Bollettino

CABRIRRSAE 2002

Bollettino degli utilizzatori di software matematici

N 30

I.R.R.E.
Emilia-Romagna

GENNAIO 2002

L'immagine

La redazione di CABRI*RRSAE* desidera ringraziare il prof. Carmelo Mammana dell'Università di Catania che ha offerto l'immagine del calendario 2002, riportata in prima pagina. Vogliamo ricordare che anche nel 2000, dichiarato anno mondiale della matematica, pubblicammo come copertina del nostro bollettino un calendario che riportava parte dei francobolli della "Collezione matematica" di proprietà dei prof. C. Mammana e F. Messina. Nell'immagine di questo anno soprattutto monumenti; monumenti che riguardano la nostra disciplina e personaggi ad essa legati.

In questo numero

Nella sezione ***Cabri discusso*** presentiamo il resoconto di una sperimentazione, svoltasi in una scuola media inferiore, sull uso della calcolatrice grafica TI-73 nelle attivit di matematica e scienze.
Nella sezione ***Come fare*** vengono proposti, per la scuola media superiore, due lavori che, muovendo da diversi presupposti, giungono entrambi alla scoperta della curva detta *deltoide di Steiner* ***(segue a pag. 3)***

Indirizzo

Bollettino CABRI*RRSAE* 2002
IRRE-Emilia Romagna
Via Ugo Bassi, 7 - 40121 Bologna
Tel. (051)22.76.69 - Fax (051)26.92.21
E-mail: cabri@kidslink.scuole.bo.it
http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/
Gruppo di discussione:
E-mail: cabrinews@kidslink.scuole.bo.it

Fardiconto:
http://kidslink.scuole.bo.it/fardiconto/
Flatlandia:
http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/flatlandia/

La versione elettronica del bollettino è consultabile a questo indirizzo:
http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/rivista.html

Supplemento al n.6, Novembre Dicembre 2001, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca Educativi dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24 - 10 - 1980. Direttore resp. Luciano Lelli, Direttore edit. Arnaldo Luisi proprietà IRRE/ER.

Progettazione grafica e videoimpaginazione GRAPHICART
Via Fondazza, 37 - 40125 Bologna
Tel. Seg. Fax 051 30.70.73 - Tel. Seg. Modem 051 42.920.47

SOMMARIO

(segue da pag. 3)
con l opzione *luogo* di Cabri-g om tre. Segue la relazione su una attivit in laboratorio sulla divisione di un segmento con Cabri descritta da uno studente del biennio di un ITG.
Per la scuola media inferiore abbiamo un lavoro, preparato da un gruppo di insegnanti, che ricorre alle traslazioni per giungere alla scoperta del Teorema di Pitagora.
Chiude questo numero del bollettino un articolo in cui vengono presentati da un punto di vista storico i poliedri pitagorici ed indicati alcuni siti Inernet da cui trarre spunti per l attivit didattica su poliedri regolari e non.

CABRI IN BIBLIOTECA

Sono usciti due nuovi numeri dei Quaderni di **CABR*IRRSAE***:
N. 20 *ProbleMATEMATICAmente, anno 2000-2001* a cura di P. Dall Aglio e D. Gouthier
N. 21 *FLATlandia, geometria on-line, anno IV* a cura di G. Bettini e F. No
I Quaderno che presentano il resoconto annuale delle rispettive attivit , possono essere richiesti all IRRE Emilia Romagna, oppure possono essere prelevati, in formato PDF, dal sito
http://kidslink.scuole.bo.it /cabri/.

Sono prelevabili, in formato PDF, all indirizzo **http://kidslink.scuole.bo.it /fardiconto/** una serie di sei volumetti che propongono itinerari didattici con l ausilio della rete in diverse discipline:
Inglese e Internet nella scuola elementare e media a cura di A. Bergami
Musica e Internet nella scuola elementare e media a cura di A. Pasquali
Sono rivolti invece alla scuola superiore:
Percorsi di Fisica su Internet a cura di F. Nuzzi
Guida alla Civilt latina su Internet a cura di F. Zanasi
Guida al Greco antico su Internet a cura di L. Stupazzini
Storia e Internet a cura di G. Venturi

L IRRE Emilia Romagna ha pubblicato, a cura di A. Orlandoni, *Matematica e software didattici, materiali relativi al progetto eccellenza 2000*. Il volume contiene i materiali elaborati dagli insegnanti che hanno partecipato alle attivit del Progetto Eccellenza nell anno 2000, promosso dall IRRE-Emilia Romagna in collaborazione con l IRRE Lazio. L esperienza, iniziata nel 1998, mira, attraverso la soluzione e la sperimentazione in classe di una serie di problemi proposti, ad evidenziare quali sono quelli in cui l utilizzo di software per la matematica produce un reale guadagno formativo e quali invece quelli in cui pu risultare addirittura un appesantimento inutile. Si segnala inoltre la pubblicazione:
M. Arpinati, D. Tasso *scuola e squola*, editore adnkronos (ISBN 88-7118-139-5). Il volumetto tenta di avviare una riflessione sulle riforme scolastiche in atto; riforme che, molto spesso, al di l degli scopi meritevoli,hanno creato pi problemi di quanti ne abbiano risolti. I capitoli nono e quindicesimo in particolare propongono riflessioni sull uso di software didattici nell insegnamento della matematica e sull inserimento delle TIC (Tecnologie dell Informazione e della Comunicazione) nel processo educativo.

INVIATECI I VOSTRI ARTICOLI

CABRI*RRSAE* pubblica contributi relativi all’utilizzo del pacchetto Cabri-géomètre e di altri software matematici, con particolare attenzione alla valenza didattica e all’inserimento nel curricolo scolastico.
Ogni articolo (non più di 4 cartelle) deve pervenire, su supporto magnetico e cartaceo, ad uno degli indirizzi indicati in copertina, rispettando le seguenti modalità:

• *SUPPORTO CARTACEO*
- testo e figure devono essere impaginate secondo le intenzioni dell’autore (anche in bassa qualità di stampa)
- una stampata delle sole figure ***in alta qualità di stampa***
- una stampata dei grafici ***in alta qualità di stampa***
- anche le immagini catturate dallo schermo devono essere accompagnate da una stampata ***in alta qualità***

• *SUPPORTO MAGNETICO*
- il file di *testo* in ***formato Word*** (estensione .doc, meglio sarebbe se fosse .mcw) non deve contenere le figure che invece devono essere collocate in un file a parte.
- altri materiali (tabelle, grafici, ecc.) devono pervenire in formato originale, con indicazione dell’applicativo che le ha generate, comunque sempre accompagnate da una stampata di alta qualità.
- altre immagini (tipo quelle tridimensionali) generate da qualunque programma, devono essere esportate come prodotti vettoriali, cioè con estensione A.I.
Il materiale inviato non sarà restituito.

Siamo ugualmente interessati a ricevere materiali più articolati sull’utilizzo di Cabri; tali materiali possono essere diffusi mediante la collana “Quaderni di **CABRI***RRSAE* ”.

CABRI DISCUSSO

In classe con la TI 73

Resoconto della sperimentazione svolta grazie al prestito delle attrezzature da parte dell I.R.R.E.-E.R.

di Giuseppe Giacometti
Scuola Media Statale “Via Ribolle” - Forlì

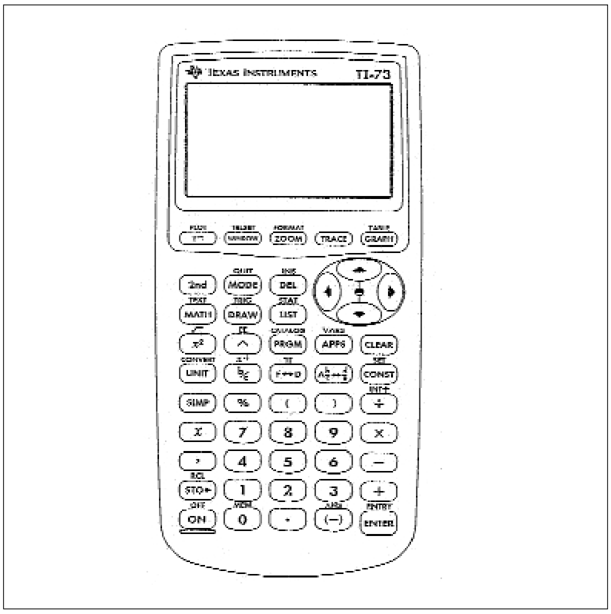
Premessa

di A.M. Arpinati
IRRE E-R

La sezione scuola secondaria di 1° grado dell’IRRE (ex IRRSAE) Emilia Romagna ha avviato, per l’anno scolastico 2001/2002 una sperimentazione che coinvolge 8 scuole medie, sull’utilizzo della calcolatrice grafica TI-73, adatta alle attività di matematica e collegabile eventualmente, per le ore di scienze, ai sensori CBL (Calculator-Based Laboratory) e CBR (Calculator-Based Ranger).
Le calcolatrici grafiche, con manuale di riferimento in lingua italiana, vengono fornite in comodato gratuito alle scuole dall’Istituto di Ricerca.
La TI-73 non è presente sul mercato italiano, ma solo su quello statunitense, dove rappresenta la calcolatrice nata espressamente per la fascia degli allievi della “middle school” americana. Questi i motivi che hanno fatto scegliere all’Istituto TI-73 rispetto a TI-83, presente sul mercato italiano e molto pubblicizzata dalla Texas Instruments:
- l’interfaccia di TI-73 è più amichevole: i tasti hanno una doppia funzione (e non tripla, come nella TI-83); non appaiono i tasti delle funzioni trigonometriche (sen, cos, tg, arctg, ...), non utilizzabili nella fascia della scuola media;
- alcuni tasti della TI-73 sono stati creati appositamente per l’aritmetica che si fa nella scuola secondaria di 1° grado (il tasto che esprime la frazione come b/c, il tasto che aiuta ad operare la trasformazione da frazione a numero decimale, da frazione a numero misto e viceversa, eccetera).
- è possibile interfacciare TI-73 con moltissimi sensori (oltre a CBL e CBR), per fare laboratorio di scienze (per questo utilizzo TI-73 ha praticamente tutte le possibilità della più potente TI-83);
La sperimentazione promossa da IRRE terminerà in aprile 2002; i risultati saranno sicuramente pubblicati nel sito ***Fardiconto****, gestito da IRRE Emilia Romagna. Per eventuali ulteriori informazioni rivolgersi ad Anna Maria Arpinati, IRRE Emilia Romagna (tel. 051/6368040, e-mail: arpinati@kidslink.scuole.bo.it)*

All alba

Dopo aver seguito, passo a passo, l intero percorso formativo, sapientemente predisposto dall Istituto Regionale per la Ricerca Educativa dell Emilia-Romagna, mi sono ritrovato, un luned mattina, alle 7 e 30, con alcune valigie in mano, all ingresso della mia Scuola.
Anche se sono solito arrivare in anticipo rispetto all orario di inizio delle lezioni, mi sono reso conto di indurre qualche curiosit nel collaboratore scolastico che stava per aprire il portone e ho dichiarato il motivo dell insolito equipaggiamento.
Poi, senza indugio, mi sono diretto al laboratorio di scienze per preparare la lavagna luminosa, il view-screen, lo schermo per proiezione e le altre attrezzature.
Conoscendo abbastanza bene la situazione, non ho avuto sorprese con le spine e le prolunghe e al suono della campana il tutto era predisposto e funzionante.
Stava per iniziare la sperimentazione in classe: voluta, pensata, progettata, ma pur sempre capace di suscitare attesa e trepidazione.
Ho accompagnato nell aula la classe terza, formata da 20 alunni gi preparati all evento: stato quindi possibile distribuire una calcolatrice ogni due alunni ed iniziare l esplorazione delle funzioni pi semplici (ON, OFF, CLEAR, DEL, QUIT, MODE (float, per impostare il numero di cifre decimali), x^2, radice quadrata, scrittura di numeri relativi,).



