suoi cateti, paralleli agli assi coordinati, rappresentano gli incrementi dx e dy (dotati di segno) delle ascisse e delle ordinate nel passaggio da P a P'. La retta PP' è secante al grafico, ed approssima la tangente al grafico in P (se questa esiste) tanto meglio quanto più piccolo è dx (equivalentemente, data la continuità della funzione, quanto più piccolo è dy). Nella stessa misura la pendenza dy/dx della retta PP' si avvicina al valore assunto in x dalla derivata della funzione assegnata. Possiamo seguire questo approccio, che riflette la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, per disegnare, in maniera approssimata, il grafico della funzione derivata di una funzione derivabile f di cui sia dato il grafico come luogo. A tal fine si utilizzerà, per ogni punto P, lo stesso incremento dx delle ascisse. Questo sarà rappresentato dalla lunghezza di un segmento (riportato in basso a sinistra nella figura), la cui lunghezza potrà essere variata spostando l'estremo destro.

Fissato un punto x dell'asse delle ascisse, con l'ausilio del compasso si traccia il punto $x+dx$ dell'asse delle ascisse. Quindi si tracciano i corrispondenti punti P e P' del grafico, applicando l'espressione della funzione alle ascisse x e $x+dx$, ed effettuando, successivamente, il "trasporto di misura" sull'asse delle ordinate. Si disegna infine la retta congiungente P e P', che è la secante

