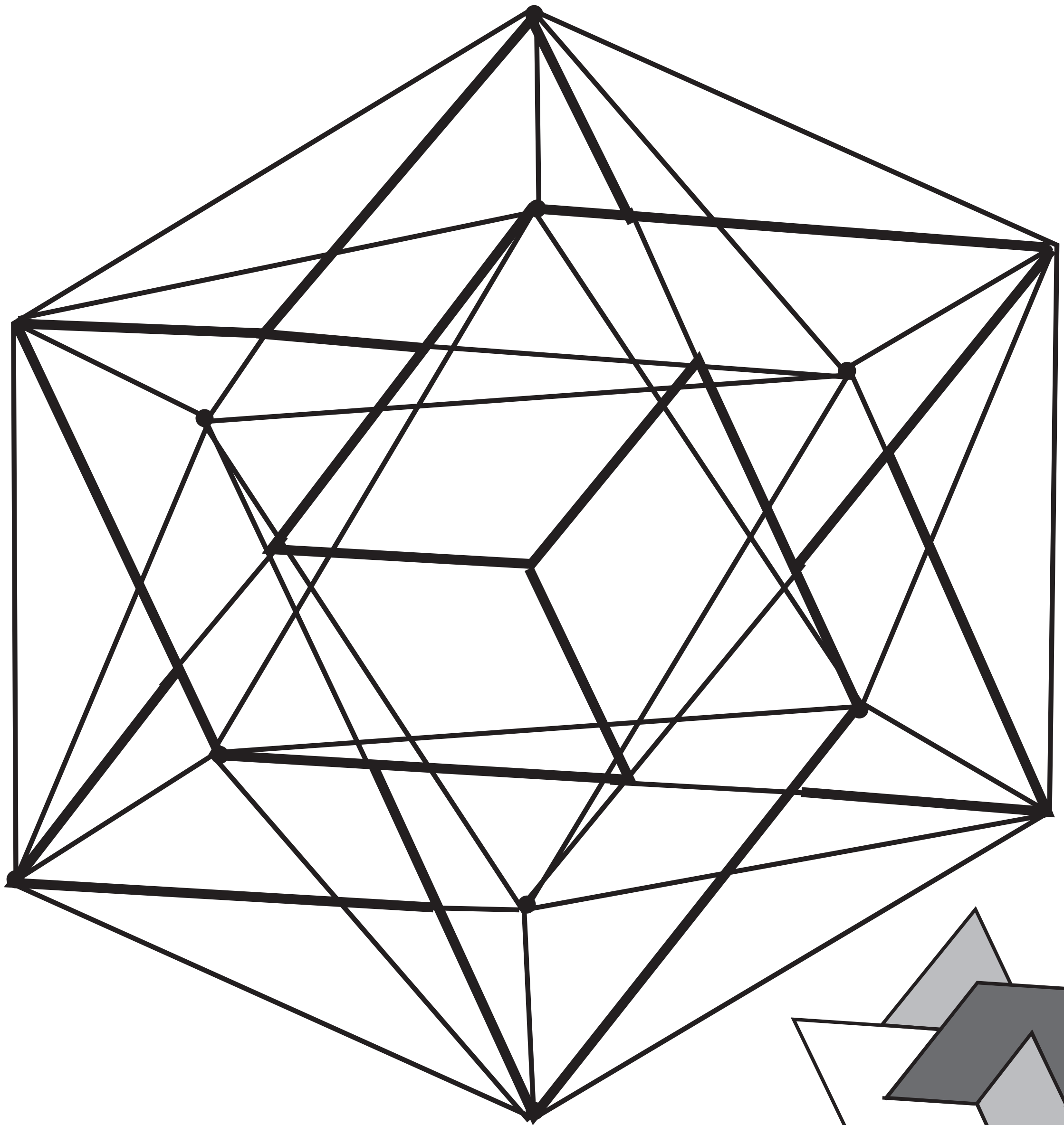
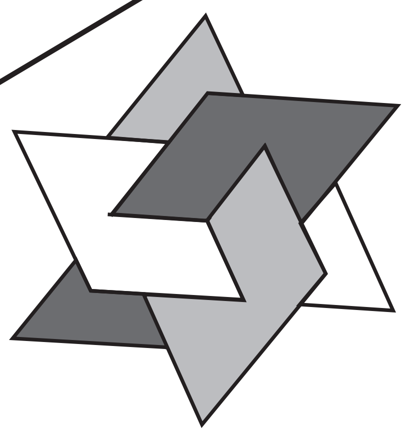
CABRIRRSAE 2001

Bollettino degli utilizzatori di software matematici

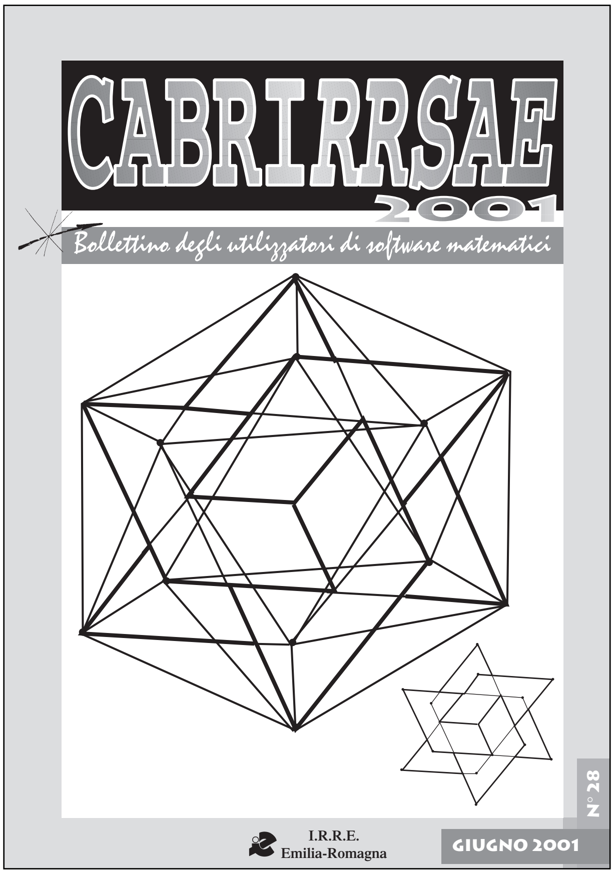




N° 28

GIUGNO 2001

I.R.R.E.
Emilia-Romagna



L'immagine

"E' possibile evidenziare, all'interno di un icosaedro regolare, delle terne di rettangoli aurei tra loro perpendicolari. Le figure della immagine di copertina sono state realizzate con il software Cabri-géomètre nel Quaderno n. 12 di **CABRI*RRSAE***, da Sandra Bernecoli e Luigi Tomasi. La piccola mostra i tre rettangoli aurei disposti su tre piani a due a due perpendicolari. I lati minori di ciascun rettangolo aureo sono spigoli opposti dell'icosaedro regolare. I vertici di questa figura sono dodici, che e' proprio il numero dei vertici dell'icosaedro. Congiungendoli si ottiene l'icosaedro regolare della figura grande. Seguendo Coxeter (*Introduction to Geometry*), per costruire un icosaedro regolare si possono quindi usare tre cartoline postali di formato aureo e incidendole opportunamente, ottenere la terna di rettangoli tra loro perpendicolari mostrata nella figura".

In questo numero

Nella sezione **Cabri discusso** vengono riportati alcuni commenti, avvenuti in rete, in seguito alla pubblicazione sul bollettino n. 26, nella stessa sezione, di un articolo sul ruolo della matematica.

Nella sezione **Come fare**, per la Scuola Secondaria Inferiore, compare una esperienza didattica ⇨

Indirizzo

Bollettino CABRI*RRSAE* 2000
IRRE-Emilia Romagna
Via Ugo Bassi, 7 - 40121 Bologna
Tel. (051)22.76.69 - Fax (051)26.92.21
E-mail: cabri@arci01.bo.cnr.it
http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/
Gruppo di discussione:
E-mail: cabrinews@arci01.bo.cnr.it

Fardiconto:
http://kidslink.bo.cnr.it/fardiconto/
Flatlandia:
http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/

La versione elettronica del bollettino è consultabile a questo indirizzo:
http://kidslink.bo.cnr.it/cabri/rivista.html

Supplemento al n.3, Maggio Giugno 2001, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca Educativi dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24 - 10 - 1980. Direttore resp. Luciano Lelli, Direttore edit. Arnaldo Luisi proprietà IRRE/ER.

Progettazione grafica e videoimpaginazione GRAPHICART
Via Fondazza, 37 - 40125 Bologna
Tel. Seg. Fax 051 30.70.73 - Tel. Seg. Modem 051 42.920.47

SOMMARIO

segue in questo numero
relizzata con Cabri II per introdurre le formule di calcolo dell'area del parallelogramma e del trapezio. Per la Scuola Secondaria Superiore viene presentata prima la dimostrazione di una proprietà della geometria euclidea "scoperta" e studiata con l'ausilio di Cabri da uno studente liceale del terzo anno, che partecipa con interesse e passione alle attività in rete promosse dall'IRRE dell'Emilia Romagna.
Segue la presentazione di una attività svolta in classe sulla risoluzione con riga, compasso e Cabri di due problemi su circonferenza e rette tangenti. Chiude il bollettino un articolo che propone un itinerario didattico, che prevede l'uso della rete Internet, sul tema della geometria euclidea e delle geometrie non euclidee.

CORSI E SEMINARI

• L'ADT (Associazione per la Didattica con le Tecnologie) organizza nei giorni 5-6-7 Ottobre 2001 il 3° Congresso Nazionale "MATEMATICA E SCIENZE SPERIMENTALI NEL TERZO MILLENNIO" presso il Waldorf Palace Hotel, Cattolica (RN)
I congressisti interessati alla prenotazione alberghiera sono pregati di provvedere personalmente.
E' previsto un contributo di £. 50.000 per spese organizzative. L'iscrizione viene fatta dalle 14.00 alle 15.00 del 5.10.2001 o durante lo svolgimento del Congresso. E' gradita una preiscrizione, senza alcun impegno, inviando una e-mail al referente locale, p.cappuccio@fo.nettuno.it oppure ad adt@diginet.it anche per ricevere ulteriori informazioni.
Si consulti anche il sito: http://www.adt.diginet.it/
E' in fase di richiesta l'autorizzazione alla partecipazione da parte del MPI per docenti, presidi e ispettori.
• L'IRRE Lombardia organizza un convegno di tre giorni, con seminari, mostre e laboratori, sullo stato dell'insegnamento della Matematica oggi.
"2001 - Matematica e scuola: facciamo il punto"
Il convegno si svolgerà nei giorni 10, 11, 12 Ottobre 2001 con sede: I.T.T. "A. Gentileschi" - Via Natta, 11 - MILANO (MM1 Lampugnano)
In occasione della prossima riforma dei programmi, l'IRRE Lombardia intende promuovere una riflessione sugli strumenti e le metodologie a supporto della didattica della Matematica nelle scuole di ogni ordine e grado, tramite relazioni, momenti di discussione e di produzione collaborativa, con la supervisione di esperti e cultori della materia.
Si prevede un'iscrizione online da effettuarsi a partire dal 01.06.2001 fino al 23.09.2001 e per un massimo di 500 adesioni.
Le procedure per l'iscrizione e altre informazioni all'indirizzo:
http://www.irre.lombardia.it/matematica/

INVIATECI I VOSTRI ARTICOLI

CABRI*RRSAE* pubblica contributi relativi all'utilizzo del pacchetto Cabri-géomètre e di altri software matematici, con particolare attenzione alla valenza didattica e all'inserimento nel curricolo scolastico.
Ogni articolo (non più di 4 cartelle) deve pervenire, su supporto magnetico e cartaceo, ad uno degli indirizzi indicati in copertina, rispettando le seguenti modalità:

• *SUPPORTO CARTACEO*
- testo e figure devono essere impaginate secondo le intenzioni dell'autore (anche in bassa qualità di stampa)
- una stampata delle sole figure ***in alta qualità di stampa***
- una stampata dei grafici ***in alta qualità di stampa***
- anche le immagini catturate dallo schermo devono essere accompagnate da una stampata ***in alta qualità***

• *SUPPORTO MAGNETICO*
- il file di *testo* in ***formato Word*** (estensione .doc, meglio sarebbe se fosse .mcw) non deve contenere le figure che invece devono essere collocate in un file a parte.
- altri materiali (tabelle, grafici, ecc.) devono pervenire in formato originale, con indicazione dell'applicativo che le ha generate, comunque sempre accompagnate da una stampata di alta qualità.
- altre immagini (tipo quelle tridimensionali) generate da qualunque programma, devono essere esportate come prodotti vettoriali, cioè con estensione A.I.
Il materiale inviato non sarà restituito.