Meglio due monete da 50 lire che una da cento!
Avendo a disposizione una calcolatrice, perch non avventurarsi nello studio della conversione lira —euro e

viceversa? Impostata la modalit con due cifre dopo la virgola, abbiamo compilato la seguente tabella:

lire	*50*	*100*	*200*	*300*	*400*	*500*	*600*	*700*
euro	*0,03*	*0,05*	*0,10*	*0,15*	*0,21*	*0,26*	*0,31*	*0,36*

Le divisioni 50/1936,27 ; 100/1936,27 che eseguite manualmente fiaccano la mente e le impediscono di riflettere sui risultati ottenuti, sono state eseguite con grande velocit . Dalla discussione che seguita risultata chiara la mancata proporzionalit diretta fra le due grandezze considerate a causa dell arrotondamento alla seconda cifra decimale. La prima ora di lezione cos trascorsa in modo vivace ed interessante, senza inconvenienti di sorta. Le nuove tecnologie, ancora una volta, si dimostrano amichevoli e suscitano il desiderio di continuare l esplorazione di altre opportunit . Riponiamo con cura le TI 73 un poco pi consapevoli che esse realizzano un sogno antico dell uomo che, di fronte alla fatica del calcolo ripetitivo, con tenacia, per secoli, ha applicato la sua intelligenza per realizzare dispositivi capaci di compiere calcoli aritmetici e logici.

Dal calcolo numerico al calcolo logico

Considerata la brevit del tempo per il quale le attrezzature sarebbero state a nostra disposizione, le lezioni si sono susseguite per almeno tre ore settimanali in ciascuna classe, integrando fra loro aspetti matematici ed aspetti scientifici. Dopo aver esplorato la scrittura di frazioni, la loro semplificazione manuale ed automatica, il calcolo frazionario, la conversione numero decimale—frazione e viceversa, risultato interessante impostare uguaglianze aritmetiche, adeguate alle conoscenze degli alunni, e verificare il loro valore di verit . Ad esempio:

3*2+10/5-4 = 16/16+9/3 (il segno = importato sullo schermo di lavoro dalla videata TEXT); premendo ENTER si ottiene la risposta 1 che nella logica binaria significa vero .

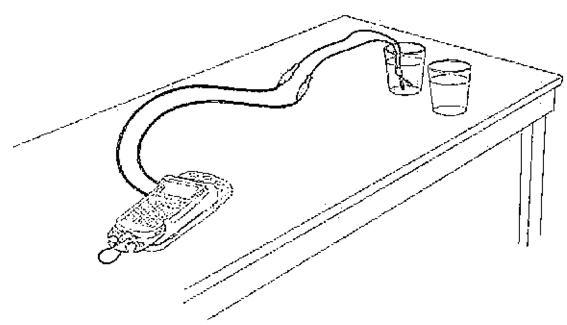
Esplorazioni simili si possono compiere con gli operatori =, ≠, >, ≥, <, ≤, and, or.

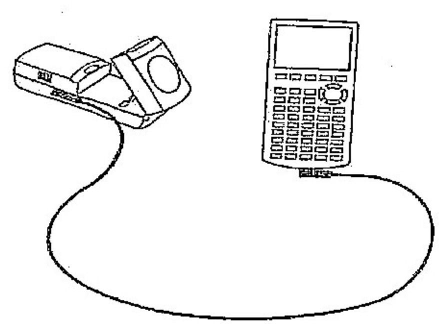
Ad esempio:

2 + 4*3 - 5*2/10 > 4*2 + 20/4 - 1*2 and 20/4 + 15/5-18/18 = 2*3 + 1 viene confermato con 1 , essendo vere entrambe le uguaglianze scritte. A proposito della trasformazione numero decimale-frazione (tasto F <-> D) abbiamo scoperto che un numero decimale viene riconosciuto come periodico e convertito nella corrispondente frazione generatrice, solo quando la cifra si ripete fino a saturare il campo di cifre disponibili:

Uso di sensori per l acquisizione e la registrazione di dati sperimentali

Questo il campo applicativo su cui avevo indirizzato le maggiori attese per collegare le scienze matematiche e le scienze sperimentali. Nella classe prima abbiamo adoperato il sensore per la temperatura sia in modalit GAUGE, per la misura della temperatura ambientale e di soluzioni acquose, sia in modalit DATA LOGGER per confrontare il riscaldamento di uguali quantit di acqua, olio e sabbia.

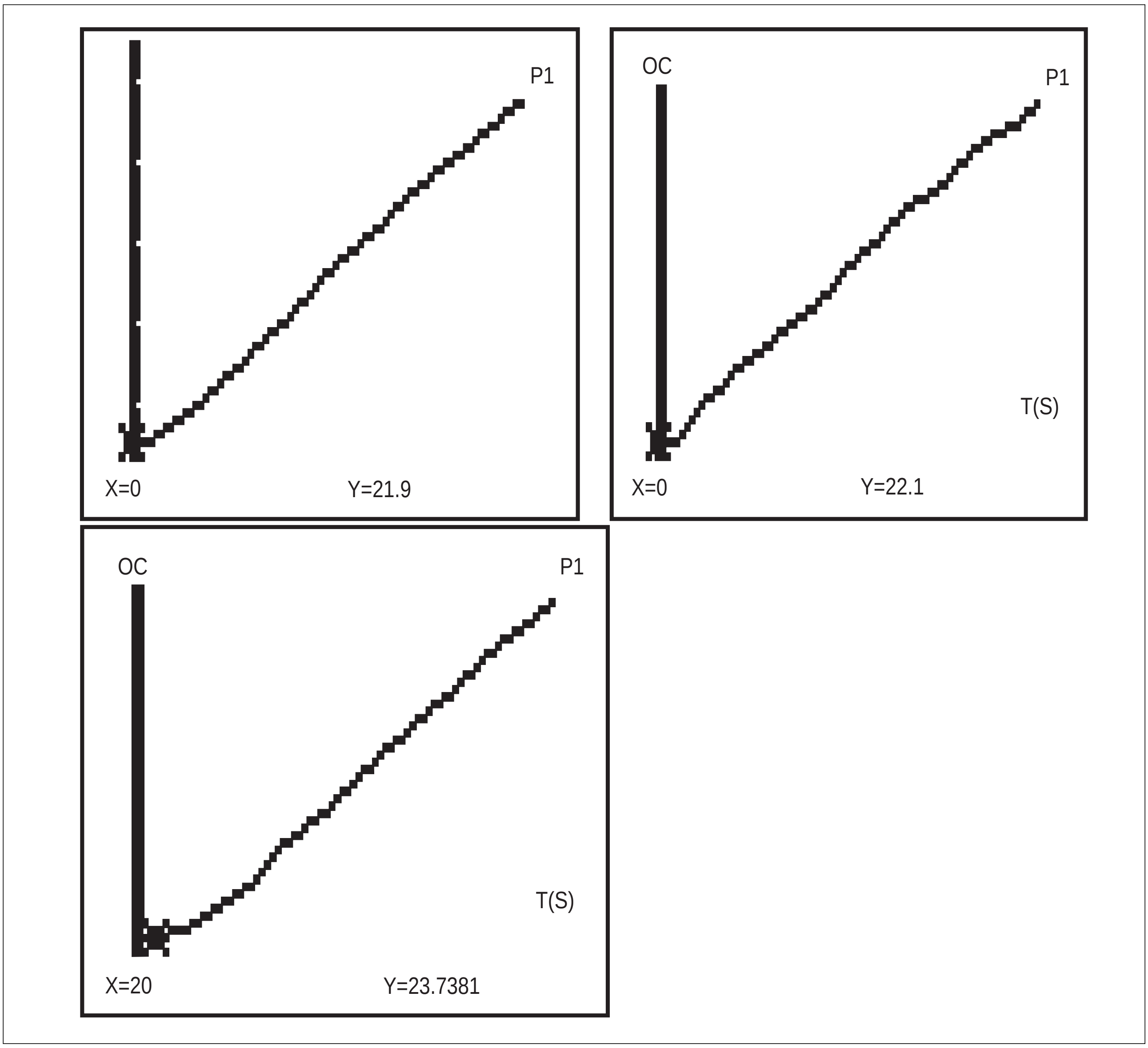




1,3	*1,33*	*1,333*	*1,3333*	*1,33333*	*1,333333*	*1,3333333*	*1,33333333*	*1,333333333*
13	*133*	*1333*						*4*
-----	------	-------	*1,3333*					---------------
10	*100*	*1000*						*3*

Nelle classi seconda e terza, oltre al sensore per la temperatura, abbiamo usato il sensore di posizione per lo studio del moto di una persona, seguendo le schede gi sperimentate durante il lavoro di gruppo, nel Seminario Residenziale svoltosi a Bellaria dall 11 al 13 settembre 2001.

Relazione di una esperienza
Abbiamo riscaldato, nelle stesse condizioni, la medesima quantit (200 g) di acqua di rubinetto, di olio di semi e di sabbia. Abbiamo registrato l andamento delle temperature durante il riscaldamento col sensore collegato al CBL raccogliendo, in ciascun caso, diciotto letture ad intervalli di 20 secondi. Riportiamo i grafici temperatura/tempo e le tabelle relative (vedi pagina successiva).



Dall esame dei dati (vedi tabella) risulta ben evidente come i tre campioni, partendo dalle stesse condizioni iniziali, hanno raggiunte temperature sensibilmente diverse fra loro confermando, sperimentalmente, quanto poteva essere previsto facendo riferimento all esperienza quotidiana.

Poich risulta praticamente impossibile leggere un termometro mentre una sostanza si sta riscaldando (la colonna di mercurio sale continuamente!) evidente il guadagno formativo che si ottiene, impiegando invece queste tecniche nella pratica di laboratorio.

Se avessi
A questo punto mi sia concesso aprire il libro dei sogni :

¥ le condizioni ottimali si verificano sicuramente quando l insegnante lavora o con la classe ripartita in due gruppi (contemporaneit con un collega) o, lavorando con l intera classe, riesce ad assegnare una TI 73 ad ogni alunno e sensori e CBL ad ogni gruppo di tre-quattro alunni (auguro ai colleghi pi giovani di vedere, al pi presto, il giorno in cui ogni alunno possa ricevere in regalo dai genitori una calcolatrice con queste potenzialit);

	acqua	olio	sabbia
Tempo in s	T acqua in °C	T olio in °C	T sabbia in °C
0	21,9	22,1	23,8
20	21,9	22,2	23,7
40	24,5	31,1	25,0
60	26,1	38,3	28,4
80	29,3	42,7	32,5
100	32,1	46,9	37,1
120	35,0	52,6	42,1
140	37,5	57,3	47,1
160	40,6	64,4	52,3
180	44,1	71,2	57,4
200	46,2	75,6	62,5
220	48,8	83,2	67,5
240	51,9	86,8	72,5
260	54,3	92,2	77,6
280	56,8	97,7	82,4
300	59,4	103,4	87,4
320	61,7	105,9	91,8
340	63,9	111,3	96,2

¥ poter avere a disposizione un sensore termocoppia per esplorare le zone della fiamma (anche di una semplice candela!);

¥ rendere tali attrezzature talmente familiari da pensare che un alunno possa compiere spontaneamente, anche a casa o ai giardini pubblici, rilevazioni che consentano di giungere ad affermazioni sperimentalmente provate (l olio si riscalda pi rapidamente di una identica quantit di acqua , l acqua bolle prima se sulla pentola c il coperchio , l acqua salata bolle a temperatura maggiore dell acqua di rubinetto , sullo scivolo dei giardini pubblici si cade di moto);

¥ alcune calcolatrici, appartenenti all ultimo lotto acquistato, presentano, all interno del menu APPS interessanti simulazioni di eventi aleatori (lancio di una moneta, di un dado, estrazione di bilie o di carte, ruota della fortuna,); vorrei esplorare come avviene l apprendimento dei primi concetti di probabilit con tali dispositivi

Ed infine, vorrei meglio comprendere quale malsano impulso spinge noi insegnanti a gioire faticando per costruire nuovi ambienti di apprendimento, invece di rassegnarci alla piatta quiete delle classi impegnate in esercizi ripetitivi e meccanici.