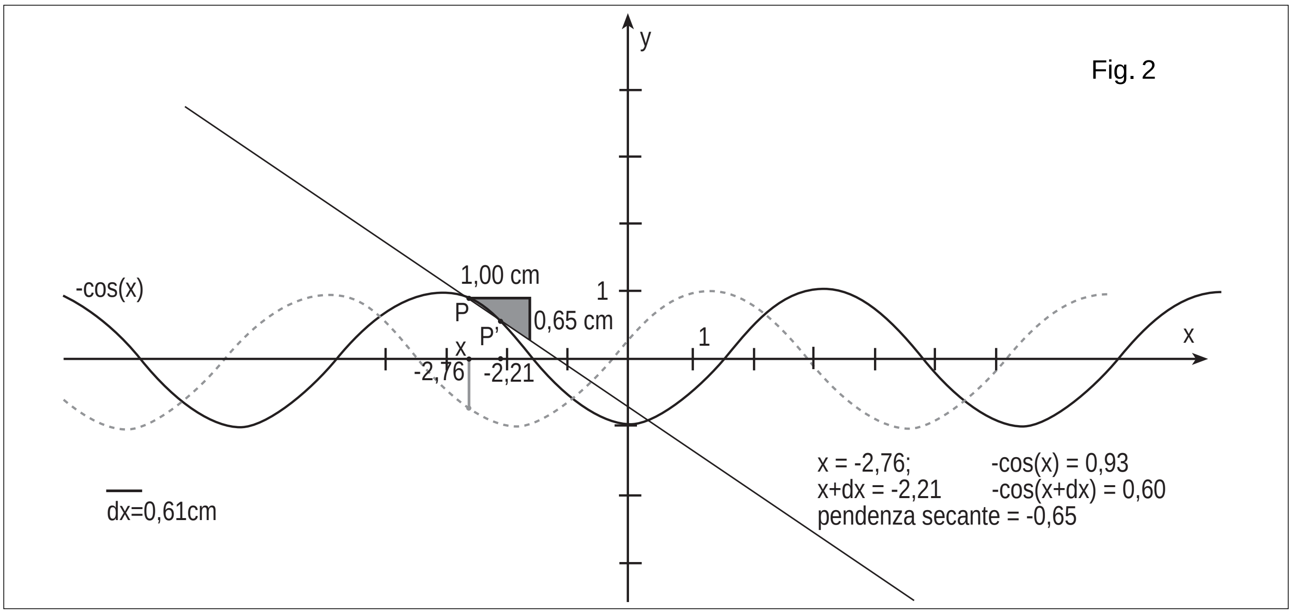


Fig. 2

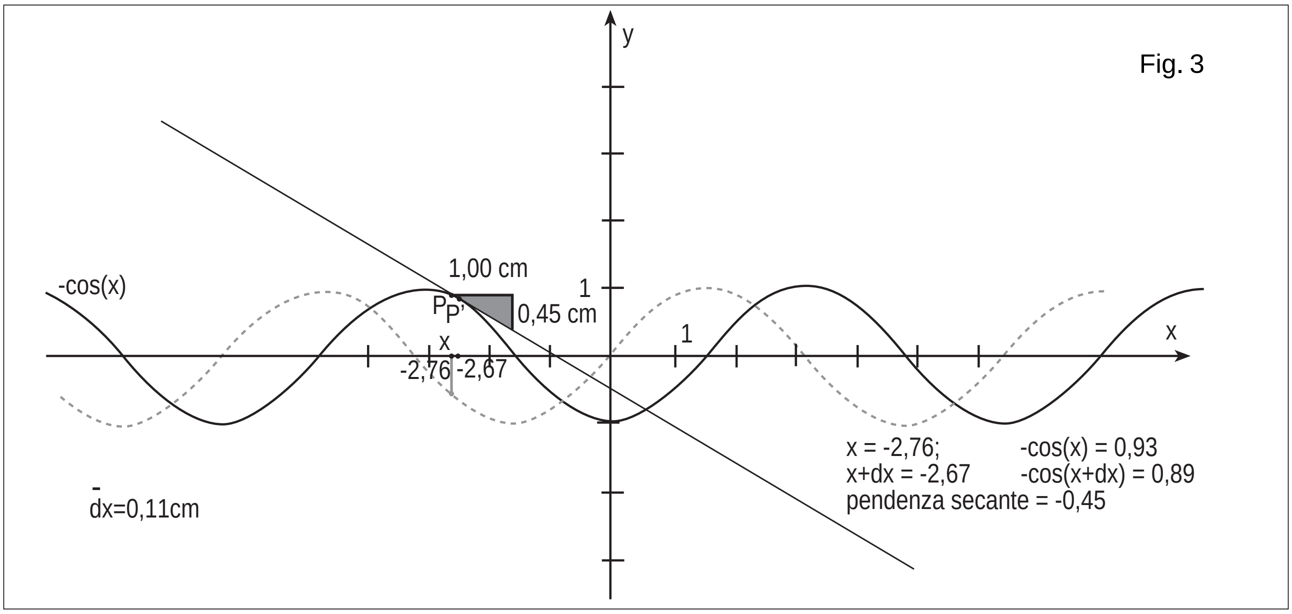


Fig. 3

con cui approssimiamo la tangente al grafico in P. Per *dx* = 0,02 cm si ha "praticamente" una tangente. Con un trasporto di misura si riporta il valore della sua pendenza come ordinata corrispondente ad *x*. Il luogo del punto così costruito, al variare di *x*, è il grafico della derivata della funzione *f*.

Il disegno diviene più pregnante se si evidenzia la pendenza con un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa lungo la tangente ed un cateto di lunghezza unitaria parallelo all'asse delle ascisse: l'altro cateto sarà parallelo all'asse delle ordinate ed avrà lunghezza $f'(x)$, dotata di segno positivo o negativo a seconda che esso sia posto al di sopra oppure al di sotto del cateto orizzontale. Visualizzando il valore di $f'(x)$ con un segmento applicato in *x*, si consentirà un confronto ottico immediato.

Nelle figure 2 e 3 è rappresentato per valori decrescenti di *dx* il risultato della costruzione per la funzione $f(x)$ =

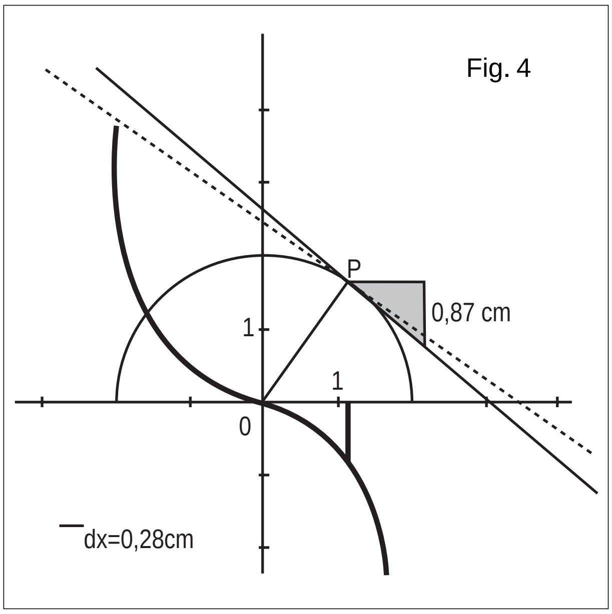


Fig. 4

- cos *x*: il grafico prodotto (evidenziato con un tratto più spesso) è, approssimativamente, quello della funzione seno.