Siamo ugualmente interessati a ricevere materiali più articolati sull'utilizzo di Cabri; tali materiali possono essere diffusi mediante la collana "Quaderni di **CABRI***RRSAE* ".

CABRI DISCUSSO

Riportiamo commenti e considerazioni intercorsi fra alcuni colleghi iscritti alla lista di discussone "Cabrinews", in seguito alla pubblicazione, in questa rubrica del bollettino n. 26, dell'intervento tenuto dal Prof. Invernizzi al convegno "Progetto SeT-Matematica 2000" tenutosi a Bologna nell'Aprile dello scorso anno.

Commenti e considerazioni in rete

a cura della redazione

21 Aprile 2001 Un'interessante lettura

di Michele Impedovo

Vi allego la brillante relazione che Sergio Invernizzi ha tenuto ad un convegno a Bologna, riportata sul bollettino **CABRI*RRSAE*** 26.

Si tratta secondo me di una lettura molto interessante, perché individua dal punto di vista storico un significativo errore didattico nell'insegnamento della matematica, che risale circa ad un secolo fa: la concezione ipotetico-deduttiva della matematica viene trasferita nell'insegnamento, a scapito dell'intuizione e della padronanza semantica degli oggetti.

[L'allegato riporta l'articolo menzionato]

22 Aprile 2001 Invernizzi

di Aldo Scimone

Invio in allegato alcune considerazioni relative all'articolo del Prof. Invernizzi.

Testo allegato:
Cari Amici,
ho letto con molto interesse lo scritto del prof. Invernizzi su una delle cause storiche della situazione disastrosa in cui versa l'insegnamento della Matematica nelle istituzioni scolastiche di ogni ordine e grado (inclusa l'Università). Certo, una delle cause di tale stato dell'arte può essere ravvisata, come sottolinea Invernizzi, nello scollamento che si è prodotto tra la matematica e le scienze ad essa correlate, come appunto la fisica; inoltre, nel malinteso planetario di ciò che effettivamente significò il progetto bourbakista nello sviluppo di una nuova visione delle Matematiche. Come scriverebbe il mio conterraneo Camilleri, dobbiamo riconoscere che, vuoi dal momento storico in cui venne coniata la definizione "sistema ipotetico-deduttivo", vuoi dalla nascita del gruppo Bourbaki, "ni futtiemu a tiesta", cioè, abbiamo in gran parte dimenticato, nell'insegnamento della nostra disciplina che, come scrisse chiaramente Paul R. Halmos (matematico "puro"), "*Il nocciolo della matematica è fatto di esempi concreti e di concreti problemi*".
Il dato più frustrante della mia esperienza di insegnamento è l'avere constatato "con triste meraviglia" che si possono avere le idee didattiche più brillanti, ci si può fare in due, quattro, ... 2^n parti, per interessare i nostri alunni a ciò che dobbiamo (chissà quando potremo dire "vogliamo") trasmettere nel modo più chiaro e interessante possibile, ma che alla fine non c'è proprio nulla da fare: solo ad una *microparte* di ragazzi sono riuscito e riesco a fare gustare il piacere di fare della matematica, perché agli altri **non interessa proprio nulla**. Studiano la Matematica, perché fa parte del piano di studi, punto e basta.
Ma c'è di peggio. Spesso, insegnando ai miei alunni della SISSIS(1) (laureati in Matematica, in Fisica, in Ingegneria), ho avvertito la stessa atmosfera. Perché molti, sia che io faccia matematica o parli di matematica, hanno la stessa espressione dei miei alunni liceali: sono lì perché devono esserci, perché devono completare il corso degli studi, perché devono entrare in graduatoria. Uno si aspetterebbe interesse per la Matematica e per la sua Storia, passione, insonnia per un problema che tormenta, entusiasmo per tutto ciò che fa parte dell'universo matematico, lettura incessante di letteratura matematica, secondo il proprio gusto e la propria passione, voglia di studiare incessantemente per apprendere sempre di più così da poter dare sempre meglio, e invece? Invece ... il nulla, o meglio, l'apatia: "*Ma chistu, chi vuoli*?" (Camilleri)
Non credo che la mia esperienza sia isolata; ma quello che più dispiace è la sensazione di chi grida nel deserto, perché penso che dovremmo rimboccarci tutti le maniche e cominciare con vera umiltà a rivedere molte cose, se vorremo dare un futuro alla nostra disciplina e alla sua didattica, non rassegnandoci come di fronte a una situazione ineluttabile. Cominciamo a chiarire in maniera più particolareggiata la distinzione sacrosanta che fa Invernizzi fra matematica per i professionisti e matematica da insegnare, per evitare di "fotterci la testa" (Camilleri aulico). Troviamo, poi, il coraggio di eliminare tutto ciò che nell'insegnamento della Matematica non persegue lo scopo principale, che non è quello di formare, come rimarca Invernizzi, dei matematici professionisti, ma delle **persone di cultura elevata**: persone che abbiano compreso, per esempio, l'idea principale e profonda che sta alla base di un dato teorema, cosicché,

1) Scuola Interuniversitaria Siciliana di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario

quand'anche ne avranno dimenticato la dimostrazione, ne sarà rimasta l'idea, perché essa sarà diventata **patrimonio del loro spirito**.
Significativa a questo proposito è la lettera inviata (Notiziario UMI-marzo 2001) dal Prof. Villaggio al Presidente dell'UMI, per denunciare lo stato della Matematica nelle facoltà scientifiche, dove corsi istituzionali sono stati ridotti drasticamente a un semestre, senza che i programmi siano stati diminuiti proporzionalmente. In questo modo, ai nostri futuri colleghi come si potrà trasmettere l'entusiasmo per la disciplina che dovranno insegnare? Che cosa rimarrà nel loro spirito?
Manzoni chioserebbe con il suo verso "*Ai posteri l'ardua sentenza*".

25 Aprile 2001 Re: Un'interessante lettura
di Luigi Tomasi

Sì, l'intervento di Sergio Invernizzi è estremamente bello: potrebbe per certi versi essere un manifesto per un insegnamento diverso della matematica, in particolare di questa Lista di discussione Cabrinews, anche se forse il danno sugli insegnanti e gli aspiranti insegnanti è già stato fatto, come dice Aldo Scimone nel suo messaggio.
Come si formano infatti gli insegnanti di matematica?
Le facoltà di matematica, con i loro pochissimi studenti, sono per caso state riformate nel senso auspicato da Sergio Invernizzi?
La riduzione del primo livello di laurea a tre anni andrà in questo senso, oppure si continuerà ad impartire degli insegnamenti estremamente astratti e senza far capire mai il senso delle cose che si studiano.
E le SSIS (Scuole di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario) riescono a stabilire un qualche contatto tra insegnamento della matematica e realtà, oppure ripropongono il solito modello di insegnante di matematica, che trasmette ai propri allievi un insieme di tecniche estremamente raffinate e "sterilizzate", senza mai puntare a comprendere il senso di quello che si fa?
Penso tuttavia che non sia il caso di essere troppo pessimisti come Aldo Scimone. Nelle SSIS mi sembra ci siano diversi specializandi interessati agli aspetti presentati così brillantemente da Sergio Invernizzi. Ma domandiamoci quale formazione secondaria, e soprattutto universitaria, hanno ricevuto. Se faticano ad apprezzare, a volte, quello che fanno, non è detto che l'intera responsabilità debba essere data a loro (come mi sembra faccia Aldo).
E noi insegnanti di matematica, nella maggioranza, quale immagine della matematica trasmettiamo ai nostri allievi? Quali libri di testo usiamo? Siamo in grado di collegare le cose che facciamo in matematica alla realtà? Siamo proprio sicuri di non avere alcuna responsabilità del formalismo dominante nell'insegnamento della matematica?
Vorrei infine, a proposito di intuizione e di metodo ipotetico-deduttivo nell'insegnamento, fare una citazione da un bel libro di Morris Kline che propone un "approccio" fisico-intuitivo allo studio dell'analisi matematica:

This approach, […] , is called the intuitive approch. It is recommanded for several reasons. The first, […] , is pedagogical. A througly sound, deductive approach to the calculus, one which the modern mathematician would regard as logically rigorous, is meaningless before one understands the ideas and the purposes to wich they are put.
One should away try to understand new concepts and theorems in an inyuitive manner before studying a formal and rigorous presentation of them. The logical version may dispose of any lingering doubts and may be aesthetically more satisfying to some minds, but it is not the road to understanding.
M. Kline, *Calculus. An Intuitive and Physical Approach*, J. Whiley, New York 1977, p. 6
Mi rendo conto di aver scritto un po' a caldo le mie impressioni sull'intervento di Sergio Invernizzi (riportato nel n. 26 del Bollettino **CABRI*RRSAE***, uscito il mese scorso), ma spero che qualche altro amico della lista intervenga con le idee più chiare.

1 Maggio 2001 Invernizzi
di Maria Cantoni

Carissimi tutti,
vorrei aggiungere alcune personali considerazioni a proposito dell'articolo del prof. Invernizzi. Leggendolo anche da un punto di vista critico sull'oggi, visto che ciò che vi è scritto è un'analisi apparentemente di un tempo determinato, ma paradigmatica di un atteggiamento umano molto ripetibile (Aristotele era un genio, forse gli aristotelici un po' stupidi...).
Siamo davvero capaci di sfruttare "alcuni vantaggi" che forse ci troviamo di fronte per minimizzare nel futuro gli errori del passato?

1) Non dimentichiamo mai che l'oggi diviene ben presto ieri (e di questi tempi sempre più velocemente) e che noi non siamo affatto immuni da errori molto simili che il senno di poi evidenzia. I decenni appena passati sono davanti agli occhi di tutti.
2) E' assolutamente normale che in ogni tempo si operi in un "ambiente" in cui i vari "poteri" si fanno sentire, poteri di tipo culturale, ideologico, politico, sociale (e quant'altri), nei quali mantenere autonomia di pensiero è molto difficile "a priori".
3) Abbiamo però oggi una possibilità di circolazione di idee di ampiezza assolutamente nuova e per tutti: il confronto è realizzabile concretamente in tempo reale.
4) L'approccio ai problemi è esplicitato da un numero rilevante di testi di grande variabilità ideologica e metodologica e facilmente raggiungibili.