Come fare

Una deltoide con Cabri

*di Victor Larios Osorio**
Università autonoma di Querétaro - Messico

Nella *Geometria del Triangolo* esistono curve collegate con altre, come la *circonferenza dei nove punti* (o *di Feuerbach*) e la circonferenza circoscritta a l triangolo, una di quelle curve ha tre punte ed le sue relazioni con gli elementi del triangolo furono rese pubbliche da Jakob Steiner nel 1856. Questa curva si può ottenere in modo più o meno facile partendo da *qualsiasi* triangolo e usando il potenziale di pacchetti per Geometria Dinamica, come il *Cabri*, che permettono agli studenti dei corsi di Geometria di fare osservazioni e congetture, di scoprire fatti interessanti e di costruire dimostrazioni attraverso lo sviluppo di abilità di ragionamento.

§ 1.

Prima di tutto abbiamo bisogno di una *retta di Simson di un punto P riguardo ad un triangolo ABC*, che si può definire così:

È la retta che passa per le tre proiezioni ortogonali di P su ognuno dei lati del triangolo.

Il nome di questa retta si deve al matematico scozzese Robert Simson (1687-1768) e per la sua esistenza occorre che le tre proiezioni siano allineate, fatto che non sempre accade. Con l'aiuto di *Cabri* è possibile determinare (o congetturare) che caratteristiche deve avere *P* perché si possa ottenere la retta. I passi (vedere la figura 1) sono:

Costruire un triangolo qualsiasi *ABC*.

Creare un punto *P* esterno al triangolo.

Creare le rette che passano per *A* e *B*, per *B* e *C*, e per *C* ed *A* (i lati del triangolo), che saranno *l*, *m* e *n*. Per non fallire nella costruzione questa azione è necessaria.

Creare le rette perpendicolari ad ognuna delle rette *l*, *m* e *n* che passano per *P*.

Chiamiamo *X*, *Y* e *Z* i piedi delle perpendicolari.

Chiedere al programma che misuri l'angolo *XYZ* (menu

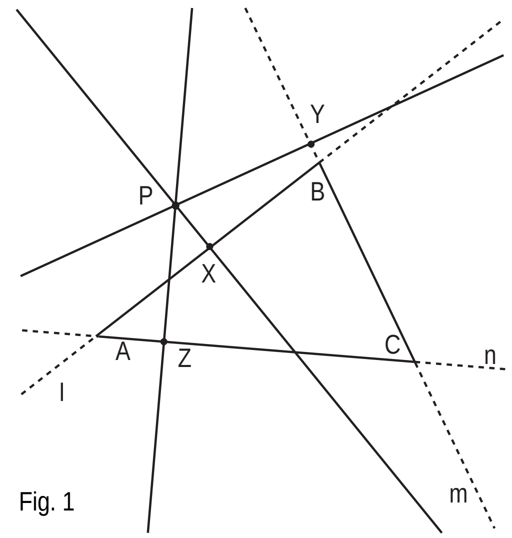


Fig. 1

Misura, opzione ***misura dell'angolo***) e muovere *P* finché l'angolo ha una misura di 180° o di 0°, più o meno. Si può usare l'opzione ***traccia*** (menu ***Visualizza***) applicata a *P* per vedere con più chiarezza dove è necessario che stia *P* affinché *X*, *Y* e *Z* siano allineati.

Dopo vari tentativi, si può osservare che *P* deve trovarsi sulla circonferenza circoscritta al triangolo, quindi bisogna inserire tra i passi **1** e **2** la costruzione della circonferenza circoscritta e creare *P* (passo **2**) su questa curva. Dopo di che si possono occultare le rette *l*, *m* e *n*, e le rette perpendicolari ad esse, infine si crea la retta che passa per *X*, *Y* e *Z* che è proprio la *retta di Simson di P riguardo al triangolo ABC*, come si vede nella figura 2.

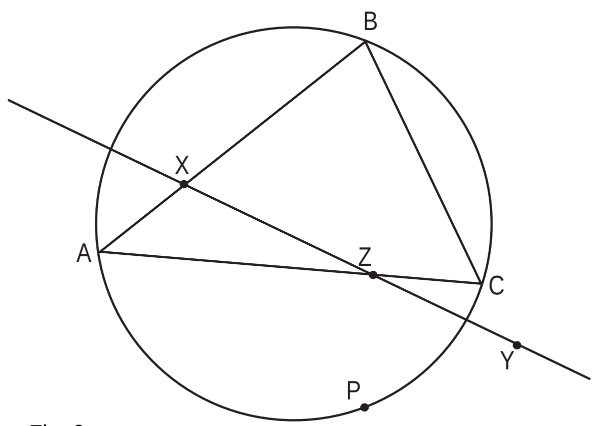


Fig. 2

È possibile dimostrare che *P* giace sulla circonferenza circoscritta, ma qui non presenteremo tale dimostra-

* Il prof. Víctor Larios Osorio è docente di matematica presso la Facoltà di Ingegneria e la Scuola Media Superiore della Università Autonoma di Querétaro, Messico. E-mail: vil@sunserver.uaq.mx.

zione, per enfatizzare la costruzione ottenuta con il programma ed alcuni fatti interessanti. Inoltre, siccome *P* **deve** stare sulla circonferenza circoscritta perché possa esistere la sua retta di Simson, non faremo più riferimento alla posizione di *P*. È conveniente creare una macro per agevolare la costruzione di una retta di Simson a partire da qualsiasi triangolo e qualsiasi punto *P* che si trovi sulla circonferenza circoscritta. Tale macro potrà essere utilizzata più avanti.

§ 2.

La seguente costruzione si può fare a partire da una retta di Simson di un qualsiasi punto *P*. Si usa l'opzione ***traccia*** sulla retta e muovendo *P* si disegna una curva, che si può vedere più chiaramente con l'opzione ***luogo*** (menu ***Costruzioni***) della retta di Simson riguardo a *P*. Ecco, in figura 3, come appare la costruzione risultante:

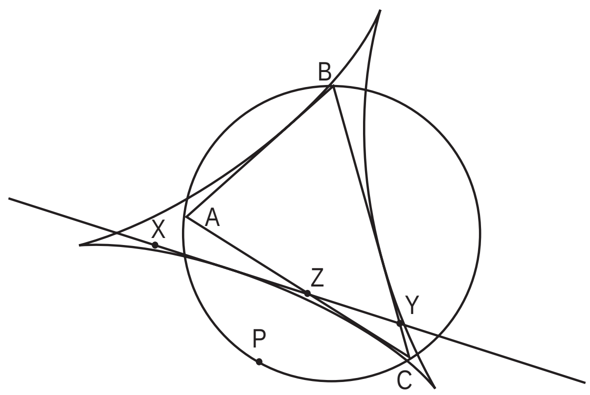


Fig. 3

La grafica che produce *Cabri* è la *involvente delle rette di Simson* cui nome è *deltoide* o, appunto, *ipocicloide da 3 punte*; in questo caso, collegato con la costruzione nel triangolo, ha il nome di *deltoide di Steiner*.

È interessante osservare che la costruzione di questi elementi grafici è difficile da ottenere con riga e compasso, però il software offre l'opportunità di vederli chiaramente e di esaminare il loro comportamento quando si modificano le posizioni dei vertici del triangolo originale. Un fatto curioso appare quando si muovono tali vertici senza però modificare la grandezza della circonferenza circoscritta: la deltoide gira e si sposta, ma non cambia la sua grandezza.

§ 3.

Utilizzando la macro creata precedentemente, è facile costruire due rette di Simson (*r* e *s*) di due punti *P* e *Q* rispetto ad uno stesso triangolo e misurare (con il comando ***Misura***) l'angolo fra di esse.

Quando si paragona questa misura con quella dell'arco che ha *P* e *Q* come estremi si può osservare che la prima è esattamente la metà dell'altra. Questo può servire per creare una nuova curva, nel modo che segue. Prendiamo *P* e *Q* in modo che siano sempre opposti sulla circonferenza, questo implica che *r* e *s* siano perpendicolari fra loro, e chiamiamo *O* il punto di intersezione tra le due rette (come in figura 4). Quando si muove *P* (o *Q*), *O* disegna una curva: con la opzione ***traccia*** si può vedere che si tratta di una circonferenza:

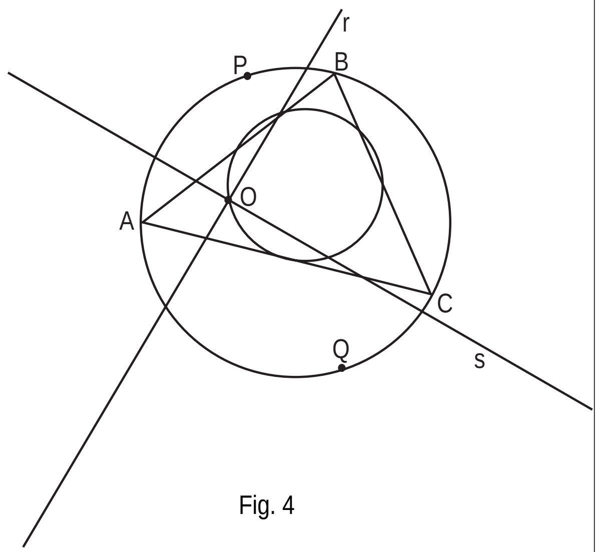


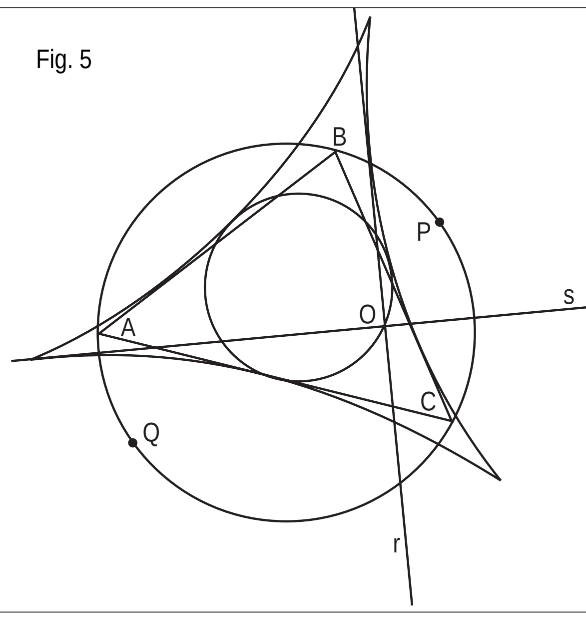
Fig. 4

Il programma permette di osservare che questa circonferenza passa per i piedi delle altezze del triangolo (quando *P* o *Q* coincidono con ognuno dei vertici). A questo punto è relativamente facile constatare che la circonferenza tracciata da *O* è la *circonferenza dei nove punti* o *di Feuerbach*.