Nella figura 4 la funzione è ; il grafico di partenza è una semicirconferenza e la funzione derivata ottenuta è . In questo secondo caso, è possibile testare graficamente la bontà della costruzione approssimata della retta tangente confrontandola con quella effettiva, realizzata come perpendicolare al raggio OP (linea tratteggiata)

Da Cabri II a Cabri II Plus: Nel caso di una funzione polinomiale, *Cabri II Plus* consente di determinare l'espressione della derivata a costruzione ultimata. Questa espressione si modifica automaticamente quando, diminuendo il valore dell'incremento a posteriori, il grafico costruito approssima meglio quello della funzione derivata.

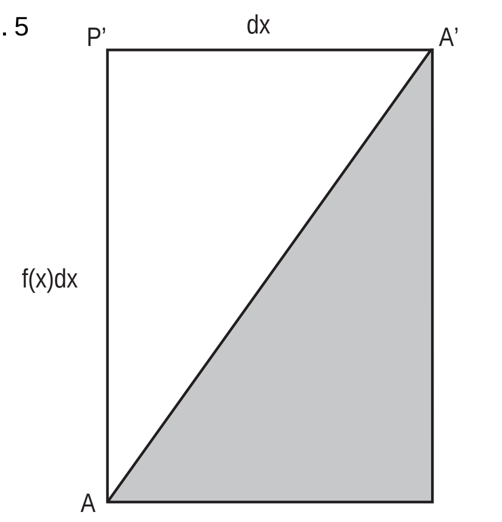
3. Il problema inverso delle tangenti. Funzioni primitive.

Newton fu il primo ad accorgersi che il problema della determinazione delle aree sottese ai grafici delle funzioni, quello che per noi oggi è il *calcolo integrale*, altro non era che il problema inverso rispetto alla determinazione della derivata: data una funzione continua *f* definita su di un intervallo chiuso di primo estremo *a*, la funzione integrale *F* di *f*, che ad ogni punto *x* dell'intervallo associa l'integrale di *f* in [*a*, *x*], è una primitiva di *f*, ossia una funzione di cui *f* è la funzione derivata. Il grafico di *F* è tale che, in ogni punto *x* dell'asse delle ascisse, la pendenza della tangente è pari a *f*(*x*). Esso è dunque l'inviluppo di un insieme di rette, di cui si conoscono tutte le pendenze, e però, purtroppo, non si conoscono le collocazioni nel piano: ai fini della costruzione, bisognerebbe sapere per quale punto far passare la tangente al grafico di *F* in *x*, ossia, bisognerebbe poter determinare *F*(*x*). Con ciò si torna al punto di partenza. È pur vero che, essendo la primitiva definita a meno di una costante additiva arbitraria, per un singolo valore di *x*, il valore di *F*(*x*) può essere scelto a piacere. Ma una volta fissato il punto A(*x*, *F*(*x*)) del grafico di *F*, gli altri punti sono univocamente determinati. Il vincolo geometrico si può così descrivere: in prossimità del punto A – ad esempio, immediatamente a destra di A – l'andamento del grafico segue la direzione della tangente. Possiamo dunque prendere, per un piccolo incremento *dx* dell'ascissa, il segmento di tangente compreso tra *x* e *x+dx* come una buona approssimazione del grafico. Il primo estremo del segmento è A, il secondo è un nuovo punto A' del grafico. Una possibile costruzione passo passo è la seguente:

a) dopo aver visualizzato gli assi ed il grafico della funzione *f*(*x*), si traccia, su una parallela all'asse delle ascisse, un vettore *u* con il primo estremo fisso ed il secondo estremo variabile, orientato concordemente all'asse; la sua lunghezza rappresenterà l'incremento *dx*;
b) si fissa, arbitrariamente, un punto A del piano; sia *x* la sua ascissa e sia B la sua proiezione ortogonale sull'asse delle ascisse;
c) si trova il punto di intersezione P tra la retta AB e il grafico di *f*: esso avrà *f*(*x*) come ordinata;
d) si traccia il vettore *v* di primo estremo A e secondo estremo P; si trasla A di *v*;
e) si applica al punto traslato un'omotetia di centro A e rapporto uguale alla misura di *u;* sia P' il punto trasformato;
f) si trasla P' del vettore *u*; sia A' il punto trasformato;
g) si traccia il segmento AA'.