5) Oggi si parla di sviluppo "sostenibile" come di qualcosa che permetta di programmare le attività concrete finalizzate a determinate mete, ponendo nella progettazione stessa il seme dell'evoluzione, affinché le problematiche portate da nuovi contesti possano sempre trovare attenzione.
6) L'autonomia delle singole scuole necessita di partecipazione attiva, cosciente e critica di ogni singolo appartenente.
7) Per quanto riguarda l'insegnante diviene determinante che abbia fatto esperienza di utilizzo personale della propria cultura in ambito generale e non come bagaglio di erudizione da trasmettere. Sarà il suo "protagonismo" (in positivo) ad essere il critico delle eventuali "mode" o tendenze troppo prescrittive!
8) Fare una scuola di formazione per la vita e per tutti, mette in gioco studenti e insegnanti, contemporaneamente, e può realizzarsi solo a partire dall'inizio del percorso, perché vuol dire costruire insieme giorno per giorno il senso delle cose, prendendo la responsabilità delle proprie scelte.

COME FARE

media inferiore

L'area del parallelogramma e del trapezio

di Giovanna Lo Iacono
Istituto Comprensivo "G. Gonnelli"
di Gambassi Terme (FI)

1. Premessa

Affronto in seconda media gli argomenti riguardanti la misura dell'area della superficie delle figure piane .
Durante, "l'attività di laboratorio" gli alunni utilizzano cartoncini colorati e forbici per realizzare, su mia indicazione, alcuni modelli di figure geometriche; tali modelli vengono poi scomposti in figure più semplici; successivamente queste figure vengono ricomposte in modo tale da ottenerne altre di cui si conoscono le formule per calcolare la misura della superficie.

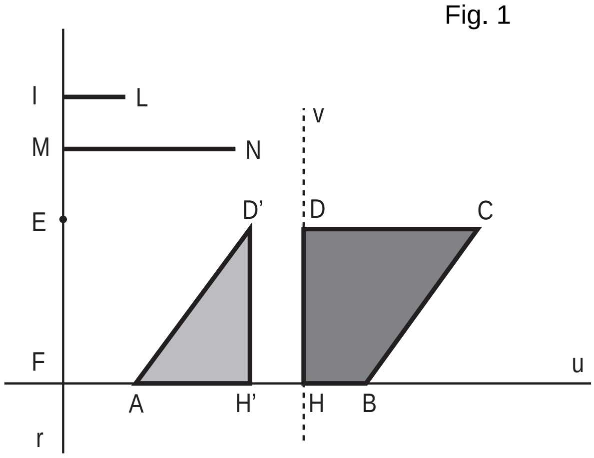
2. Introduzione

Alla fine dell'attività proposta la classe deve essere in grado di giustificare con semplici ragionamenti intuitivi le formule per il calcolo delle aree delle figure piane prese in esame.
Un contributo al raggiungimento dell'obiettivo finale, quello cioè di metter i ragazzi in condizione di individuare le formule per il calcolo delle aree delle superfici del parallelogramma e del trapezio, viene fornito da **due costruzioni realizzate con CABRI**.
I requisiti necessari per potere affrontare l'argomento dell'area del parallelogramma e del trapezio sono:
- acquisizione della nozione di *area*
- consolidamento del concetto di *equivalenza fra figure piane*
- consolidamento del concetto di *equiscomponibilità*
- conoscenza delle formule *dell'area del rettangolo e dell'area del triangolo*.

3. L'area del parallelogramma

Con la seguente costruzione realizzo un modello per trasformare un parallelogramma in un rettangolo (figura n° 1).

Fig. 1

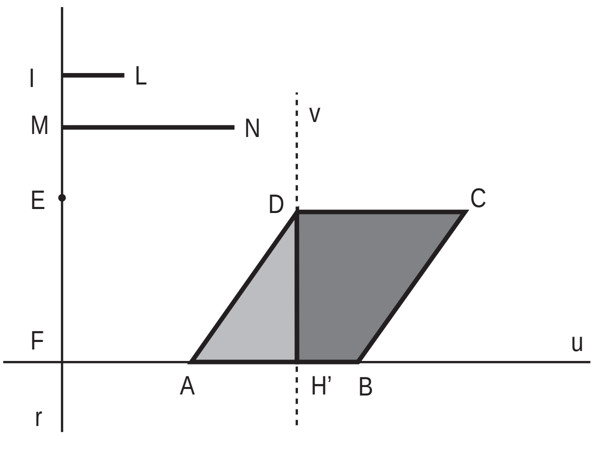


- *Disegnare una retta verticale r a sinistra del foglio di lavoro* (serve per ancorare la figura)
- *Disegnare una retta s perpendicolare alla retta r e passante per un suo punto I*
- *Disegnare la retta t perpendicolare alla retta r e passante per un suo punto M*
- *Disegnare il segmento IL su s*
- *Disegnare il segmento MN su t* (MN>IL)
- *Nascondere s e t*
- *Disegnare la retta d perpendicolare ad r passante per un suo punto E*
- *Disegnare la retta u perpendicolare ad r e passante per un suo punto F*
- *Considerare un punto H della retta u*

- *Disegnare la retta v perpendicolare ad u e passante per H* (usare il tratteggio)
- *Chiamare D l'intersezione di v e d*
- *Utilizzare il compasso (segmento IL, centro H)*
- *Chiamare B una delle intersezioni* (quella alla destra di H) *della circonferenza con la retta u*
- *Nascondere la circonferenza*
- *Utilizzare il compasso* (segmento MN, centro D)
- *Chiamare C una delle intersezioni* (quella alla destra di D) *della circonferenza con la retta d*
- *Nascondere la circonferenza*
- *Disegnare i segmenti HB, BC, DC, DH*
- *Costruire* ***il poligono HBCD***
- *Considerare un punto D' sulla retta d alla sinistra di D*
- *Disegnare la parallela f al segmento BC passante per D'*
- *Chiamare A l'intersezione di f con u*
- *Disegnare la perpendicolare g alla u passante per D'*
- *Chiamare H' l'intersezione di u con g*
- *Disegnare i segmenti AH', H'D', AD'*
- *Costruire* ***il triangolo AH'D'***
- *Nascondere le rette d ,g , f,*
- *Riempimento, con colori diversi, del triangolo e del quadrilatero*
- *Muovere il punto D' fino a sovrapporlo al punto D* (figura n° 2)

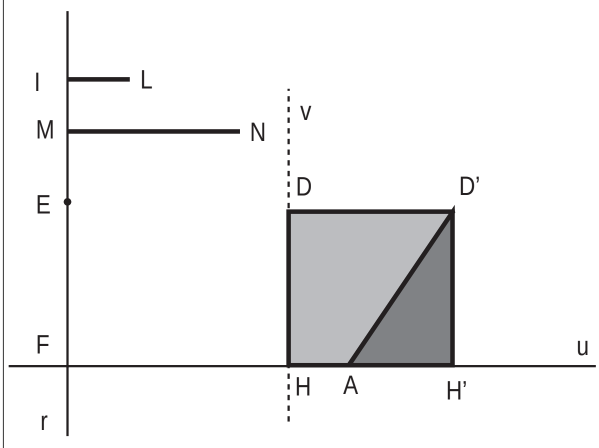
Nel laboratorio di informatica, i ragazzi, suddivisi in gruppi, trovano sul monitor della loro postazione la figura n° 2.

Fig. 2



Ciascun alunno deve, spostando il punto D', notare la scomponibilità del parallelogramma in un triangolo e in un quadrilatero.
Quando, nello spostamento, il punto D' si sovrappone al punto C (figura n° 3), i ragazzi osservano facilmente che:

Fig. 3



- con il triangolo ed il quadrilatero si ottiene un rettangolo;
- il rettangolo e il parallelogramma hanno la stessa base e la stessa altezza;
- il parallelogramma è equivalente al rettangolo;
- l'area del parallelogramma si può ottenere calcolando quella del rettangolo equivalente.

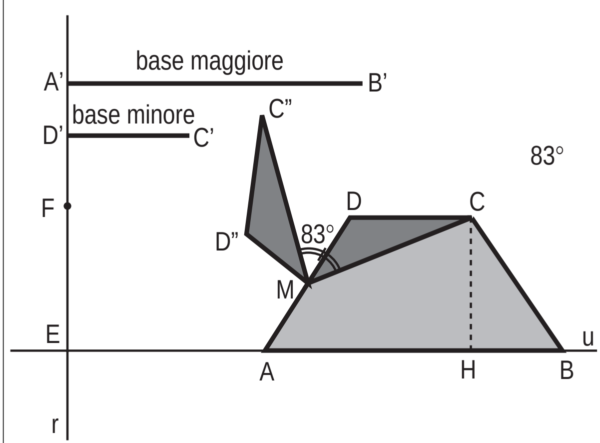
Variando i lati e l'altezza del parallelogramma tramite lo spostamento dei punti L, N ed E, si permette agli alunni di intuire che le osservazioni fatte nell'esperienza precedente, con opportune modifiche alla costruzione, valgono per qualsiasi parallelogramma.

4. L'area del trapezio

Con la seguente costruzione realizzo un modello per trasformare un qualsiasi trapezio in un triangolo (figura n° 4).

- *Disegnare una retta verticale r a sinistra del foglio di lavoro*
- *Disegnare una retta s perpendicolare alla retta r e*

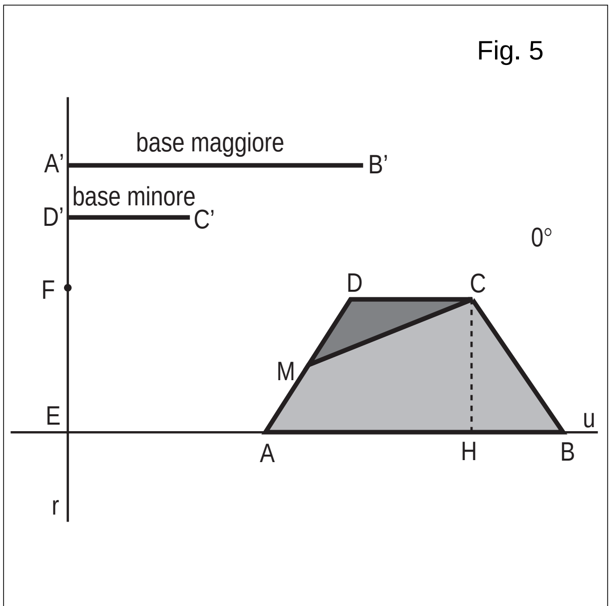
Fig. 4



passante per un suo punto A'