§ 4.

Sfruttando il programma per costruire il luogo geometrico di *O* rispetto a *P*, si può anche costruire contemporaneamente la deltoide relativa al punto *P*. Il risultato, come si vede in figura 5, porta a congetturare che entrambe le curve (la deltoide e la circonferenza di Feuerbach) sono tangenti fra loro in tre punti:

Fig. 5



Per finire, facciamo notare che la misura del raggio della circonferenza di Feuerbach è la metà della misura del raggio della circonferenza circoscritta, e che la circonferenza di Feuerbach è tangente alla deltoide. Questi fatti suggeriscono una risposta al fatto che quando si muovono i vertici del triangolo originale, senza modificare la lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta, non cambia la grandezza della deltoide: infatti questa dipende dal raggio della circonferenza di Feuerbach, la quale a sua volta dipende dal raggio della circonferenza circoscritta (vedere la figura precedente).

BIBLIOGRAFIA.

Coxeter, H.S.M. *Fundamentos de Geometría*, México, Editorial Limusa-Wiley (1971).
Coxeter, H.S.M.; Greitzer, S.L. *Retorno a la Geometría*, España, DLS-Euler Editores (1993).
de Guzmán, Miguel "La envolvente de las rectas de Wallace-Simson en un triángulo. Una demostración sencilla del teorema de la deltoide de Steiner". Universidad Complutense de Madrid (1998). URL: http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/Deltoide121298/00deltoi.htm.
Larios Osorio, Víctor (2001). "*Una deltoide y 9 puntos en el triángulo*". México: Sociedad Matemática Mexicana. In corso di stampa.

Nuovi punti notevoli del triangolo

di Luciani Mario Luigi
Liceo Scientifico Sulpicio Veroli - Frosinone

Due punti notevoli del triangolo dedotti dall'analisi di un problema studiato da Steiner, Eulero e Weierstrass sull'allineamento dei piedi di un punto sui lati di un triangolo qualunque.

Nei corsi di geometria del biennio della secondaria si incontrano i punti notevoli[1] del triangolo, già trattati più volte nelle pagine di questa rivista: baricentro, ortocentro, circocentro, incentro ed ex-centri. Questi punti sono detti classici, perché sono noti sin dall'antichità greca; ma dal rifiorire degli studi matematici, successivo al Rinascimento, sono stati scoperti nuovi punti notevoli ed oggi, a quanto mi risulta, ne sono stati censiti quasi seicento. In questo lavoro descriverò un punto notevole *X* del triangolo che ho trovato con Cabri II, analizzando un problema proposto in classe. Un secondo punto notevole connesso con lo stesso problema verrà descritto nel prossimo numero della rivista.

La costruzione del punto *X*

Sia *ABC* un triangolo qualunque. La perpendicolare ad *AB* per *B* e quella a *CA* per *C* si incontrano in un punto *D*; la perpendicolare a *BC* per *C* e quella ad *AB* per *A* si incontrano in un punto *E*; la perpendicolare a *CA* per *A* e quella a *BC* per *B* si incontrano in un punto *F*. I tre punti *D*, *E* ed *F* si trovano sulla circonferenza Γ circoscritta al triangolo che ha per centro il circocentro *O* del triangolo *ABC*. Se dai punti *D*, *E* ed *F* si conducono rispettivamente le perpendicolari ai lati *BC*, *CA* e *AB* del triangolo *ABC*, queste si incontrano in un punto *X* situato sulla retta di Eulero e simmetrico dell'ortocentro del triangolo rispetto al circocentro *O*. La costruzione è visualizzata in figura 1. Lo strumento principale per verificare la concorrenza di tre rette è senza dubbio il teorema di Ceva, ma in questo caso si può dare una dimostrazione di tutte le affermazioni fatte puramente sintetica e accessibile agli studenti di liceo.

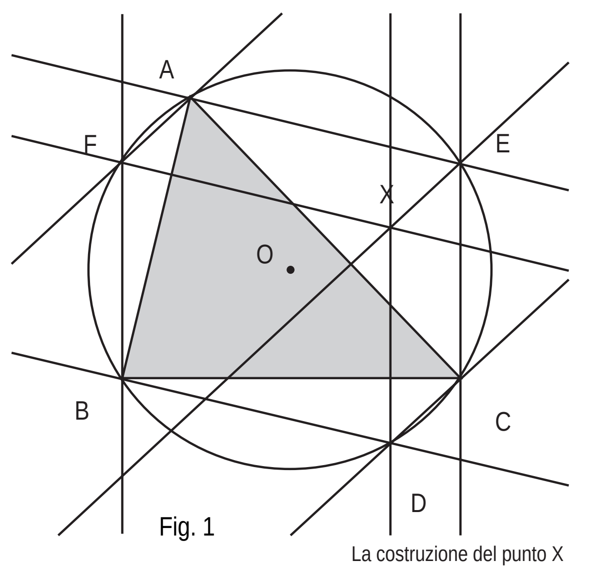
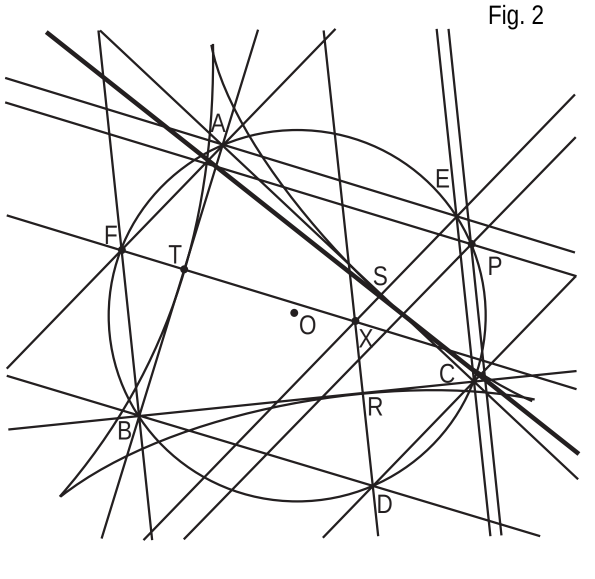


Fig. 1
La costruzione del punto X

I punti *D*, *E* ed *F* esistono perché *A*, *B* e *C* non sono allineati. Infatti le rette *AB* e *CA* essendo incidenti hanno le rispettive perpendicolari incidenti in un punto *D* e analogamente si ragiona per provare l'esistenza di *E* ed *F*. Il punto *D* è sulla circonferenza perché il quadrilatero *ABDC* è inscrittibile dal momento che ha due angoli opposti retti. Ne segue inoltre che *AD* è un diametro di Γ. Analogamente si ragiona per provare che *E* ed *F* sono su Γ e che i segmenti *BE* e *CF* sono diametri di Γ dunque, *BE* e *CF* sono incidenti in *O*. Resta da provare l'esistenza del punto *X*.
La perpendicolare ad *AB* per *F* e la perpendicolare a *BC* per *D* si incontrano certamente in un punto *X*, perché i tre punti *A*, *B* e *C* non sono allineati. Basta allora dimostrare che la retta *EX* è perpendicolare ad *AC*. Osserviamo intanto che il quadrilatero *ACDF* è un parallelogramma. Infatti le sue diagonali *AD* e *CF*, come abbiamo visto, sono entrambi diametri di Γ e dunque si

bisecano. Da ciò abbiamo che $AC=DF$. Inoltre le rette CE e DX sono parallele perché entrambe perpendicolari ad AB. Seguono da ciò le uguaglianze angolari $A\hat{C}E=F\hat{D}X$ e $C\hat{A}E=D\hat{F}X$. Allora i triangoli ACE e FDX sono uguali per il secondo criterio di congruenza ed in particolare si ha $DX=CE$, il che prova che il quadrilatero $CDXE$ è un parallelogramma, avendo una coppia di lati nel contempo uguali e paralleli. Abbiamo allora dimostrato che XE è parallelo a DC e quindi è perpendicolare ad AC. L'unicità della perpendicolare ad una retta per un dato punto garantisce che le tre rette perpendicolari ai lati BC, CA e AB rispettivamente passanti per D, E ed F passino per un stesso punto X.

Fig. 2



Il punto X è correlato, come vedremo fra breve, con una curva algebrica studiata da Steiner della quale si sono occupati anche Weierstrass ed Eulero oltre a Simson che ha iniziato gli studi sull'argomento. Ecco la sua genesi. Si consideri un punto P e i suoi piedi H, K e L sui lati BC, CA e AB del triangolo ABC. I punti H, K e L sono allineati su una retta p, detta retta di Simson, se e solo se $P \in \Gamma$. L'inviluppo di p al variare di P su Γ è una quartica tricuspidata che tange il triangolo nei punti R, S e T non necessariamente interni ai lati d'appartenenza. La relazione tra il punto K e la curva sta nel fatto che quando P coincide con uno dei tre punti D, E o F allora la retta di Simson tange il triangolo nel senso che coincide con uno dei suoi lati. Si veda la figura 2.

Vedremo nel lavoro seguente che la considerazione dei punti R, S e T ci consentirà di scoprire un ulteriore punto notevole del triangolo.
Realizzare le figure non è difficile. Per disegnare l'inviluppo della retta di Simson occorre impartire a Cabri il comando ***LUOGO***. Si deve tracciare il luogo della retta al variare del punto P. Tutte le figure possono essere visualizzate all'indirizzo
http://spazioweb.inwind.it/marioluciani
Una bibliografia verrà riportata al termine del successivo lavoro.

[1] Una definizione di punto notevole del triangolo esula dai limiti di questo lavoro. Qui si puo dire che un punto notevole del triangolo è il punto di concorrenza di tre o più rette definite allo stesso modo sui tre vertici del triangolo.

La divisione di un segmento in tre parti uguali

di Lorenzo Ferrari
Classe 2I - ITG Rondani - Parma

Premessa

di Luigi Monica (docente)

"Dividere un segmento in parti uguali. Trarre eventualmente dalla costruzione una macro che permetta di dividere un segmento in un numero di parti n prefissato."

L'esercitazione che si colloca nel secondo anno di corso di una scuola superiore, può essere vista come introduttiva al teorema di Talete, ed essere una applicazione dello stesso teorema. Nei precedenti anni avevo già proposto ai miei studenti l'esercitazione dopo aver fatto in classe il teorema di Talete. Quest'anno ho provato a proporla nella prima modalità e poiché la divisione in due, quattro, o più parti è immediata, ho suggerito di provare inizialmente a dividere il segmento in tre parti uguali, poi di cercare una generalizzazione del procedimento. Suggerimento forse non del tutto corretto, perché ha condizionato l'esercitazione, ma comunque ricco di conseguenze positive.
Come sempre gli studenti si sono buttati sui computer, senza piani precisi, ma agendo per prove ed errori?
Occorre precisare che lavorano tutti abitualmente con Cabri già dal precedente anno scolastico, mediamente un'ora settimanale, ed hanno di conseguenza una discreta dimestichezza con il programma. Alla fine non si è arrivati ad una costruzione generale, né alla realizzazione della macro, ma il risultato è stato comunque molto interessante dal punto di vista didattico. Infatti, nel tempo di un'ora di laboratorio, sono emerse diverse costruzioni ricche di spunti, compresa quella classica che probabilmente qualche studente ricordava dalla scuola media oppure aveva visto sul proprio testo.
Ho preferito a questo punto concludere l'esercitazione e trasferire il lavoro in classe per un'adeguata riflessione su quanto realizzato in laboratorio. Dopo aver presentato e dimostrato il teorema di Talete, abbiamo

analizzato la diverse costruzioni e abbiamo cercato di darne una dimostrazione rigorosa come conseguenza di detto teorema. Infine ho incaricato uno studente di raccogliere tutte le costruzioni e sistemare in modo rigoroso le dimostrazioni. Il risultato è quanto segue e penso non occorrano ulteriori commenti.