Come risulta dalla figura 5, la retta AA' ha pendenza *f*(*x*): il triangolo colorato è il triangolo differenziale di *F*(*x*) nel punto *A*.

Fig. 5



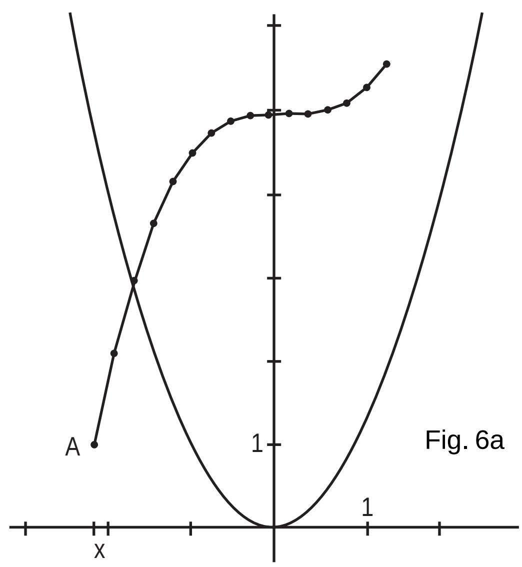


Fig. 6a

Se il grafico di $f(x)$ è un arco di circonferenza, un'iperbole o una parabola, ed è stato prodotto con la funzione

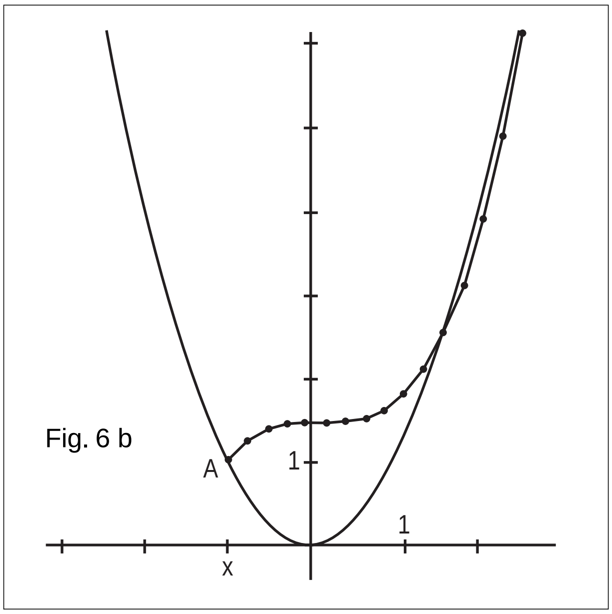


Fig. 6 b

"conica" di *Cabri*, allora il procedimento può essere memorizzato come macro "integrale", i cui oggetti iniziali sono il grafico di *f*, il punto A e l'incremento *dx*, e l'oggetto finale è il segmento AA´.
Applicando la macro "integrale" al punto A´, si costruirà un nuovo punto A´´: procedendo in questo modo si otterrà, passo dopo passo, una linea poligonale che approssima il grafico di $F(x)$, e che si sviluppa da sinistra verso destra. L'approssimazione migliora, anche per il disegno già tracciato, riducendo il valore di *dx*. Un effetto ancora più suggestivo si produce spostando il punto iniziale A: è emozionante vedere come la forma della curva cambi in continuazione, adattandosi alle varie primitive. La figura 6 rappresenta due diverse situazioni, riferite alla funzione $f(x) = x^2$. In entrambe si è posto dx = 0,23 cm.

Da Cabri II a Cabri II Plus: La nuova versione consente un più agevole confronto del risultato della costruzione approssimata con il grafico della primitiva, che si può disegnare sulla base della sua espressione.