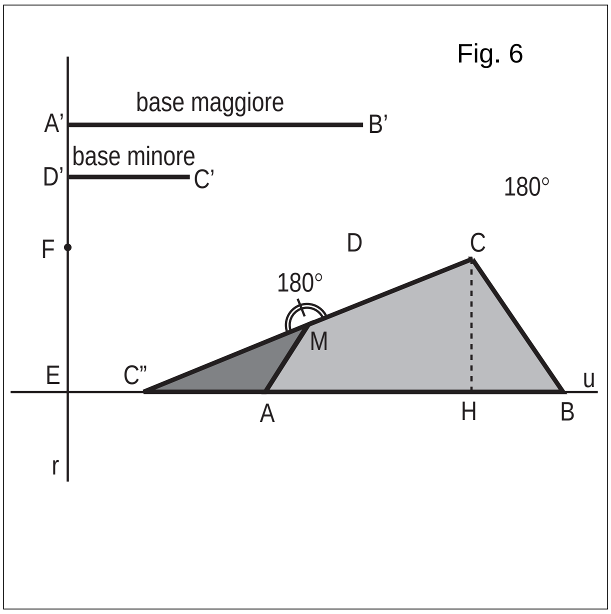
- *Disegnare la retta t perpendicolare alla retta r e passante per un suo punto D'*
- *Disegnare il segmento A'B' su s*
- *Disegnare il segmento D'C' su t*
- *Nascondere s e t*
- *Disegnare la retta u perpendicolare ad r e passante per un suo punto F*
- *Disegnare la retta d perpendicolare ad r e passante per un suo punto E*
- *Considerare un punto A della retta u*
- *Utilizzare il compasso* (segmento A'B', centro A)
- *Chiamare B una delle intersezioni* (quella alla destra di A) *della circonferenza con la retta u*
- *Prendere un punto D della retta d*
- *Utilizzare il compasso* (segmento D'C', centro D)
- *Chiamare C uno dei punti di intersezione* (quello alla destra di D) *della circonferenza con la retta d*
- *Nascondere le circonferenze*
- *Disegnare la retta passante per C e perpendicolare alla retta u*
- *Chiamare H l'intersezione di questa perpendicolare con la retta u*
- *Disegnare il segmento CH* (con il tratteggio)
- *Nascondere la perpendicolare*
- *Disegnare il punto medio M del segmento AD*
- *Disegnare* ***il poligono ABCM*** *e* ***il triangolo MCD*** *e riempirli con colori diversi*
- *Fare ruotare il triangolo MCD* (centro di rotazione M, numero 83° (o a piacere), triangolo MC"D")
- *Nascondere il triangolo MCD*
- *Segnare l'angolo CMC" e misurarlo*
- *Cliccare due volte con il puntatore sul numero 83°, cliccare sul tasto "giù" fino ad ottenere il numero 0°* (Figura n° 5).

Nel laboratorio di informatica, i ragazzi, suddivisi in gruppi, trovano davanti al monitor della loro postazione



la figura n° 5.

Ciascun alunno deve cliccare due volte con il puntatore sul numero 0°; successivamente deve cliccare sul tasto "su". Il triangolo incomincia a ruotare in senso antiorario attorno al punto medio M del lato AD; quando il numero diventa 180° si ottiene la figura n° 6.



I ragazzi osservano che:

- il trapezio si può scomporre in un triangolo ed un quadrilatero
- con il triangolo ed il quadrilatero si ottiene un triangolo
- il triangolo ottenuto ha per base la somma delle basi del trapezio e la stessa altezza
- il trapezio è equivalente al triangolo
- l'area del trapezio si può ottenere calcolando l'area del triangolo ottenuto

Variando le basi e l'altezza del trapezio tramite lo spostamento dei punti B', C' ed F si permette agli alunni di intuire che le osservazioni precedenti valgono per qualsiasi trapezio.

Analoga considerazione si ottiene spostando in modo opportuno i punti A e D per ottenere trapezi particolari (rettangolo ed isoscele).

CABRI IN BIBLIOTECA

Nella collana "Quaderni di CABRI*RRSAE*" è uscito il N. 19, *probleMATEMATICAmente*, anno1999-2000, con il resoconto del primo anno dell'attività in rete, analoga a FLATlandia, rivolta principalmente agli studenti del triennio di Scuola Secondaria Superiore

Il quaderno è prelevabile in formato PDF nel sito http://kidslink.bo.cnr.it/cabri

Chi desidera riceverlo in formato cartaceo puo' richiederlo, anche via fax, all'IRRE dell'Emilia Romagna.

media superiore

Un allievo che da qualche tempo segue FLATlandia, ci ha inviato questo suo "teorema". Qualcuno lo conosce già?

La geometria è senza macula d'errore e certissima per sé

(Dante, Convivio)

di Daniele Urzì
Liceo Scientifico 'G. Galilei" Catania

Nel marzo 2000 la commissione di FLATlandia ha proposto un problema in più quesiti che via via conduceva alla determinazione della cosiddetta "retta di Simson". Essa, pur basandosi su considerazioni geometriche semplici, ritengo che sia di notevole rilevanza. Dopo un po' di tentennamenti, poiché possedevo già abbastanza conoscenze di geometria piana, volli cimentarmi nella ricerca di qualche proprietà dei poligoni. Per determinare la "retta di Simson" bisogna costruire il circocerchio di un triangolo qualsiasi; io, sulla scia di questa costruzione, decisi di indagare sui quadrilateri inscritti in una semicirconferenza. Tentate diverse costruzioni con riga e compasso, un giorno tracciai da un punto P dell'altra semicirconferenza le perpendicolari a tre lati del quadrilatero. Congiungendone i piedi in maniera opportuna, l'angolo che si formava era…retto! Mi sembrò una casualità e rifeci la costruzione e con grande sorpresa verificai di nuovo quella proprietà. Qualche giorno dopo ne parlai con la mia insegnante di matematica, la prof. Di Prima, che mi invitò a cercare una dimostrazione del teorema. Ma l'anno scolastico volgeva ormai al termine e non se ne parlò più. Durante l'estate ripresi i miei appunti e studiai la figura con CABRI: la proprietà si verificava per ogni punto P della circonferenza e anche se il quadrilatero era intrecciato (per P coincidente con i vertici del quadrilatero si ottengono i casi particolari). Stupito dalla generalità di questo teorema, ci lavorai per tre giorni, desideroso di trovare una dimostrazione che valesse per qualunque punto P della circonferenza. Poi, però, mi accontentai di considerare tre casi diversi, di ciascuno dei quali ritengo di aver dato dimostrazioni semplici e sintetiche. Mi chiesi se già qualche altra persona si fosse occupata dello stesso problema e così, cominciato il mio maledettissimo terzo anno di liceo scientifico, ne parlai con la mia attuale insegnante di matematica la prof. Calabretta. Questa mi consigliò di spedire l'elaborato a FLATlandia, visto che l'obiettivo che la commissione si propone è di avvicinare i giovani alla geometria, oggi così poco coltivata (a mio parere perché non comporta mnemonici processi di calcolo, come l'algebra del biennio della scuola superiore). Tramite la prof. Franca Noè mi è stato chiesto dalla commissione di scrivere questa "storia", che adesso concludo e per la quale devo ringraziare la mia insegnante di italiano e latino, la prof. Di Bartolo, che gentilmente ha acconsentito a leggere la bozza e a migliorarla laddove è stato necessario.

Teorema:
Dati una circonferenza e un suo diametro AB, sia ABCD un quadrilatero qualunque inscritto in una delle due semicirconferenze di diametro AB. Se da un punto P della circonferenza, distinto da C e da D, si conducono le perpendicolari PE, PF, PG rispettivamente a DA, BC, CD l'angolo EGF è retto.

Nel caso in cui P coincida con A, dall'enunciato del teorema si deduce che $E \equiv A \equiv P$ e che $C \equiv F$. Quindi l'angolo EGF risulta retto per costruzione (vedi figura sotto). Discorso analogo se P coincide con B.

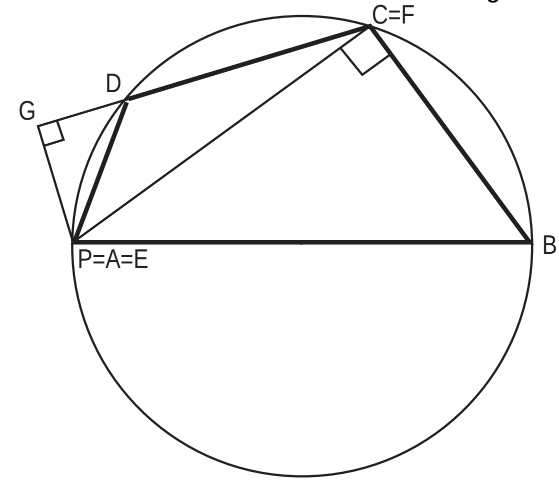


Fig. 1

Nel caso in cui P coincida con C o con D è facile verificare che la proprietà non si verifica perché il triangolo EGF degenera in un segmento.

Adesso dimostriamo il teorema quando P è distinto da A, B, C, D. Si presentano tre casi:

1)
P appartiene alla semicirconferenza che non contiene il quadrilatero ABCD (vedi figura sotto). Si unisca C con

A e P, D con B e P. I quadrilateri PGDE, PFCG sono inscrivibili perché hanno ciascuno una coppia di angoli opposti retti. Di conseguenza si ha:
PGE≅EDP perché insistono sulla stessa corda EP;
PGF≅PCF perché insistono sulla stessa corda PF.
Gli angoli PCB e BDP sono congruenti perché insistono sulla stessa corda PB. Quindi, per la proprietà transitiva, EGF≅ADB (perché somme di angoli uguali). L'angolo ADB è retto per cui è retto anche l'angolo EGF.

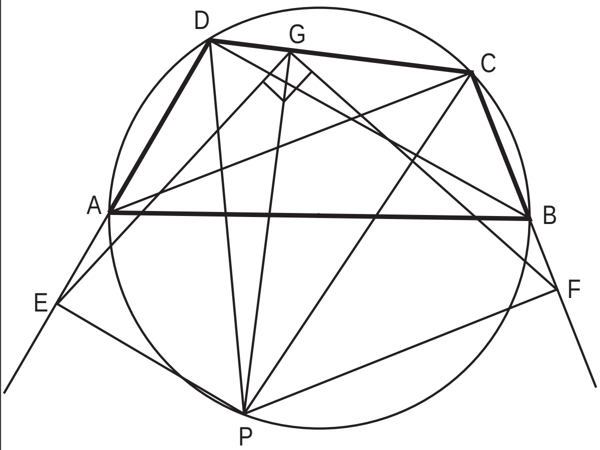


Fig. 2

Osservazioni:

1. Nella dimostrazione abbiamo considerato PDB≅PCB. Potevamo considerare indifferentemente ADP≅ACP.
2. Nella figura il punto G appartiene al segmento DC (perché l'angolo PDC è acuto). Se G appartiene al prolungamento di DC la dimostrazione è la stessa ma i vertici del quadrilatero PGDE sono nell'ordine P, D, G, E. Il lettore provi il caso in cui G coincide con D o con C (se gli angoli PDC o PCD sono retti).