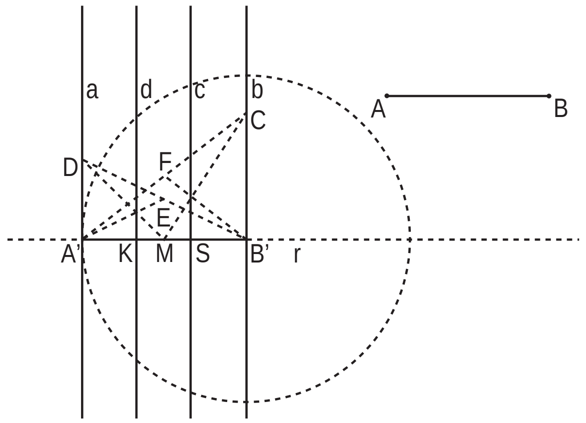


Fig. 1

Costruire il segmento AB e trasportarlo sulla retta r utilizzando il compasso;
Indicare con M il punto medio del segmento;
Costruire le perpendicolari ad A'B' passanti per i punti stessi;
Segnare sulle perpendicolari **a** e **b** due punti presi casualmente che verranno nominati rispettivamente D e C ;
Congiungere i punti D e C rispettivamente con B ed A, in modo da ottenere i due triangoli rettangoli A'B'D ed A'B'C;
Indicare con E il punto medio del segmento DB' e con F quello del segmento CA';
Costruire ora le mediane MD ed A'E del triangolo A'B'D, MC ed FB del triangolo A'B'C e condurne le perpendicolari al segmento A'B' che incontrano quest'ultimo in K ed S.

Dimostrazione:
Per questa dimostrazione ci basiamo sulle proprietà del baricentro di un triangolo, cioè sul fatto che esso divide le mediane in due parti che sono una il doppio dell'altra, e sul teorema di Talete, perciò sul fatto che conducendo le perpendicolari alla base A'B'dai due baricentri essi la dividono in tre parti uguali.

Questa è stata la dimostrazione più diffusa nella classe, ma ve ne sono state anche altre con piccole varianti: la prima e più interessante è stata quella di non costruire i due triangoli, ma un rettangolo del quale si traccino le diagonali, da questa ci si riallaccia poi alla precedente: per il fatto che si hanno sempre due triangoli rettangoli (A'B'D ed A'B'C), ma si ha un piccolo risparmio di tempo, grazie alla proprietà delle diagonali del rettangolo di essere tra loro secanti nei rispettivi punti medi.

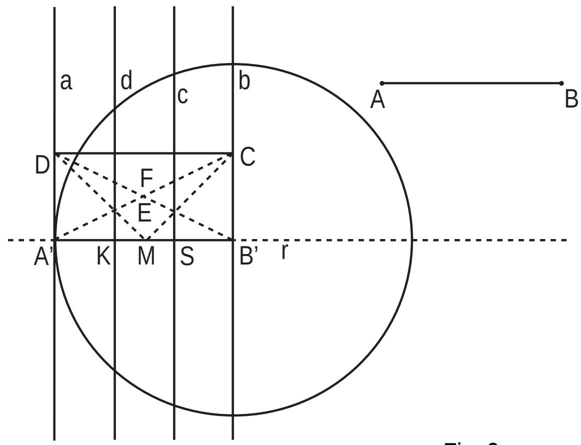
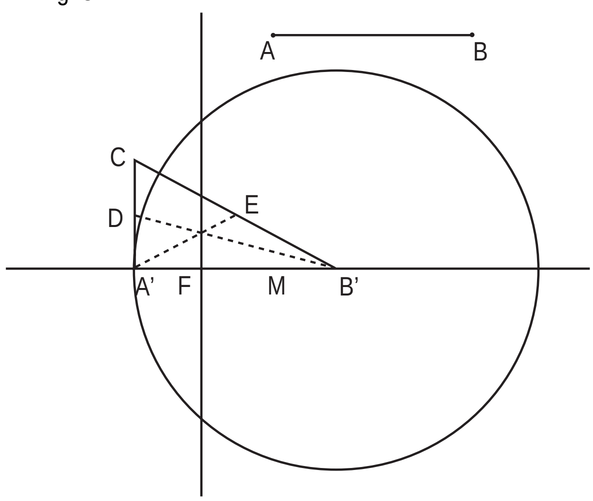


Fig. 2

Come si vede dalla figura 2 si hanno i due punti E ed F coincidenti.

Un'altra variante, anche se minima è stata quella di non costruire due triangoli, ma uno (che abbia per base il segmento dato) del quale si costruisca il baricentro e la sua perpendicolare alla base (Fig. 3).
Ora si ha che il segmento è diviso in due parti una il doppio dell'altra e per dividerlo in tre parti uguali è sufficiente trovare il punto medio della porzione maggiore.

Fig. 3



La quarta soluzione, si basa sulle proprietà dei triangoli isosceli.

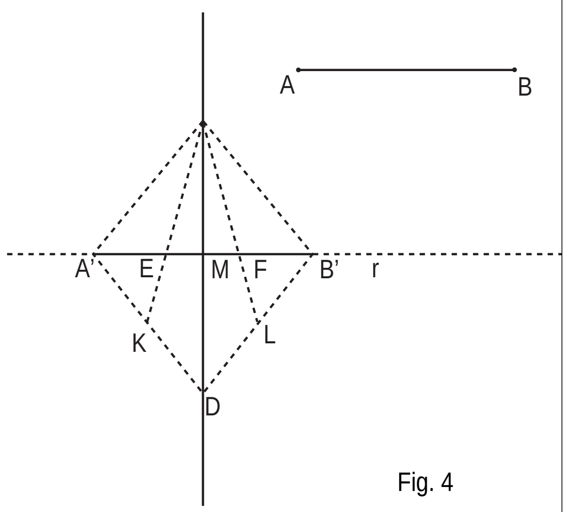


Fig. 4

Costruzione:
dopo avere trasportato su r il segmento AB trovarne il punto medio M e tracciare da esso la perpendicolare ad AB;
• segnare sulla perpendicolare i due punti C e D simmetrici rispetto ad M;
• costruire i due triangoli isosceli DA'C e CB'D;
• segnare le mediane dei lati AD e BD;
• denominare E ed F le loro intersezione con AB;
AE', EF ed FB' sono tra lora uguali.
Dimostrazione
La dimostrazione è alquanto semplice, A'M e MB' sono le altezze dei due triangoli, perciò sono anche mediane delle basi CD. Tracciando altre due mediane abbiamo che le altezze vengono divise in due parti una il doppio dell'altra, con le parti inferiori a contatto.
L'ultima costruzione proposta è interamente basata sul teorema di talete ed è la seguente:

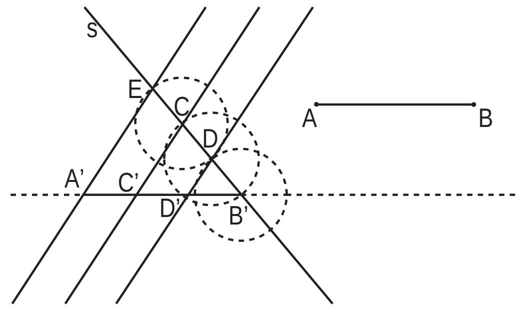


Fig. 5

Costruzione:
• dopo avere trasportato AB sulla retta r tracciare casualmente una retta passante per B e denominarla s;
• costruire su essa tre circonferenze di uguale raggio delle quali la prima abbia centro in B;
• chiamare D, C, ed E le intersezioni delle circonferenze con la retta;
• congiungere E con A', costruire le parallele ad A'E passanti per i punti C e D;
• C' e D' sono i punti che dividono A'B' in tre parti uguali.
Dimostrazione
Per questa dimostrazione basta notare che abbiamo un fascio di rette parallele (A'E e le sue parallele) che sono tagliate dalle due trasversali r ed s, per il resto basta riportare l'enunciato del teorema di Talete.

---

media inferiore

Alla scoperta del... teorema di Pitagora

di Alfio Grasso, Nelly Cardillo, Nunzia Torre
Scuole medie Catania

Obiettivo: Comprendere il Teorema di Pitagora
Prerequisiti : Conoscenza delle figure piane
Conoscenza del concetto di equivalenza delle figure piane
Conoscenza della traslazione

Apriamo il file **pavimento**. Ciao, ti presento Teo, un ragazzo curioso dai mille perché, sempre alla