4. Considerazioni didattiche

L'insegnamento dell'analisi matematica nella scuola superiore vede gli insegnanti sicuri nelle scelte di contenuto: negli anni si è delineata una strutturazione interna dei contenuti della disciplina più semplice e sintetica rispetto alla trattazione universitaria. Nelle sperimentazioni susseguitesi dall'86 a oggi è stata rivolta sempre maggiore attenzione agli apporti interpretativi del mondo reale offerti dall'analisi matematica: ad esempio, la comprensione della derivata di una funzione è da intendersi non soltanto come un mero concetto matematico, ma anche come uno strumento concettuale per distinguere tra l'andamento attuale di un fenomeno e la sua evoluzione tendenziale [7, pagg. 6-9].
La necessità di cogliere gli aspetti genetici e storico-filosofici del pensiero matematico è manifestata esplicitamente nel 1986 all'interno dei nuovi programmi di matematica predisposti dal Ministero della Pubblica Istruzione in vista dell'introduzione dell'informatica (PNI), e viene definitivamente sancita nei programmi Brocca nel 1992 [1, pag. 248].
L'inquadramento "storico" del concetto di derivata presentato in questo articolo mira non solo a far comprendere agli allievi il rilievo storico dell'argomento trattato, ma si ispira a un'ipotesi di sperimentazione didattica secondo la quale l'ontogenesi cognitiva ricapitola la filogenesi scientifica. Nella fase iniziale di apprendimento del concetto matematico da parte degli studenti, si evidenziano gli aspetti di utilizzo informale in contesti applicativi, per poi passare ad una successiva fase di rigorosa formalizzazione. Villani afferma:
"*Nello studio del concetto di limite, per lo studente di oggi, come per i matematici del passato, non conta tanto la sua formalizzazione rigorosa, come piuttosto la conoscenza delle regole operative di calcolo.*" [8, pag. 266].
L'utilizzo di *Cabri II* e, ancor di più, quello di *Cabri II Plus*, per la facilità che quest'ultimo apporta alla costruzione interattiva dei grafici di funzione, permette di trattare l'argomento derivata seguendo il suo iter storico genetico con attività di laboratorio svolte con grande partecipazione degli studenti. Il recupero della dimensione storica della disciplina si integra con la curiosità degli studenti per i personaggi e le vicende storiche, il sapere viene rivissuto dagli allievi con costruzioni geometriche e congetture opportunamente semplificate e riportate in questo articolo.
La pratica didattica ci ha permesso di rilevare come, durante tali attività di laboratorio, le descrizioni intuitive degli allievi, non mortificate da una spiegazione ver

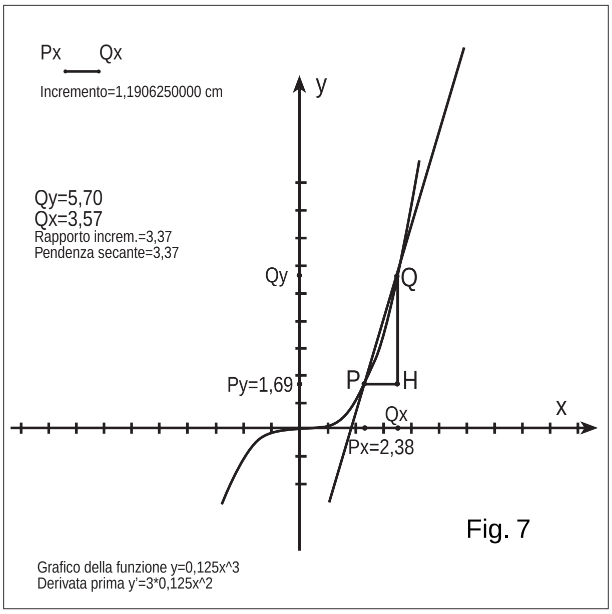
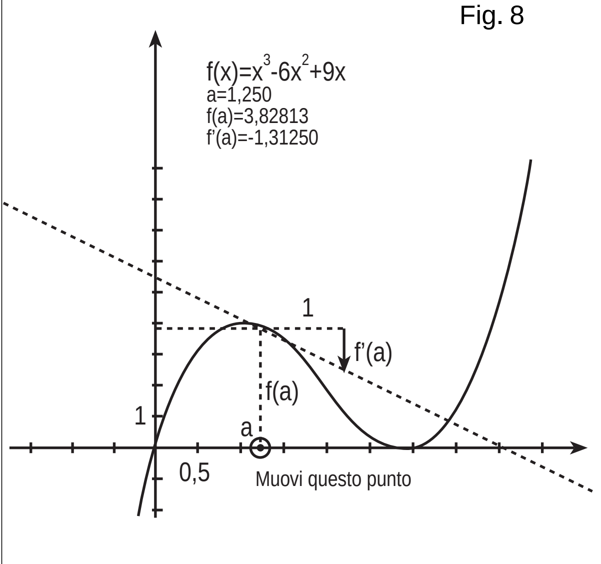