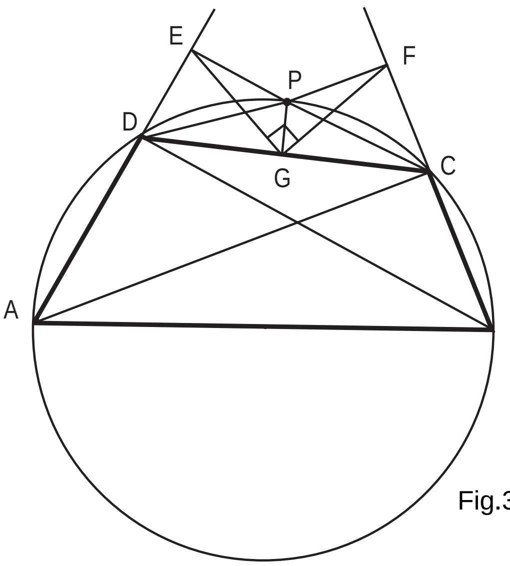


Fig.3

2)
P appartiene all'arco DC non contenente A e B (vedi figura 3).
Si unisca C con A e P, D con B e P. Poiché i quadrilateri DGPE, GCFP hanno due angoli opposti retti sono inscrivibili. Da ciò si deduce facilmente che:
$E\hat{P}D \cong E\hat{G}D$ e $F\hat{P}C \cong F\hat{G}C$.
Le rette EP e DB sono parallele perché entrambe perpendicolari ad AE, per cui $E\hat{P}D \cong P\hat{D}B \cong E\hat{G}D$. Allo stesso modo, considerando le parallele PF ed AC si dimostra che $F\hat{P}C \cong P\hat{C}A \cong F\hat{G}C$. Siccome il quadrilatero DBCP è inscritto si ha

$$P\hat{D}B + P\hat{C}A + A\hat{C}B \cong \pi \mapsto E\hat{G}D + F\hat{G}C + A\hat{C}B \cong$$
$$\pi \Rightarrow E\hat{G}D + F\hat{G}C + \pi/2 \cong \pi$$

Da questa ultima relazione segue che gli angoli EGD e FGC sono complementari e quindi l'angolo EGF è retto.

3)
P appartiene all'arco BC che non contiene A e D (vedi figura 4).
Si unisca C con P, D con B e P. Il quadrilatero FPGC è inscrivibile perché gli angoli opposti PFC e PGC sono retti. Allora gli angoli PGF e FCP sono congruenti perché insistono sulla stessa corda PF. Ma PCF è congruente anche a PDB, perché insistono sulla stessa corda PB. Quindi per la proprietà transitiva gli angoli PGF e PDB sono congruenti. Siccome gli angoli EDP e PDB sono complementari segue che:

$$EPD+FGP \cong \pi/2$$

Si dimostra facilmente che DPGE è inscrivibile, per cui si ha:

$$EGF+(FGP+PDE) \cong \pi$$

e sostituendo la somma tra parentesi segue che l'angolo

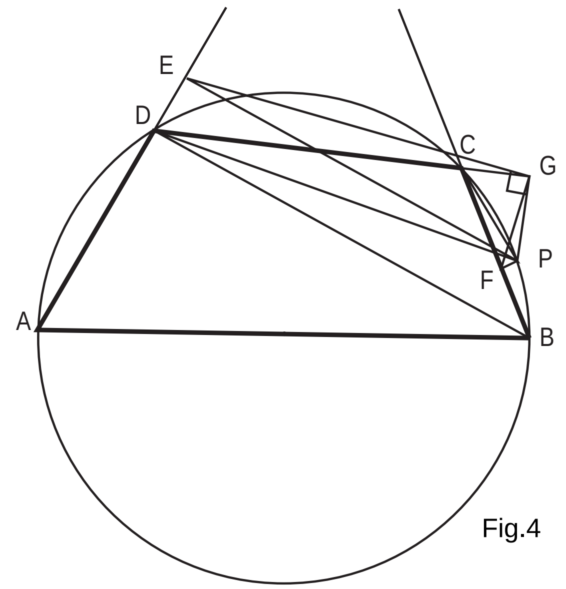


Fig.4

EGF è retto. Quando P appartiene all’arco AD che non contiene B e C, la dimostrazione è simile ma bisogna unire C con A e P, D con P.

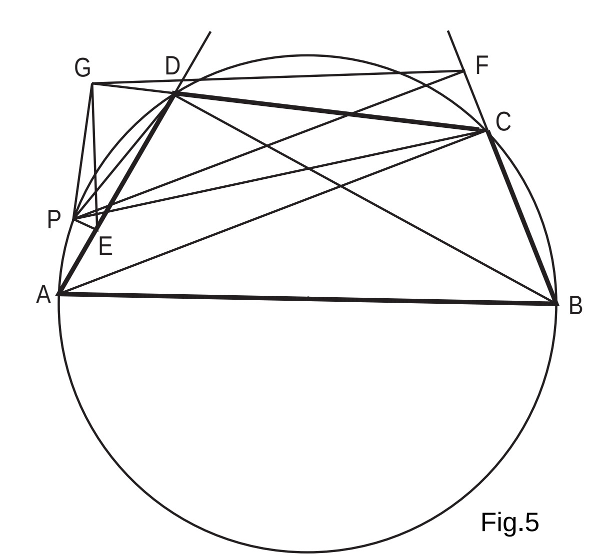


Fig.5

Caso di P appartenente all’arco AD che non contiene B e C

Riga compasso e... tracciatore di parabole

di Laura Cordiali
Liceo scientifico Gobetti di Venaria, TO
e Cristiano Dané
Liceo scientifico Majorana di Torino

Tanto si è dibattuto sull’attualità delle costruzioni con riga e compasso e sui motivi che le hanno fatte resistere a secoli di progressi matematici. Non vogliamo qui tornare sulla questione, però una delle ragioni della loro sopravvivenza è l’esistenza di semplici strumenti reali (la riga e il compasso appunto) utilizzabili da chiunque per tracciare circonferenze e rette.
Vogliamo qui mostrare come l’utilizzo di Cabri permetta di allargare il numero di strumenti a disposizione e come questo possa rendere più semplici alcune costruzioni geometriche.

Spunto di questa riflessione è stata un’attività svolta in terza liceo scientifico sulle condizioni sufficienti per tracciare una circonferenza. Uno degli obiettivi era recuperare le costruzioni e i teoremi di geometria euclidea prima di affrontare gli stessi problemi con gli strumenti dell’algebra e della geometria analitica. In particolare due problemi ci hanno indotto a ricercare una non banale costruzione basata sulla riga e il compasso ed una soluzione più semplice che coinvolge la parabola. Per tracciare parabole sono stati inventati nei secoli parecchi ingegnosi strumenti, chiamati parabolografi (si veda il sito dell’Università di Modena:
http://www.museo.unimo.it/theatrum/), oggi però Cabri ci rende più agevole il lavoro.

PRIMO PROBLEMA

Data una retta *t* e due punti *A* e *B* appartenenti allo stesso semipiano di origine *t*, costruire le circonferenze passanti per *A* e *B* e tangenti a *t*.

Vediamo innanzi tutto la *costruzione con riga e compasso*:
l’idea alla base della costruzione è quella di sfruttare il teorema della tangente e della secante per trovare il punto di tangenza *T* sulla retta *t*.
Si sa infatti che $\overline{OT}^2 = \overline{OA}\cdot\overline{OB}$, avendo indicato con *O* l’intersezione tra la retta *AB* e la retta *t*.
Per trovare il segmento *OT*, sfruttiamo il secondo teorema di Euclide generando un triangolo *AB’T’* rettangolo in *T’*, con *B*’ appartenente alla retta *AB* e tale che le proiezioni dei cateti siano congruenti a *OA* e *OB*.
L’altezza *OT’* del triangolo rettangolo è tale che: $\overline{OT}^2 = \overline{OA}\cdot\overline{OB}$, a questo punto è sufficiente riportare *T*’ sulla retta t, individuando i punti *T* e *T”* (vedi Figura 1).
Per costruire le due circonferenze si utilizza la usuale costruzione della circonferenza per tre punti (*A*,*B*,*T* e *A*,*B*,*T”*), magari precedentemente salvata in una macro.
La costruzione precedente, con riga e compasso, presenta, indubbiamente, qualche difficoltà: gli studenti

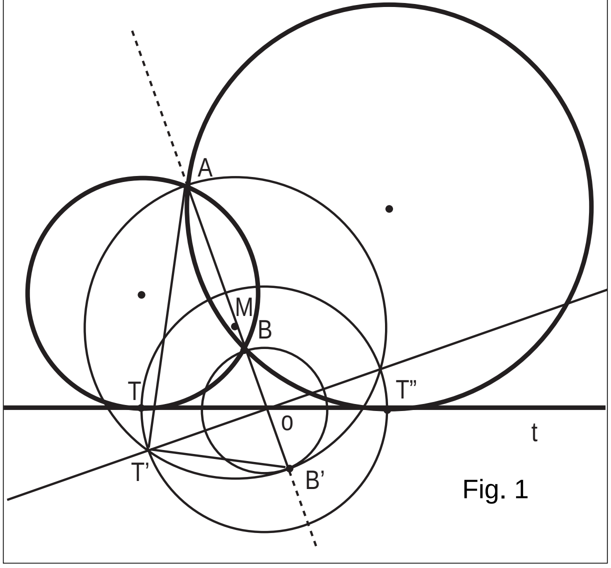
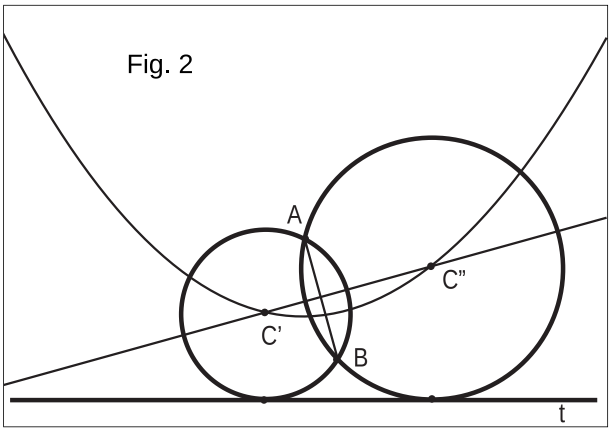
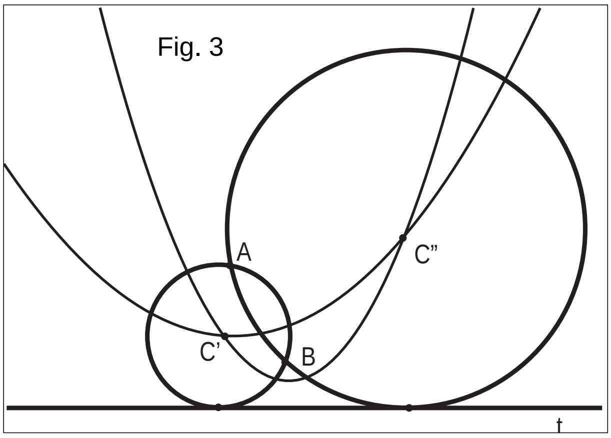


Fig. 1

vanno molto guidati nel suo sviluppo e non è semplice tradurla in una procedura di risoluzione analitica.
Suggeriamo, in alternativa, una *costruzione con riga e parabolografo*, che coinvolge cioè la retta e la parabola. Osserviamo infatti che è possibile trovare il centro della circonferenza richiesta come intersezione tra l'asse del segmento *AB* e la parabola avente per fuoco uno dei due punti dati e per direttrice la retta *t* (Figura 2).