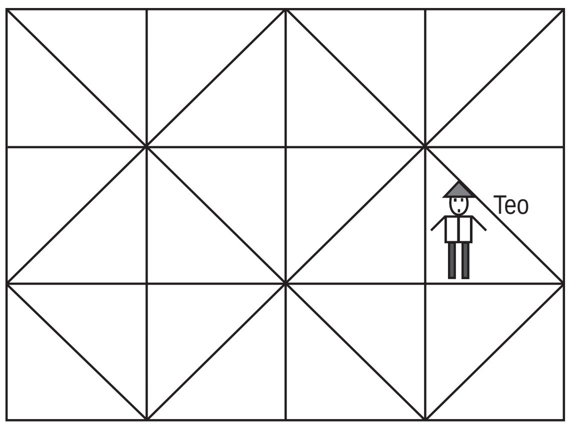


Fig. 1

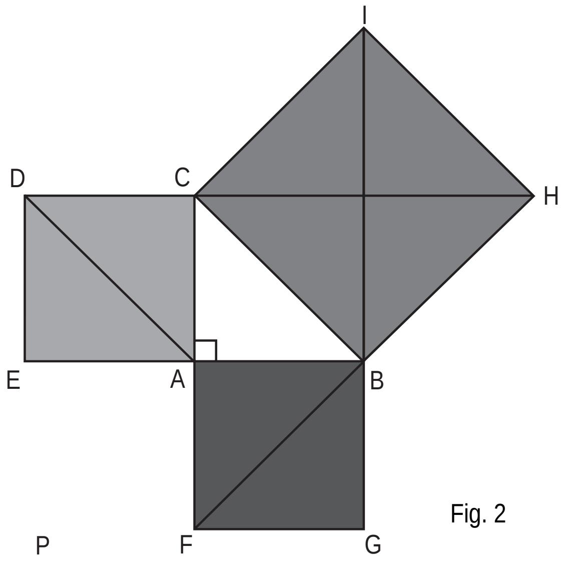


Fig. 2

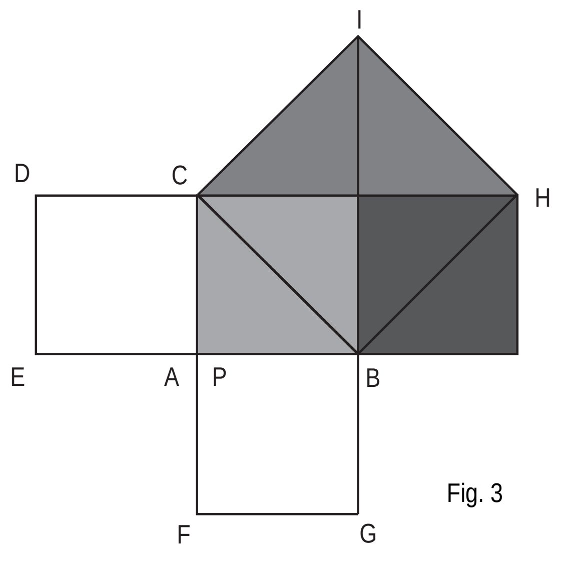


Fig. 3

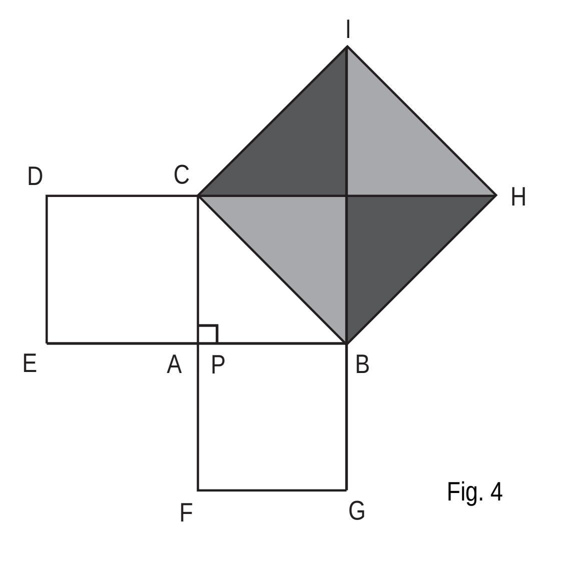


Fig. 4

scoperta di " cose nuove".
Un giorno, mentre passeggiava per la piazza della sua città (clicca ***animazione*** e tira verso destra la sua mano sinistra), la sua attenzione viene attratta dalle forme geometriche del pavimento (figura 1).
Tornato a casa, si siede davanti al computer e, riprodotto quel disegno che prima lo aveva tanto incuriosito, comincia a riflettere e pian piano gli vengono in mente......
Secondo te, quali figure piane ha individuato Teo?.........
Come sono i cateti dei triangoli rettangoli?.....................
Fissato uno dei triangoli rettangoli isosceli (apro il file **rett_iso.fig**). Teo individua, colorandola, la figura 2.
Osservala: cosa rappresenta l'ipotenusa CB per il quadrato CBHI?..
E il cateto CA per il quadrato DEAC ?............................
E il cateto AB per il quadrato AFGB ?............................
Nota ancora: facendo muovere il vertice B del triangolo rettangolo, questo continua ad essere..............................
I poligoni CBHI, DEAC, AFGB aventi per lati rispettivamente l'ipotenusa CB ed i cateti AC ed AB del triangolo, continuano ad essere..
Teo intuisce che c'è qualche relazione fra essi, e tu?..........
Per verificare la tua risposta muovi il punto P fino a farlo coincidere con A (figura 3) e successivamente il punto sovrapposto a C fino a farlo coincidere con I e quello sovrapposto ad H fino a farlo coincidere con I (figura 4).
Puoi affermare che le figure che compongono i quadrati costruiti sui cateti "ricoprono" il quadrato costruito sull'ipotenusa?..
Quindi con il nostro amico "genio matematico", ma anche tu lo sei, possiamo affermare che, in un triangolo rettangolo e isoscele:

IL QUADRATO COSTRUITO SU.................................
E' EQUIVALENTE ALLA SOMMA DI........................
COSTRUITI SU...

Vuoi vedere ora cosa succede al variare della misura dei lati del triangolo rettangolo isoscele? (Muovi il vertice B)..
Il nostro amico continua ad interrogarsi: "Se si considera un triangolo rettangolo qualunque, vale ancora la proprietà trovata?" Cosa ne pensi? Apri il file **rettangolo.fig**.
Ora ABC è un triangolo rettangolo qualunque (figura 5).
Ormai sei un esperto; dovresti aver imparato come operare !
Muovi il punto..(figura 6).
Quindi i punti..(figura 7).
Ma guarda, sei stato bravissimo! Hai verificato che il quadrato verde (quello costruito sull'ipotenusa) è interamente ricoperto dai...
Allora anche per questo triangolo rettangolo vale la proprietà prima enunciata. Vuoi provare a ripeterla?
Tutto questo è successo per caso, oppure variando la

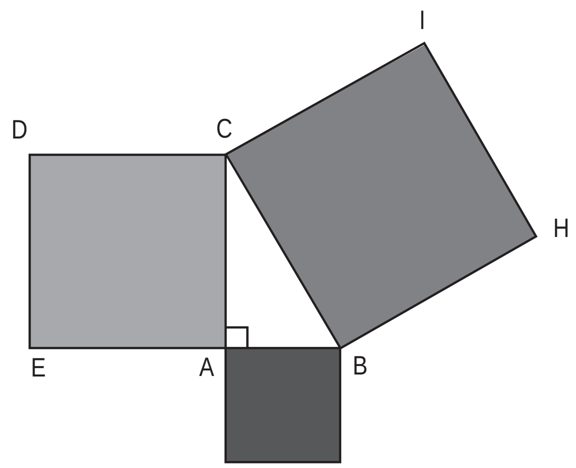


Fig. 5

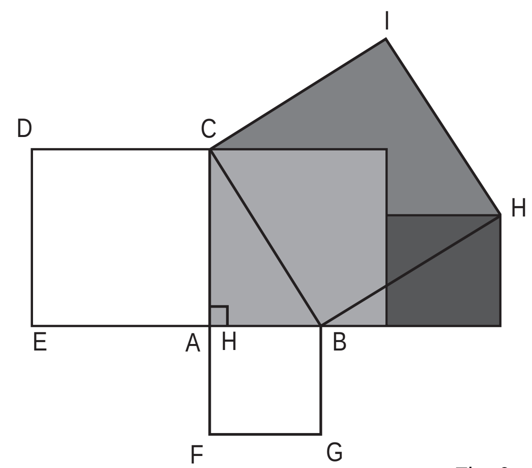


Fig. 6

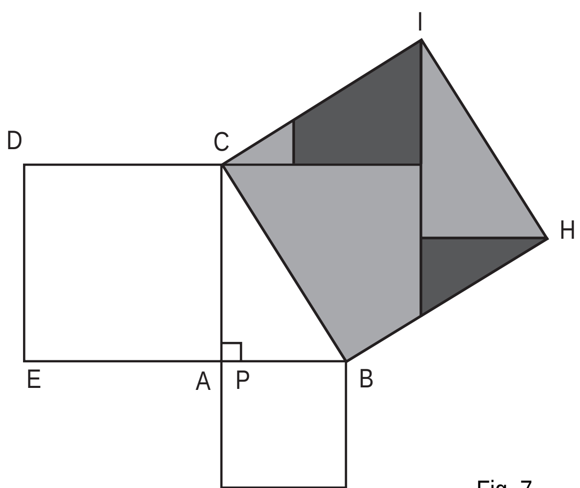


Fig. 7

misura dei lati la relazione è ancora vera? Muovi un qualunque vertice del triangolo ABC, varia di conseguenza, la misura dei lati..
I quadrati di colore blu e rosso ricoprono ancora il quadrato di colore verde?..
Certo, a questo punto, si chiede Teo, sarebbe interessante verificare se questa relazione è valida per tutti i triangoli.
Continua a lavorare con lui. Apri il file **non_rett.fig**. Muovendo il punto C' verso il punto C, vedi apparire il triangolo ABC' (figura 8) che è un triangolo qualunque. Vedi pure i quadrati costruiti sui due lati AC' e C'B (quelli di colore grigio e giallo).
Confronta questi con quelli di colore rosso e blu. Confronta le superfici..
La proprietà questa volta non vale! E ciò anche quando fai variare ancora i lati AC' e BC' (figura 9).
Allora possiamo concludere che:

IN OGNI TRIANGOLO RETTANGOLO IL QUADRATO COSTRUITO SULL'IPOTENUSA E' EQUIVALENTE ALLA SOMMA DEI QUADRATI COSTRUITI SUI CATETI.

Alla fine del lavoro Teo è contento: ha trovato un amico e scoperto, un'importante proprietà che è passata alla storia con il nome di ***teorema di Pitagora*** (il termine teorema è di origine greca e significa riflessione).
Ma chi era Pitagora? Pitagora di Samo, piccola isola del Mare Egeo vicina alle coste della Turchia, (vissuto tra il 580 e il 500 a.C.), fu uno dei maggiori matematici dell'antica Grecia. Viaggiò molto e apprese dai Babilonesi, dagli Egizi ed anche dagli Indiani conoscenze filosofiche e matematiche. Si occupò anche di magia, astrologia e musica.
Tornato dai suoi viaggi, si stabilì a Crotone dove fondò una setta scientifico-politico-religiosa, che dal nome del fondatore venne detta dei Pitagorici.
I Pitagorici ritenevano che i numeri fossero alla base di ogni conoscenza sostennero la teoria della sfericità della terra, intuirono la possibilità di esprimere le leggi della materia tramite formule di tipo matematico, contribuirono a divulgare le conoscenze matematiche apprese da altri popoli e le ampliarono con le proprie considerazioni e scoperte. Fra queste scoperte ha una particolare importanza il **teorema di Pitagora**.

COSTRUZIONI
Il progetto, nella parte grafica, è costituito, nell'ordine, dai files **pavimento**, **rett_iso**, **rettangolo** e **non_rett**, dei quali descriviamo sinteticamente le costruzioni.

Pavimento
1) Punto O e retta r per O. 2) Punto A, perpendicolare p per A a r e parallela b per A a r. 3) Punto C su p e circonferenza c di centro A e raggio AC. 4) Intersezioni E

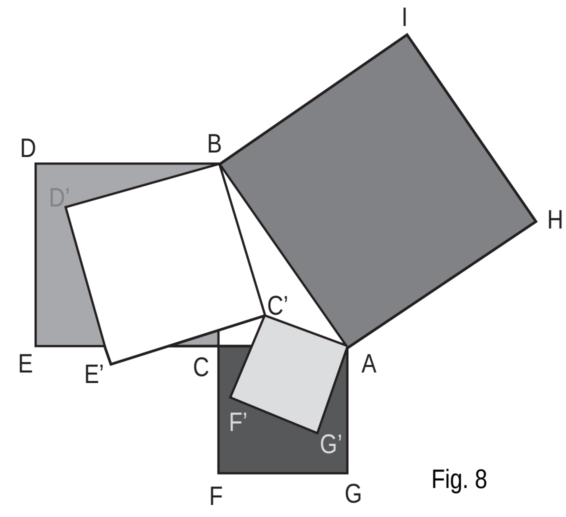


Fig. 8

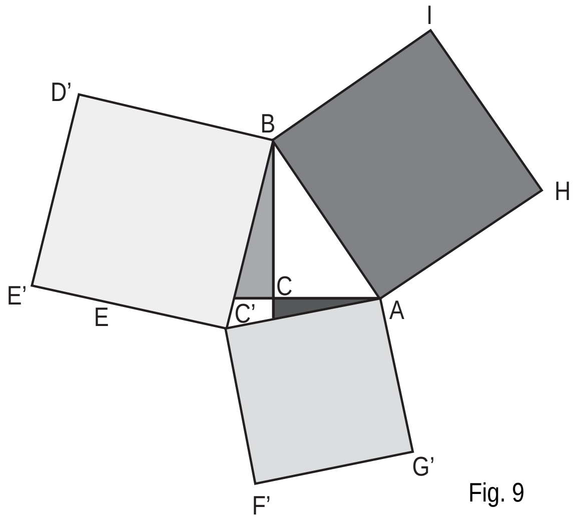


Fig. 9

e B di c e b. 5) Triangolo ABC. 6) Simmetrico di A rispetto al lato BC del triangolo ABC. 7) Simmetrico di ABC rispetto a BC.