Fig. 7

sativa da parte dell'insegnante, possono essere interpretate come fasi di accostamento al problema, tipiche delle fasi di studio degli autori del passato.
La figura 7 è tratta da un file Cabri contenente la costruzione della derivata come retta limite tra le secanti PQ al tendere di Q a P. L'incremento variabile è ottenuto avvicinando il punto Q_x a P_x , lungo il segmento P_xQ_x. Quando i due punti coincidono, la secante PQ "svanisce". Viene utilizzata la *pendenza* di *Cabri II Plus* applicata alla retta secante PQ, e il valore ottenuto viene confrontato con il valore del rapporto incrementale trovato, con l'uso della *calcolatrice*, come rapporto tra la misura del segmento P_yQ_y e quello dell'incremento (misura del segmento P_xQ_x).
Nella figura 8 vediamo un'altra applicazione di *Cabri II Plus*, finalizzata allo studio del segno della derivata. L'esercitazione svolta in laboratorio dalla classe o presentata dall'insegnante con l'utilizzo di un computer e di un videoproiettore è di evidente validità ai fini didattici.

Cabri II Plus, dopo aver agevolmente realizzato il grafico della funzione razionale intera, permette di calcolare il valore della derivata in intorni dei punti di massimo e minimo relativo, ne evidenzia la variabilità di segno e mostra l'andamento della pendenza della retta tangente alla curva in ogni suo punto.

Fig. 8



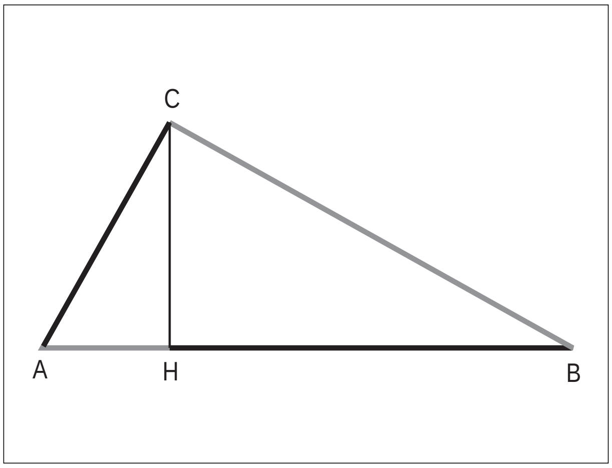
Bibliografia

[1] AA. VV., Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei trienni- Le proposte della Commissione Brocca – Tomo 1, *Studi e Documenti degli Annali della Pubblica Istruzione*, **59**, 1992.
[2] Apollonius of Perga, *Conics, Books I-III*, (a cura di Dana Densmore), Green Lion Press, Santa Fe, 1998.
[3] E. Brassinne, *Précis des oeuvres mathématiques*, J.-M. Douladoure, Toulouse, 1853.
[4] J. M. Child, *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, The Open Court Publishing Company, Chicago and London, 1916.
[5] P. de Fermat, *Oeuvres*, (a cura di P. Tannery e Ch. Henry), Gauthier-Villars, Parigi, 1891.
[6] G. Galilei, *Opere*, (a cura di F. Brunetti), vol. II, UTET, Torino, 1964.
[7] W. Maraschini, M. Palma, Punti critici nel tempo, *Lettera Matematica Pristem* **43**, 2002, 4-9.
[8] V. Villani, Ripensando la matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* **26 A-B** (3) 2003, 256-269.

PROPOSTE DI LAVORO

Una costruzione con riga e compasso

a cura della redazione



Nell'articolo di Maria Cantoni, *FLATlandia: un invito al dialogo attraverso il problema di Ottobre 2002*, pubblicato nella sezione *Cabri discusso* di questo bollettino, si accenna alla possibilità di disegnare un triangolo rettangolo "conosciuta una coppia di segmenti tra quelli evidenziati (AC, AB, BC, CH, AH, HB)".
Si fa notare inoltre la maggiore complessità presentata dalle coppie "simmetriche" (AC, HB) e (CB, AH).