Risulta così evidente che il problema ammette due soluzioni in quanto la parabola interseca l'asse del segmento *AB* in due punti *C'* e *C"*.
Questa costruzione è molto più semplice ed è facile tradurla in un problema algebrico (si tratta di risolvere un sistema parabola-retta).
Naturalmente per procedere come indicato abbiamo bisogno del parabolografo, ma per noi non è nient'altro che una macrocostruzione che dato il fuoco e la direttrice traccia la parabola e la si può trovare tra quelle inserite in Cabri. È da notare che essa rende come oggetto finale la conica anziché il luogo e ciò è tecnicamente fondamentale per poterne considerare le intersezioni.
Una terza possibilità per risolvere il problema è quella di tracciare le due parabole aventi come direttrice la retta data e come fuochi rispettivamente *A* e *B*. Le inter

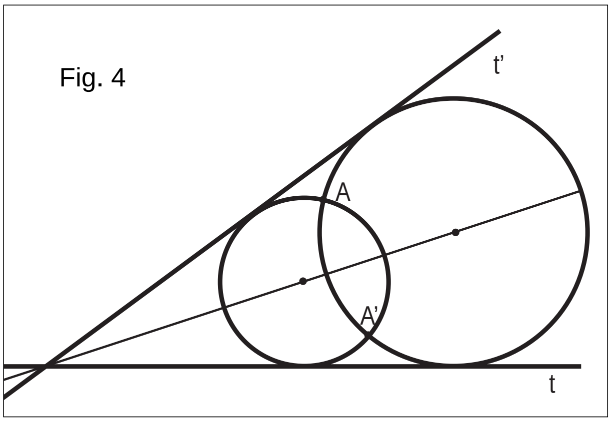


sezioni tra le due parabole individuano due punti che sono equidistanti dalla retta *t* e dai due punti assegnati *A* e *B*, sono quindi i due centri *C'* e *C"* delle circonferenze (Figura 3).
Abbiamo così effettuato una *costruzione con solo il parabolografo*

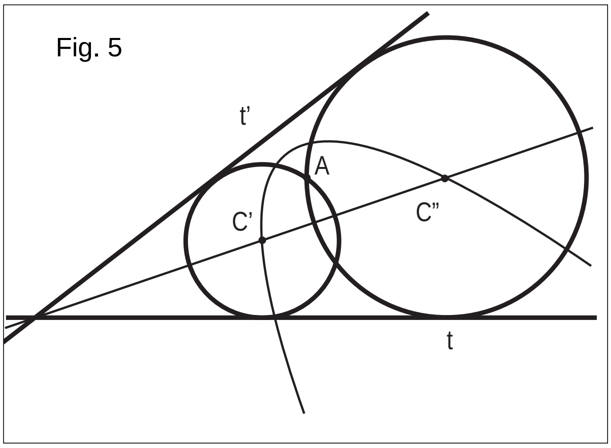
SECONDO PROBLEMA

Date due rette incidenti *t* e *t'* e un punto *A*, costruire le circonferenze per *A* tangenti alle due rette.

In questo caso non occorre rifare una costruzione da capo, ma è semplice ricondurci al caso precedente.
Come prima cosa generiamo una macrocostruzione che dati due punti ed una retta come oggetti iniziali, costruisca come oggetti finali le due circonferenze per tali punti e tangenti alla retta.
Date le rette *t* e *t'* e il punto *A* tracciamo la bisettrice dell'angolo formato dalle rette *t* e *t'* e che contiene *A*. Creiamo il punto *A'*, simmetrico di *A* rispetto alla bisettrice. Concludiamo subito applicando la macro precedente e costruendo le circonferenze per *A* e *A'* tangenti a *t* (Figura 4)



Osserviamo però che la costruzione funziona solo se il punto *A* è contenuto nell'angolo di cui abbiamo tracciato la bisettrice, per fare una figura che resista alla prova trascinamento, dovremo così ripetere la costruzione anche per l'altra delle bisettrici dell'angolo formato da *t* e *t'*.
Vediamo ancora come risolvere il problema utilizzando la parabola: il centro della circonferenza appartiene alla bisettrice dell'angolo che contiene *A*, individuato dalle due rette *t* ed *t'*. Inoltre il centro è equidistante da *A* e da ciascuna delle due rette, e quindi appartiene alla parabola di fuoco *A* e direttrice *t'* (o *t*).



Le intersezioni tra la bisettrice e la parabola, identificano due punti: i centri delle circonferenze richiesti (Figura 5).Anche questa volta possiamo però fare a meno della bisettrice e utilizzare solo parabole, basterà semplicemente tracciare le due parabole aventi come fuoco il punto assegnato *A* e come direttrice ciascuna delle due rette date. Le intersezioni tra le due parabole sono i centri delle circonferenze richieste (Figura 6).
Quest'ultima costruzione ha l'indubbio vantaggio che funziona in ogni caso, non è necessario ripeterla a seconda della posizione del punto *A*

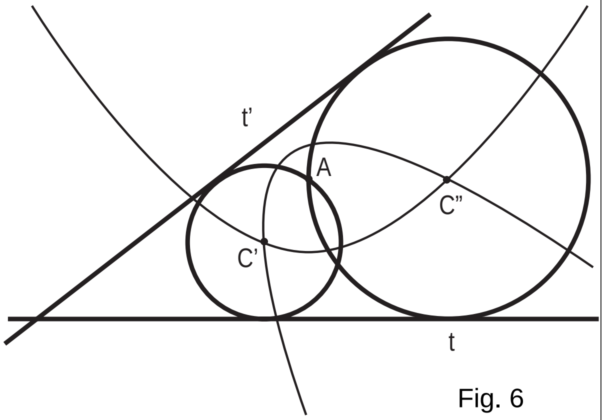


Fig. 6

Riteniamo che l'attività che abbiamo qui sintetizzato abbia avuto un forte riscontro didattico, in quanto ha permesso di:
- mostrare metodi diversi per risolvere un problema, discutere con gli studenti su quale sia preferibile agli altri ed evidenziare come la scelta dipenda dai mezzi e dagli strumenti a disposizione,
- sfruttare Cabri per discutere le condizioni affinché il problema abbia soluzione e i casi limite (non ci siamo qui soffermati su questo aspetto, peraltro tipico dei software di geometria dinamica)
- passare dalla geometria sintetica a quella analitica, ed anzi intrecciare davvero i due percorsi.

L'ultima fase del lavoro con gli studenti è stata la traduzione delle costruzioni geometriche in procedure risolutive di problemi di geometria analitica, per passare, infine, ai metodi di soluzione mediante sistemi per determinare i coefficienti nelle equazioni delle circonferenze.

media superiore

Dalla geometria euclidea alle geometrie non euclidee: un percorso di matematica con l'aiuto di Cabri e della rete

di Luigi Tommasi
Liceo scientifico "G. Galilei" Adria - Rovigo

1. Premessa

In questo articolo si propone un itinerario didattico che prevede, tra gli altri strumenti, l'uso della rete Internet sul tema della geometria euclidea e delle geometrie non euclidee, in modo da fornire un punto di partenza ed una possibile traccia per altri insegnanti di matematica, di fisica, di filosofia,… della scuola secondaria superiore.
L'itinerario qui descritto è stato proposto in una classe quinta di liceo scientifico per la preparazione di un "percorso pluridisciplinare" per l'esame di Stato. Il nuovo esame prevede infatti la possibilità per gli studenti di presentare, in apertura del colloquio, un argomento che sia stato approfondito da tutta la classe o individualmente nel corso dell'ultimo anno. Il tema delle geometrie non euclidee si presta particolarmente bene ad essere affrontato da diversi punti di vista, con il contributo di diverse discipline di studio, in modo, appunto, pluridisciplinare. Nell'ambito di tale percorso, per quanto riguarda la matematica, gli argomenti svolti sono stati i seguenti:
- *Gli Elementi* di Euclide; revisione della sistemazione assiomatica della geometria euclidea; i postulati di Euclide; il V postulato (detto "postulato delle parallele") e le sue conseguenze.
- Studio delle proprietà della inversione circolare rispetto ad una circonferenza nel piano (presentato con *Cabri-géomètre*).
- Introduzione alle geometrie non euclidee dal punto di vista elementare. Modelli di geometria non euclidea; modelli di geometria iperbolica: il modello di Poincaré e il modello di Klein-Beltrami (presentati con *Cabri-géomètre*). Un modello di geometria sferica (presentato con il software di geometria dinamica *Cinderella*).

Classe

Classe 5ª liceo scientifico (con sperimentazione di Matematica del Piano Nazionale per l'Informatica). La classe è stata impegnata nelle attività descritte per tre settimane, ovvero per 15 ore di lezione, comprese l'attività di laboratorio di informatica e le verifiche.
L'argomento si può presentare anche in una terza classe liceo classico o in una quinta liceo linguistico che segua i programmi sperimentali del P.N.I. o quelli elaborati dalla Commissione "Brocca" che prevedono lo svolgimento di questo argomento nell'ultima classe del corso di studi di scuola secondaria superiore.
I programmi del P.N.I. per il liceo scientifico indicano, per quanto riguarda la geometria nella classe quinta, i seguenti argomenti:
"Tema n. 1 – Geometria
a) Le geometrie non euclidee dal punto di vista elementare.
b) Il metodo ipotetico-deduttivo: concetti primitivi, assiomi, definizioni, teoremi: coerenza ed indipendenza di un sistema di assiomi. Sistemi formali e modelli.
c) Gli assiomi della geometria euclidea e dell'aritmetica.

Nel commento al tema di geometria si danno le seguenti indicazioni:

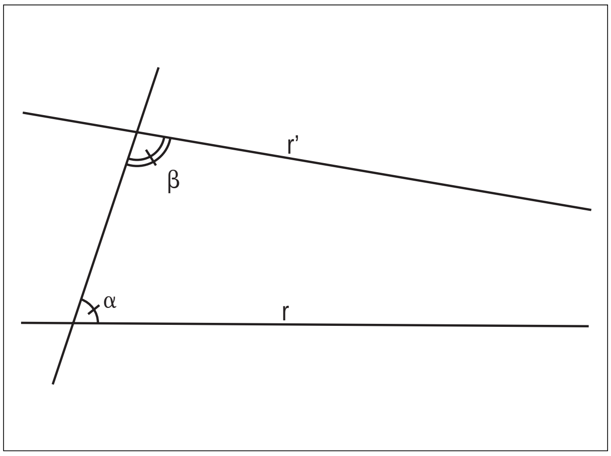
La presentazione delle geometrie non euclidee non sarà fine a se stessa, ma servirà a chiarire il significato di assioma e di sistema ipotetico-deduttivo; la dimostrazione, per via elementare, di alcune proprietà fondamentali di tali geometrie e la costruzione di idonei modelli rappresentativi potranno essere precedute, se lo si ritiene didatticamente proficuo, dalla illustrazione dei più significativi tentativi di dimostrazione del V postulato di Euclide. La riflessione critica porterà l'alunno, a conclusione dei suoi studi secondari, a sistemare assiomaticamente la geometria euclidea, ed eventualmente anche altri contesti, e quindi a recepire il concetto di teoria matematica formalizzata ed il senso delle relative problematiche metateoriche."

Argomento

Revisione della sistemazione assiomatica della geometria euclidea. Il problema del V postulato de *Gli Elementi* di Euclide ed i tentativi di dimostrazione. Introduzione alle geometrie non euclidee dal punto di vista elementare (argomenti specifici previsti nella classe quinta, indicati così come sono scritti nei programmi sperimentali di matematica del P.N.I. e Brocca).

Attività in classe ed in biblioteca con supporti tradizionali

Sono state svolte lezioni in classe con l'uso del libro di testo di geometria, attività di consultazione di libri e articoli da riviste. Inizialmente è stata presentata, in sintesi, la struttura de *Gli Elementi* di Euclide, soprattutto quella del I libro, dove sono enunciati i postulati su cui si fonda l'intera costruzione della geometria euclidea.