A questo punto si costruiscono triangoli simmetrici di ABC in opportune simmetrie assiali o centrali, fino ad ottenere un “reticolato”, composto da triangoli rettangoli isosceli e quadrati, come talvolta si vede nei pavimenti. Si usano poi le istruzioni “spessore” e “colore” per i quadrati ACDE, AFGB e BHIC, che vengono quindi “nascosti”.

La figura stilizzata, la cui costruzione è ininfluente per gli scopi prefissi, si muove col punto che rappresenta la mano sinistra del pupazzetto.

Rett_iso

1) Punto O e retta a per O. 2) Punto A, perpendicolare p per A ad a. 3) Perpendicolare p1 a p per A. 4) Punto B su p1 e circonferenza c di centro A e raggio AB. 5) Intersezioni C ed F di c e p. 6) Intersezione E di c e p_1. 7) Triangolo ABC e angolo CB. 8) Punto medio M fra E e C e simmetrico D di A rispetto a M. 9) Simmetrico G di D rispetto ad A. 10) Simmetrico D’ di D rispetto a C. 11) Simmetrico H di C rispetto a D’. 12) Simmetrico I di B rispetto a D’. 13) Quadrati DEAC, AFGB, CBHI. 14) Segmenti IB, CH, EA, CI, HI . 15) Triangoli BFG, BAF, DAC, DEA. 16) Simmetrico D’’ di D rispetto ad E e segmento D’’A. 17) Punto P su D’’A e vettore D’’P. 18) Perpendicolare p_2 per P a p_1. 19) Segmento DC. 20) Intersezione D’’’ fra p_2 e DC ed E’ tra EA e p_2. 21) Vettore <u>d</u> DD’’’. 22) Traslati A’ e C’, rispettivamente di A e C di vettore <u>d</u>. 23) Triangolo D’’’C’A’. 24) Punto su CI, C’’ (che si porta a sovrapporsi a I), e segmento D’’’C’’. 25) Punto su D’’’C’’ e vettore <u>d</u>* D, punto su D’’’C’’. 26) Triangolo punto su D’’’C’’,E,’’A’’ traslato di vettore <u>d</u>* del triangolo DEA. 27) Traslato B’A’’’F’ di vettore D’’P. del triangolo BAF. 28) Punto su HI. 29) Punto medio M_1 fra P e il punto su HI e simmetrico D’’’’’ di D’’ rispetto a M_1. 30) Vettore <u>h</u> HD’’’’. 34) Traslato B’’F’’G’ di vettore <u>h</u> del triangolo BFG. 35) Segmenti C’A’ e CB. 36) Intersezione L fra C’A’ e CB. 37) Segmenti CL ed LB.

Vengono poi “nascosti” gli oggetti non essenziali e “riempiti” il quadrato CBHI e i triangoli D’’’A’C’, D’’’E’’A’’, B’A’’’F’ e B’’G’F’’.

Rettangolo

1) Punto O e retta a per O. 2) Punto Z e retta p per Z parallela ad a. 3) Punto A su p e perpendicolare p_1 a p per A. 4) Punto B su p e C su p_1. 5) Triangolo ABC. 6) Retta r per C perpendicolare a BC. 7) Circonferenza c di centro C e raggio CB. 8) Intersezione I fra r e c. 9) Punto medio K fra I e B. 10) Simmetrico H di C rispetto a K. 11) Quadrato CBHI. 12) Bisettrice b dell’angolo CZ. 13) Simmetrico E di C rispetto a b. 14) Punto medio L tra C ed E. 15) Simmetrico D di A rispetto ad L. 16) Quadrato EACD. 17) Simmetrico F di B rispetto a b. 18) Punto medio N fra B ed F. 19) Simmetrico G di A rispetto a N. 20) Quadrato FGBA.

A questo punto la costruzione è analoga a quella precedente nel complesso, ma viene introdotto un “escamotage” dovuto al fatto che, contrariamente al caso precedente, i quadrati EACD e FGBA sono composti da poligoni e triangoli che variano secondo che AB>CA o AB<CA e quindi la costruzione precedente è adattata alle due situazioni che si devono considerare. Ecco come ciò viene realizzato:

1) Retta h per H perpendicolare a p. 2) Intersezione R fra h e p. 3) Punto medio M tra A ed R. 4) Segmenti AM ed MR. 5) Si sposta B sul segmento AM, si traccia la retta s per B perpendicolare a p e si determina l’Intersezione X tra s e AM (così AB<AC). 6) Si muove B sino a portarlo su MR e si trova l’intersezione Y fra s e MR (in questo caso AB>AB).

Si utilizzano adesso i triangoli rettangoli ABX o ABY. Come nella costruzione **rett_iso** si “nascondono” gli oggetti non essenziali e si riempiono, con colori opportuni, il quadrato CBHI e i poligoni ed i triangoli che compongono, nei due casi, i quadrati EABC e FGBA.

Non_rett

Analogamente a come fatto nel file **rettangolo**, si costruiscono il triangolo BCA rettangolo in C ed i quadrati di lati AB, BA e CA che vengono colorati. Poi si considera la retta p_2 per C perpendicolare ad AB, si determina l’intersezione K tra AB e p_2 e si traccia la semiretta KC.

Successivamente preso un punto C’ su p_2 si determina il triangolo BC’A, si costruiscono e colorano i quadrati di lati BC’ e AC’ solo quando C’ appartiene a KC.

---

media superiore

I Poliedri

di Enrico Pontorno
I.S.I.S.S. Motta di Livenza TV - sez Liceo Classico
Collaboratore esterno IRRE Emilia-Romagna

Non vi pare che nei cristalli
la natura si esprima in versi?

Le origini

L’osservare un sasso, un masso squadrato che rotola fino a fermarsi, poggiando casualmente su una delle sue facce, può essere stata la causa del nome dato a quelle figure geometriche spaziali note con il nome di poliedri, “dalle molte basi”, dai molteplici piani d’appoggio.

In natura

Tetraedro, cubo e ottaedro sono presenti in natura sotto forma di cristalli. Dodecaedri e icosaedri sono invece gli involucri protettivi di alcuni protozoi marini, i radiolari.

L’evoluzione storica

Sono poliedri regolari quelli le cui facce sono poligoni regolari eguali e i cui angoloidi sono tutti eguali. Esistono diverse forme di poliedri regolari, ma quelli storicamente rilevanti, che rappresentavano la perfezione per gli antichi matematici, sono i cinque poliedri “convessi” citati nel seguito. A quattro di essi, i primi in ordine di tempo ad essere classificati, Timeo di Locri, discepolo di Pitagora, attribuì significati mistici con le corrispondenze:

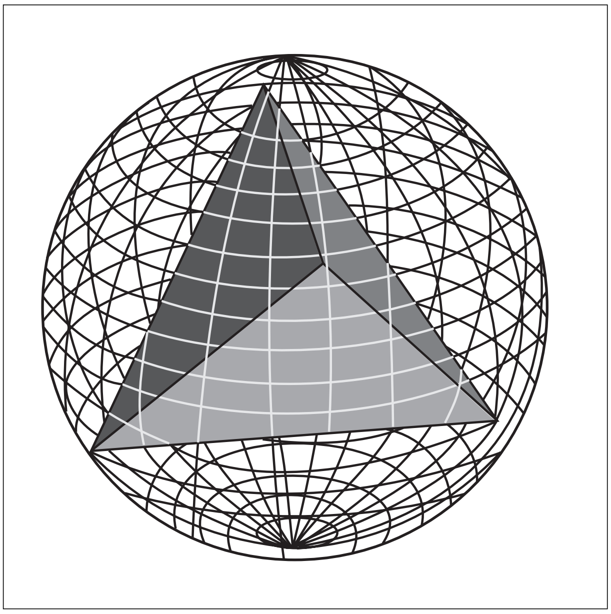
tetraedro↔fuoco, ottaedro↔aria,
icosaedro↔acqua, cubo↔terra.

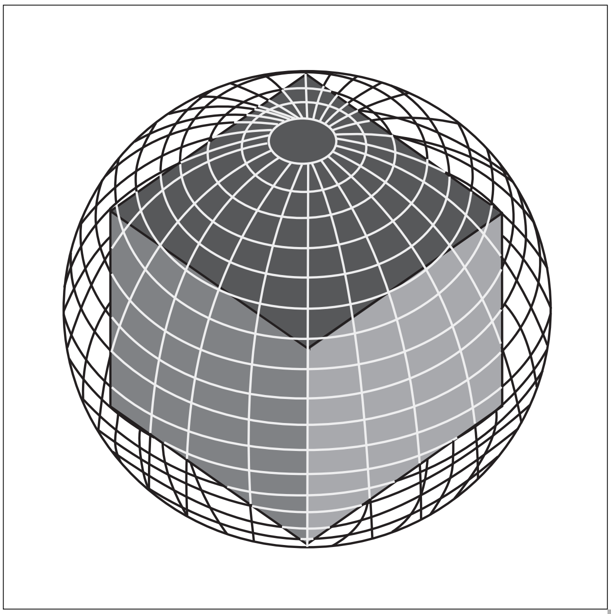
E alla terra diamo la forma cubica. Infatti dei quattro generi è il più immobile...E soprattutto è necessario che sia tale quello che ha le basi più solide. All’acqua daremo la forma che delle rimanenti è la più difficile da muoversi [*l’icosaedro*] *e al fuoco la più mobile di tutte* [*tetraedro*] *e all’aria quella di mezzo* [*ottaedro*] [5, 56A 1-7].

In questa classificazione Platone si riferisce al volume: se consideriamo i solidi inscritti in sfere di eguale raggio, si ha evidentemente

$volume_{tetraedro}<volume_{ottaedro}<volume_{icosaedro}$

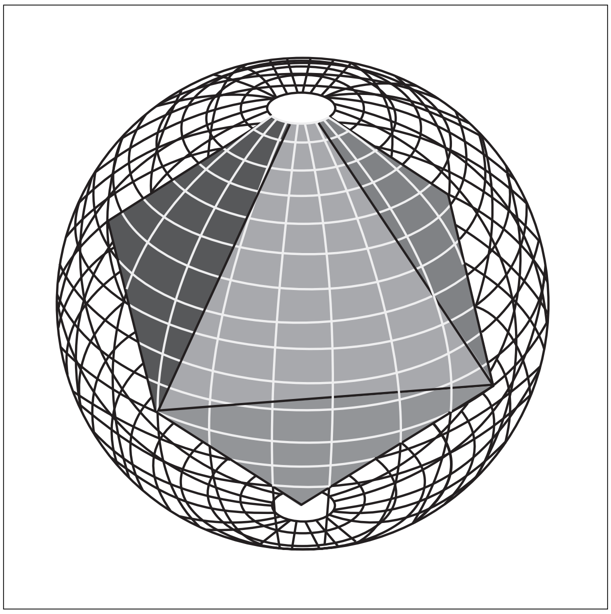
Per nulla turbato dalla scoperta di un quinto poliedro regolare, Platone considerò il dodecaedro come la forma che racchiude l’intero Universo.