Invitiamo i lettori del bollettino interessati a cimentarsi nella "costruzione con riga e compasso" di un triangolo rettangolo, data una delle suddette coppie simmetriche, ad inviarci le loro proposte. Queste verranno pubblicate in un prossimo numero.

LA RECENSIONE DEL MESE

Cabrinews

una mailing list per docenti di matematica

La lista di discussione *cabrinews* è stata istituita dall'IRRE (Istituto Regionale di Ricerca Educativa) dell'Emilia Romagna nel 1996, su suggerimento di Valerio Mezzogori.

Nata inizialmente per discutere di problemi didattici legati al solo uso in classe del software Cabri-Géomètre, ben presto si è trasformata in una lista in cui dibattere problemi di varia natura che riguardano il mondo della scuola, e in cui scambiarsi informazioni che possono essere utili per il quotidiano lavoro nelle classi. Gli iscritti nel novembre 1996 erano 68; oggi, al termine dell'anno 2003 sono circa 430. In questi sette anni molte liste analoghe sono nate e cadute nel volgere di pochi mesi. Cabrinews è cresciuta e si è ampliata; questo forse per due motivi principali:

1°- la bravura e la professionalità di molti docenti, specie di scuola secondaria, che l'hanno usata in modo estremamente efficiente per essere utili ad altri colleghi;

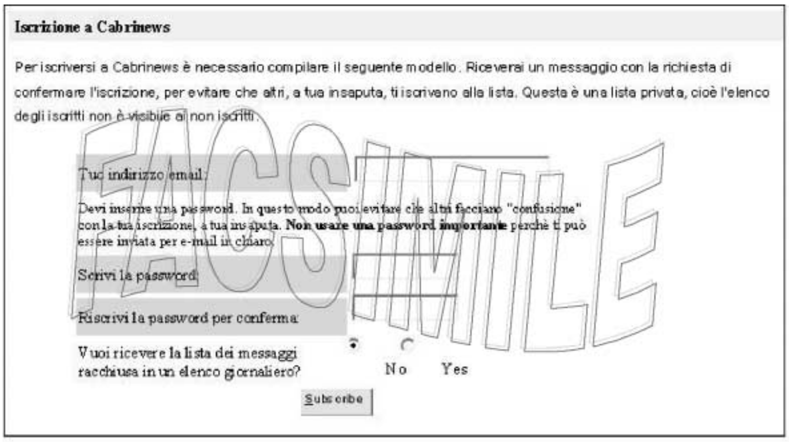
2° - la competenza del gestore della lista, sempre abile a superare mille difficoltà "tecniche".

Si potrebbe dire che, anche nell'epoca delle tecnologie più raffinate, le *risorse umane* rimangono fondamentali per far funzionare qualunque iniziativa!

Per chi fosse interessato ad iscriversi a *cabrinews* la procedura è semplice e consente di evitare che altre persone utilizzino impropriamente l' e-mail dell'iscritto. Per accedere alla pagina Web che consente di abbonarsi a *cabrinews* è necessario utilizzare questo indirizzo:

http://kids.bo.cnr.it/mailman/listinfo/cabrinews,

in cui si trova il modello riportato sotto a titolo esemplificativo e che **dovrà essere compilato in linea**.



Per iscriversi è sufficiente digitare il proprio indirizzo e-mail, scegliere una password e selezionare il pulsante "Subscribe". La password verrà utilizzata nel momento in cui si vorranno modificare i parametri della sottoscrizione.L'iscrizione alla lista non è immediata. MailMan invierà un mail all'indirizzo utilizzato per l'iscrizione per verificare che l'indirizzo di posta non sia utilizzato impropriamente. **Per confermare l'iscrizione è sufficiente fare un "reply" a questo messaggio**, senza scrivere nulla. Successivamente verrà inviato un messaggio di benvenuto che è bene archiviare, perché contiene le seguenti informazioni:

URL della pagina generale della lista.

URL della pagina dove è possibile modificare le opzioni di sottoscrizione.

La password scelta.

Se la vostra iscrizione dovesse presentare problemi, mandare un mail a:

valerio@kidslink.scuole.bo.it

Per inviare un messaggio a tutti i membri della lista, utilizzare l'indirizzo:

cabrinews@kidslink.scuole.bo.it.

Per vedere l'insieme dei messaggi inviati alla lista, visitare l'archivio all'indirizzo:

http://www.scuolan.it/pipermail/cabrinews