Il V postulato di Euclide

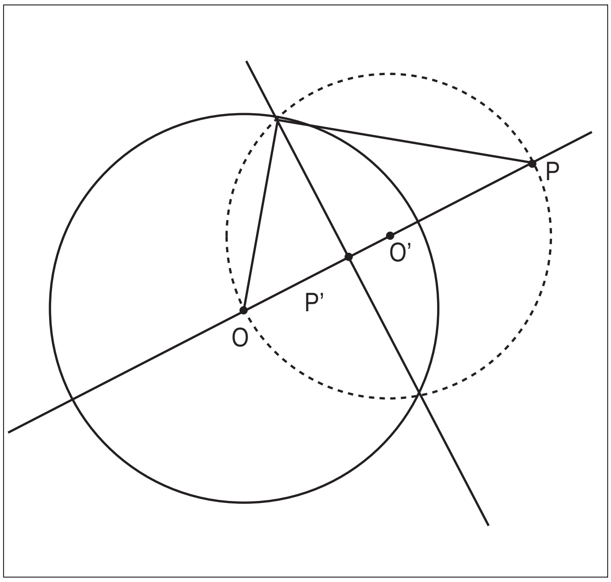
Nelle lezioni in classe ci si è soffermati in particolare sull'enunciato del V postulato di Euclide e sulle formulazioni ad esso equivalenti:
Postulato V. *Se* [*in un piano*] *una retta, intersecando altre due rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli alterni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.* (da Euclide, *Gli Elementi,* a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Utet, Torino 1970).
Questo enunciato è apparso fin dall'antichità meno evidente di quello degli altri postulati e nel corso dei secoli ha creato grandi discussioni e molti tentativi di dimostrazione, culminati in quello fatto nel 1733 da Girolamo Saccheri (1667-1733).
In questa prima parte della presentazione dell'argomento in classe sono stati particolarmente utili i seguenti testi:
-Euclide, *Gli Elementi*, Utet, Torino 1970;
-R.J. Trudeau, *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri, Torino 1991.

Sono inoltre stati consultati i seguenti libri:
-E. Agazzi, D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare,* La Scuola, Brescia 1998;
-H.M.S. Coxeter, *Non Euclidean Geometry*, Dover, New York;
-M. Dedò, *Le trasformazioni geometriche*, Decibel-Zanichelli, Padova 1996;
-R.Laubenbacher, D. Pengelley, *Mathematical Expeditions. Cronicles by the Explorers,* Springer-Verlag, New York 1999.

Attività della classe in laboratorio di informatica

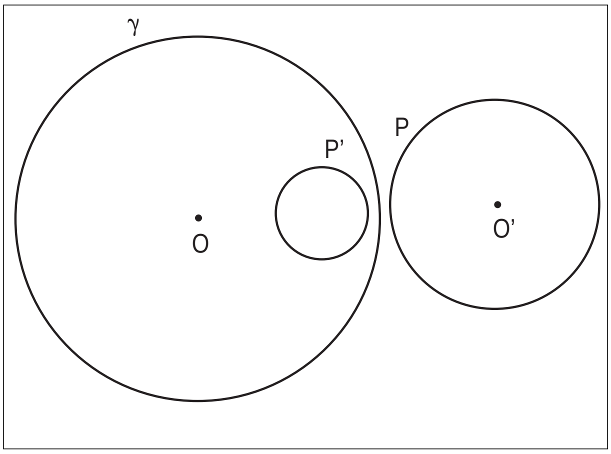
Dopo aver presentato una sintesi su *Gli Elementi* di

Euclide, e la loro struttura assiomatica, sono stati rivisti alcuni teoremi sulle tangenti e le secanti ad una circonferenza, come introduzione alla inversione circolare. Questa parte è stata studiata con l'uso di *Cabri-Géomètre II per Windows*, che nella casella degli strumenti dedicata alle trasformazioni mette a disposizione anche l'inversione circolare. L'inversione circolare è infatti particolarmente utile come introduzione allo studio del modello di geometria iperbolica che va sotto il nome di "disco di Poincaré".
L'inversione circolare fornisce inoltre un interessante esempio di trasformazione geometrica che, almeno in generale, non trasforma rette in rette. Gli studenti conoscono già le isometrie, le similitudini e le affinità, sia dal punto di vista sintetico che analitico. Nella classe quinta si può presentare, in modo elementare, anche lo studio della inversione circolare.
L'inversione circolare del piano rispetto ad una circonferenza è una generalizzazione della simmetria assiale rispetto ad una retta. Le simmetrie assiali possono essere chiamate "inversioni" del piano rispetto ad una retta, così come le inversioni circolari possono essere chiamate "riflessioni circolari", in cui si può pensare ad uno specchio circolare dove la parte riflettente sia formata dalla circonferenza (sia all'interno che all'esterno).



Costruzione dell'inverso P' del punto P;
la costruzione può essere invertita.

Con *Cabri* si possono studiare, in modo dinamico ed interattivo, le principali proprietà dell'inversione circolare. La più importante proprietà dell'inversione è quella di trasformare rette e circonferenze in circonferenze e rette. Si può inoltre scoprire che l'inversione circolare, proprio come una riflessione rispetto ad una retta, è una trasformazione che capovolge l'ordinamento su una data curva chiusa. Usando un'animazione di *Cabri* si vede ad esempio che mentre *P* descrive una circonferenza con verso antiorario, il punto *P'* descrive la circonferenza immagine con verso orario.



Inversione circolare di una circonferenza

In classe e in laboratorio di informatica, dopo lo studio delle proprietà dell'inversione circolare, è stato presentato il modello di geometria iperbolica di Poincaré, con l'uso del "menu iperbolico" messo a punto da Jean-Marie Laborde (Università di Grenoble, Francia), uno degli autori del software *Cabri-géomètre*. Per una breve introduzione a tale menu si rinvia il lettore ad un articolo pubblicato sul n. 21 del Bollettino **CABRI*RRSAE***[1].

Henri Poincaré (1854-1912)

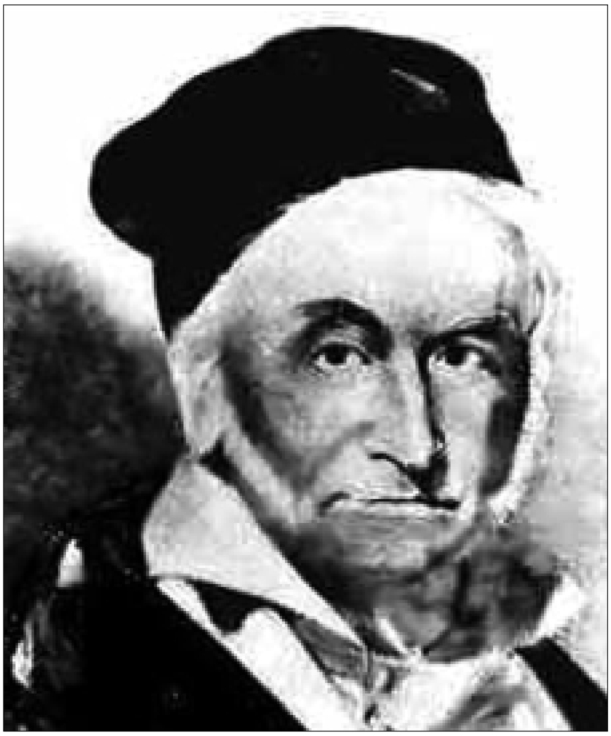
Successivamente è stato inoltre introdotto, ma in modo meno dettagliato, il modello di geometria iperbolica di Klein-Beltrami. Una barra particolare da usare con *Cabri-géomètre*, dedicata al modello di Klein-Beltrami,

L. Tomasi, *Introduzione al modello di Poincaré*, in CABRI*RRSAE* n. 21, settembre 1999

si può prelevare al seguente sito:
http://www.cabri.net/abracadabri/GeoNonE/GeoHyper/KBModele/Intro1KB.html
Il menu in francese, contenuto nel file BarreKB.men, permette un insegnamento dinamico ed interattivo di questo famoso modello di geometria iperbolica.

Attività della classe con l'uso della rete

La rete offre ormai una miriade di siti dedicati alla matematica ed al suo insegnamento. Per una recensione dei principali, si rimanda alle pagine del Prof. Giulio C. Barozzi, dell'Università di Bologna:
http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi/www_did.html
che da alcuni anni tiene aggiornato un elenco di siti di matematica di particolare interesse per la didattica della matematica e che cura anche la rubrica "Matematica in rete" sulla rivista "Archimede".
La rete, se ben usata, può essere quindi un ottimo strumento per trovare risorse didattiche per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica. Molti dei siti principali di geometria, inoltre, grazie all'uso del linguaggio Java e di particolari programmi che possono essere eseguiti in una pagina Web, detti "applet", sono costruiti in modo dinamico ed interattivo, permettendo al "navigatore", studente o insegnante, di fare esperienze di geometria impensabili fino a non molto tempo fa.
E' ormai riconosciuto, da chi si occupa di didattica della matematica, che le figure dinamiche ed interattive di geometria, grazie alla possibilità di deformazione della figura, possono favorire e motivare l'apprendimento mediante l'osservazione diretta delle proprietà invarianti di una data configurazione. In questi ultimi anni il modo di insegnare geometria sta cambiando anche grazie alla diffusione di tali sistemi di geometria dinamica (DGS = Dynamic Geometry Systems). Il più diffuso di questi software oggi nel mondo è *Cabri-géomètre*. Una versione dimostrativa di questo software può essere prelevata dalla rete al seguente sito:
http://www.ti.com/calc/docs/cabri.htm
Quasi tutti gli studenti sanno ormai usare la rete e i programmi di navigazione (browser); l'uso che ne fanno però, è a volte molto superficiale e dispersivo. L'insegnante dovrebbe insistere particolarmente sull'uso dei "motori di ricerca" e sulla verifica delle informazioni che si prelevano dalla rete.
Nella preparazione del percorso oggetto di questo articolo sono stati visitati alcuni dei siti più importanti che si occupano di geometria ed in particolare di geometria euclidea e di geometrie non euclidee. Gli studenti hanno potuto constatare la presenza in rete di moltissimi siti di geometria; l'insegnante ha segnalato agli allievi quelli più noti e di verificata qualità scientifica. In particolare ha guidato gli allievi alla consultazione di alcuni siti dedicati alla storia della matematica, a cominciare dal seguente sito:
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Non-Euclidean_geometry.html
Questo ha permesso di prelevare diversi materiali, sotto forma ipertestuale, e la raccolta di testi, immagini, biografie di matematici e materiali collegati all'argomento scelto.