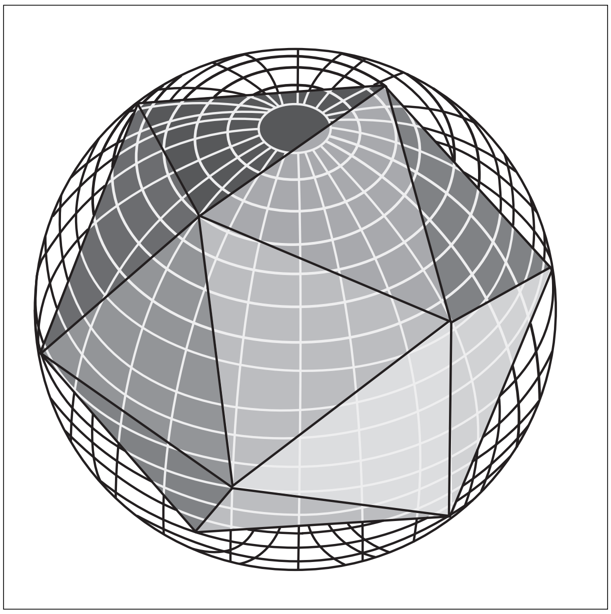


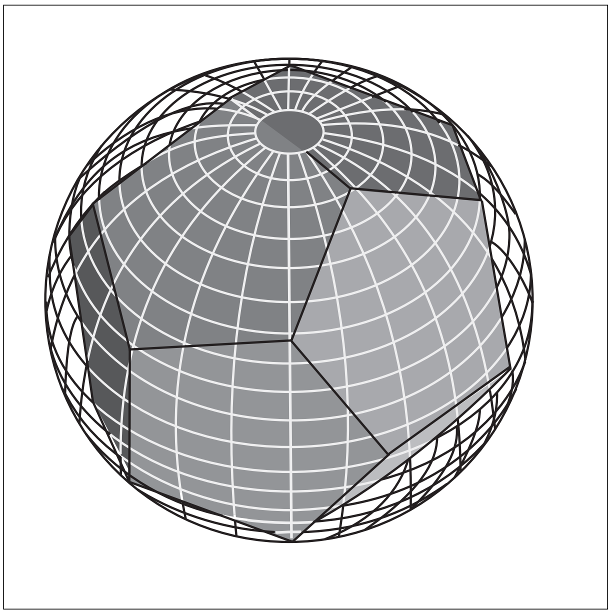


Ma essendovi ancora una quinta combinazione, il Dio si servì di essa per decorare l'Universo. [5, 55C 4-6]

La costruzione geometrica dei poliedri regolari è attribuita a Pitagora. Certamente erano noti agli egiziani il cubo, il tetraedro e l'ottaedro. A Pitagora va attribuito innanzitutto il merito della divulgazione di metodi geometrico-costruttivi dei solidi già noti. Inoltre è probabile che, procedendo con un metodo di indagine sistematica, egli abbia osservato come la costruzione del tetraedro richiedesse di riunire per un vertice tre triangoli equilateri e quella dell'ottaedro quattro di tali triangoli; riunendone per un vertice cinque pervenne alla costruzione dell'icosaedro. Sei triangoli equilateri, infine, giacciono su uno stesso piano se hanno un vertice in comune, esaurendo in tal modo l'indagine sui triangoli equilateri.
Pitagora rivolse quindi la sua attenzione al cubo. È facile accorgersi, come egli fece, che non esistono altri poliedri a facce quadrate. Invece tre pentagoni regolari, riuniti al solito modo, danno origine ad un nuovo solido regolare, il dodecaedro, mentre non è possibile riunirne un numero maggiore. E poiché tre esagoni riuniti nel modo consueto formano un piano, il metodo di costruzione indicato non è più applicabile e la determinazione dei poliedri regolari convessi è esaurita.
Si badi che il procedimento pitagorico appena illustrato è solo un'ipotesi. Nulla ci conferma che Pitagora abbia agito in modo euristico nella costruzione del dodecaedro e dell'icosaedro. Ma il metodo euristico è una delle espressioni più vive e spontanee dell'attività matematica, più o meno consciamente utilizzato dai matematici nella risoluzione di problemi, ed è probabile che Pitagora se ne sia servito per l'occasione.
Inoltre oggetti dodecaedrici di origine etrusca e celtica sono stati ritrovati dagli archeologi e sembrano risalire alla prima metà del I millennio a. C., quindi potevano essere noti a Pitagora, i cui rapporti con sacerdoti etruschi sembrano certi.
A Pitagora va dato senz'altro il merito di avere compiuto la classificazione dei poliedri regolari e di avere dato ad essi dignità matematica facendone oggetti di studio della geometria pura.
È con Platone, tuttavia, che la forma (eidos) diventa forma ideale (idea). Viene attribuita a Platone un'esposizione della teoria dei cinque solidi, divenuti "platonici" per eccellenza; tale opera non è pervenuta a noi ma da qualche passo noto di Platone è certa la sua conoscenza delle costruzioni di tali figure.
Nel dialogo *Timeo* [5, 53B-55D] Platone spiega il modo in cui, a partire da triangoli elementari, il Demiurgo forma i solidi geometrici regolari, dai quali derivano il fuoco, l'aria, l'acqua e la terra. Qualunque superficie, dice Platone, è formata da triangoli, e due sono i triangoli elementari da cui tutti gli altri derivano: il triangolo rettangolo isoscele e lo scaleno; il primo è unico (s'in-

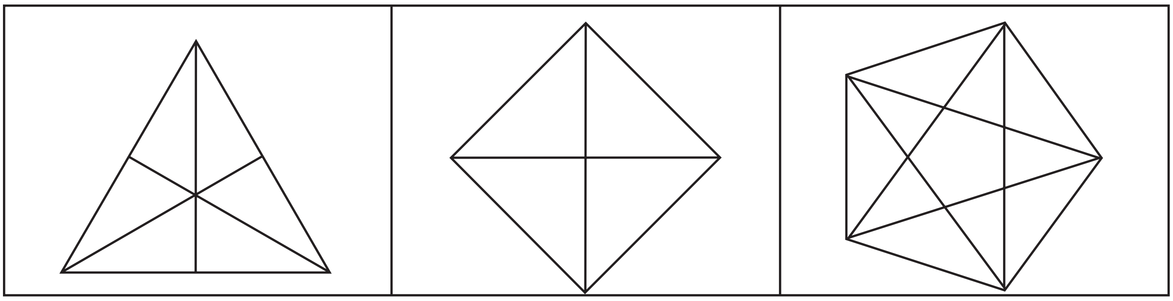






tende come “forma”) mentre del secondo se ne ha un’infinità. Pertanto fra tutti i triangoli rettangoli scaleni il Demiurgo sceglie “il più bello”, quello con angoli acuti di 30° e 60° (Platone dice “quello il cui lato maggiore è doppio del minore”). Ogni faccia triangolare del tetraedro, dell’ottaedro, dell’icosaedro è costituita da sei di tali triangoli, che in tal modo generano i solidi. Il cubo è costituito da triangoli rettangoli isosceli (quattro per ogni faccia). Nessun cenno alla composizione del dodecaedro, le cui facce sono pentagoni non scomponibili con i due triangoli fondamentali. Si ipotizza che Platone abbia menzionato il dodecaedro perché nella triangolazione del pentagono è presente un altro topos della matematica ellenica, la sezione aurea.

estremamente significativa dal punto di vista didattico.
http://www.mathpuzzle.com/Fairdice.html
Un sito con una numerosa rassegna di “dadi equi”, immagini di poliedri creati con il software *Mathematica* della Wolfram Inc.
http://mathworld.wolfram.com/Isohedron.html.
Una delle “sale da esposizione” del sito della Wolfram, dedicata ai poliedri.
http://www.kampax.dtu.dk/~ra/polyhedra/polyhedra.html
Ancora poliedri
http://daisy.uwaterloo.ca/~hqle/Polyhedra/regular.html
Sito canadese dell’Università di Waterloo, con notizie storiche e tecniche: Keplero e i solidi platonici, i poliedri regolari stellati, dualità, numeri di Schlafli,



I poliedri archimedei

Sono stati classificati anche tredici poliedri semiregolari, le cui facce sono poligoni regolari non tutti eguali tra loro e i cui angoloidi sono tutti eguali fra loro.
Una gamma infinita di poliedri si può ottenere con operazioni di troncatura e stellatura, verso l’esterno o verso l’interno, a partire dai poliedri regolari e dagli archimedei. Unico limite è nella fantasia di chi progetta tali figure!

Siti

http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html
Una vera e propria “bottega dell’arte” avente per tema i poliedri. Vi si trova di tutto: scienza e arte, note scientifiche e composizione artistiche. Colpisce un’opera rappresentante un poliedro i cui vertici sono arance e mele e i cui lati sono forchette!
Dalla Home-page, l’autore Dr. George Hart, vi rimanda ad una cinquantina di sezioni, tutte da esplorare!
http://www.physics.orst.edu/~bulatov/polyhedra/index.html
Un sito interessante per svolgere attività *manuali* in classe. Da esso si può fare *download* degli “sviluppi piani” dei principali poliedri e quindi costruirli, attività sfera tangente alle facce (in-sfera), ai vertici (circum-sfera), agli spigoli (mid-sfera). Adatto a studenti dell’ultimo o penultimo anno delle superiori. Le notizie sono corredate da figure create con *MAPLE V*, software per la grafica ed il calcolo simbolico, prodotto nell’ambito della stessa Università.
http://www.geocities.com/model-world/indexe.html
Una collezione di link, per chi vuole saperne di più.

Bibliografia

1. S. Bernecoli-L. Tomasi, *Quaderno* CABRI*RRSAE* n. 12, IRRSAE Emilia Romagna
2. H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover Publications Inc.
3. Cundy, Rollett, *Modelli Matematici*, Feltrinelli, Milano
4. G. Loria, *Le scienze esatte nell’antica Grecia*, Cisalpino Goliardica, Torino
5. Platone, *Timeo*, a cura di G. Reale, Rusconi, Milano
6. Heal, Hansen, Rickard, *Maple V, r.* 5-*Learning Guide*, Springer

I disegni che illustrano l’articolo sono stati eseguiti con MAPLE V, release 5.1, software per il calcolo simbolico della Waterloo Maple Inc., distribuito in Italia da Teoresi s.r.l., Torino.

LA RECENSIONE DEL MESE

ulisse nella rete della scienza

Ulisse

Mese dopo mese i servizi offerti da Ulisse crescono e si specializzano.

Da settembre 2001 sono stati attivati:

» **Scienza e Gita**, archivio e mappa dei musei della scienza in Italia

» **Recensiti**, una raccolta di recensioni e indicazioni di scienza nel web

» **Luce virtuale**, il laboratorio sulla fisica della luce

Ulisse è un progetto su internet dedicato all'informazione scientifica.

Si distingue per:
> qualità scientifica
> tecnologie innovative
> personalizzazione dei servizi.

Ulisse è dedicato a tutti coloro che si interessano di scienza.

E tutto questo affianca i servizi già attivi dalla primavera 2001:

» **Chiedi a Ulisse**, per porre domande e questioni agli scienziati italiani

» **Itinerari**, per scoprire la scienza che c'è nel web

» **Scienza7**, le notizie settimanali di attualità scientifica

Ulisse è a disposizione di tutti.
La registrazione è gratuita.

Se ti interessa la scienza
Ulisse fa al caso tuo

per saperne di più collegati al sito **http://ulisse.sissa.it**
oppure scrivi alla redazione di Ulisse **redazione@ulisse.sissa.it**

Progetto *In/Formazione permanente* del *Piano Babbage - Per il rinnovamento della comunicazione scientifica*
Finanziato dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Ulisse http://ulisse.sissa.it

Chi non è **in** rete è out. Chi non è **on** line è off