Carl F. Gauss (1777-1855)

Nikolai Lobachevskj (1792-1856)

Immagini dal sito
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/

I principali siti visitati sono stati:

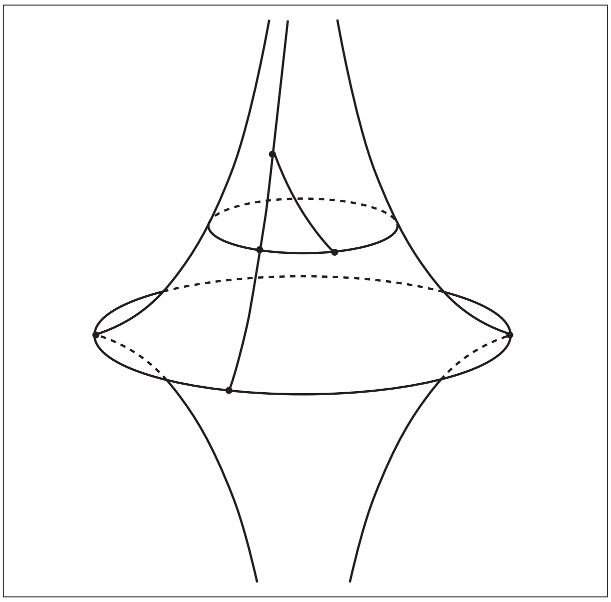
Euclid’s Elements di David E. Joyce (Clark University, Worcester, MA, USA)
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/home.html

János Bolyai (1802 – 1860)

In questo sito è sta utilizzata la bella versione on-line degli “Elementi” di Euclide, con figure interattive e dinamiche realizzate dall’autore in linguaggio Java. Joyce ha costruito un applet, chiamato “Geometry applet”, che gli ha permesso di pubblicare nel Web tutte le figure di Euclide e di renderle dinamiche.
Il “Geometry applet” è un programma Java, disponibile in rete, che è in grado di visualizzare una qualunque figura geometrica.In rete non è presente il “sorgente” - sul quale ci sono i diritti di autore - ma una versione “compilata” e resa indipendente dalla piattaforma.
Per usare questo applet l’utente deve costruire un file in linguaggio Html, che contiene i parametri da “passare” all’applet. D.Joyce ha messo in rete le istruzioni per l’uso del “geometry applet”.
Ma D.E. Joyce non si è occupato solo degli elementi di Euclide; si veda in particolare la seguente pagina:
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/poincare/poincare.html

Un sito molto interessate e ricco di materiali didattici sulle geometrie non euclidee è quello di “AbraCAdaBRI”, rivista telematica degli utilizzatori di Cabri-géomètre, presso l’IMAG di Grenoble:
http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/GeoNonE/GeoNonE.htm

In questo sito è possibile trovare delle ottime pagine sulle geometrie non euclidee, realizzate usando il software Cabri-géomètre e anche CabriJava. Il sito è in via di traduzione italiana con il contributo di diversi insegnanti e studenti di scuola secondaria superiore e dell’università al seguente indirizzo:
http://www.provvstudi.tv.it/abrait/



“Pseudosfera” di Beltrami

Bernhard Riemann (1826-1866)

Immagini dal sito
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/
Particolarmente interessante è anche il sito, dedicato alla geometria iperbolica con l’uso di Cabri-géomètre, è quello di Tim Lister:
http://mcs.open.ac.uk/tcl/nonE/nonE.html

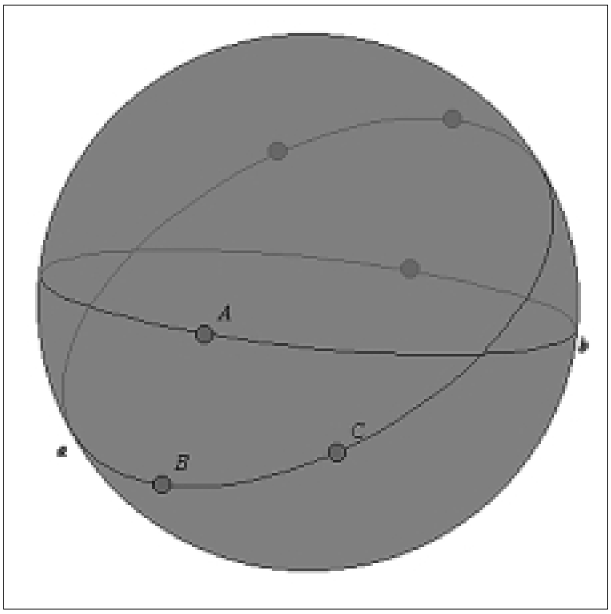
Un altro sito di geometria dinamica molto interessante (con l’uso del pacchetto software *The Geometer’s Sketchpad*) è il seguente

http://forum.swarthmore.edu/dynamic/
Anche il questo sito è possibile trovare interessanti animazioni realizzate con applet di geometria.
Completamente dedicato alle geometrie non euclidee,

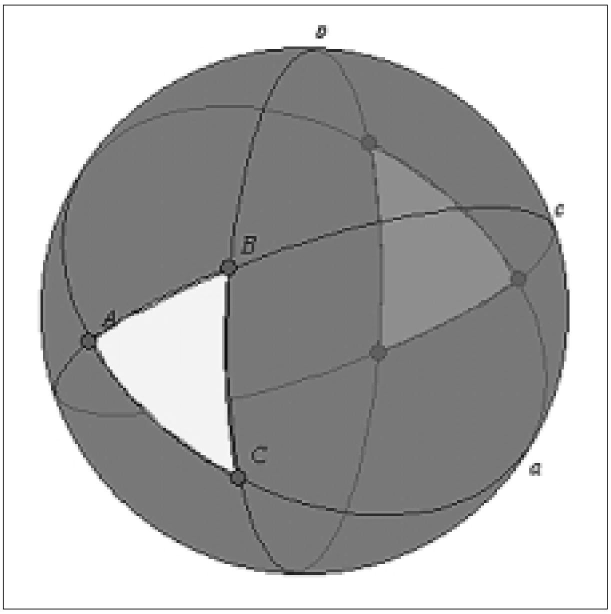
Eugenio Beltrami (1835-1899)

Felix Klein (1849-1925)

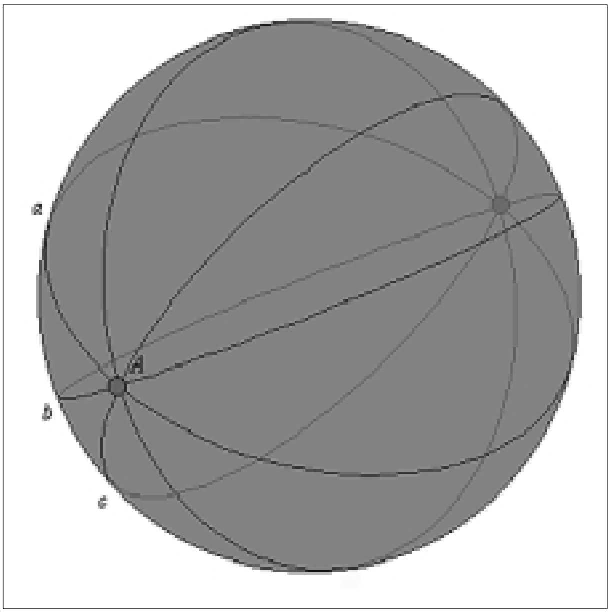
con ottime pagine utilizzabili in classe, è il sito "NonEuclid" di Joel Castellanos (Rice University, Houston, USA):
http://math.rice.edu/~joel/NonEuclid
In questo sito vi è l'illustrazione del modello di Poincaré della geometria iperbolica, con possibilità di costruire figure di geometria iperbolica, utilizzando un applet in linguaggio Java.
Una fonte inesauribile di risorse di storia, biografie, immagini è il MacTutor of History of Mathematics Archive (Università di St. Andrews, Scozia)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/
Probabilmente si tratta del miglior sito di Storia della matematica on-line, da dove si possono ricavare le biografie di centinaia di matematici e molte altre informazioni interessanti di storia della matematica. Tra l'altro c'è la possibilità di consultare e di prelevare articoli monografici di storia della matematica.
Per presentare il modello di geometria non euclidea sferica il software che con *Cabri-géomètre* si presta maggiormente è il programma *Cinderella*. In questo modello di geometria non euclidea i "punti" sono formati da coppie di punti della superficie sferica diametralmente opposti e le "rette" sono le circonferenze massime. In questo modello è facile vedere che non esistono "rette" parallele, perché due "rette" (circonferenze massime) si incontrano sempre in un "punto". Con l'uso del software *Cinderella* è stato particolarmente facile introdurre in modo dinamico tale modello. Presso l'ETH Zentrum di Zurigo, di Jürgen Richter-Gebert e Ulrich Kortenkamp, è possibile prelevare una versione dimostrativa del software di geometria *Cinderella*, un pacchetto software di geometria molto interessante e innovativo, progettato direttamente in linguaggio Java, che può servire, tra l'altro, per la costruzione di figure della geometria euclidea e non euclidea (sferica e iperbolica) pubblicabili facilmente in una pagina Web. Il software *Cinderella* permette di vedere una stessa figura geometrica in una "finestra euclidea" e contemporaneamente in una "finestra ellittica" e in una "finestra iperbolica": http://www.cinderella.de/ Per queste caratteristiche *Cinderella* è particolarmente indicato per lo studio delle geometrie non euclidee anche se, ad un primo approc



"Rette" per un "punto" sulla sfera



Due “rette” si incontrano sempre



Triangolo sulla sfera

cio, può sembrare di uso meno immediato di Cabri.
E’ stato inoltre consultato il sito dell’IRRSAE Emilia Romagna e in particolare le pagine dedicate al “Progetto Cabri-géomètre”: http://arci01.bo.cnr.it/cabri/
Quest’ultimo è il miglior sito di geometria in Italia e contiene molto materiale utile per l’insegnamento della geometria euclidea e delle geometrie non euclidee. In particolare si segnalano i seguenti quaderni direttamente collegati all’argomento delle geometrie non euclidee:
-G. Margiotta, *Introduzione alla geometria non euclidea con Cabri,* Quaderno n. 10 di **CABRI*RRSAE***, Bologna 1996;
-A. Brigaglia, G. Indovina, *Introduzione al modello di Klein-Beltrami di geometria iperbolica,* Quaderno n. 14 di **CABRI*RRSAE***, Bologna 1999.

Verifiche

Sulle attività svolte gli studenti hanno preparato una sintesi scritta del lavoro, in forma ipertestuale. Tali materiali sono stati poi presentati all’esame di Stato come approfondimento degli studenti e della classe. Al termine dell’unità didattica l’insegnante ha costruito una prova strutturata di verifica, sotto forma di questionario con risposte chiuse o a breve risposta aperta.

Conclusioni

La rete, se usata opportunamente e al di là delle mode contingenti, può almeno in parte sostituire la consultazione di libri o riviste, data la vastità di risorse e di siti, di buon livello scientifico, che ormai è possibile trovare in linea. Esistono siti di matematica ed in particolare di geometria, ad esempio quelli citati in precedenza, che sono ben curati e di livello almeno equivalente a molti dei libri di storia della matematica reperibili in una normale biblioteca scolastica, con la possibilità di prelevare molto materiale su tutti i principali temi della matematica e della sua storia.
Il vantaggio della rete è comunque l’organizzazione ipertestuale e la presenza di immagini, animazioni e, di fondamentale importanza nello studio della matematica, l’interattività. Nonostante questi indubbi pregi della rete rispetto ai testi e alle lezioni normali, si ritiene comunque che l’intervento dell’insegnante risulti fondamentale e decisivo in tutte le fasi del lavoro, nella scelta dei siti da consultare e soprattutto per l’analisi e la selezione dei materiali trovati in rete. Gli allievi hanno bisogno di essere guidati per evitare la dispersione ed il sovraccarico di informazioni, a volte non pertinenti, che si possono trovare in rete. E’ quindi importante che il docente - o un gruppo di docenti - abbia controllato la validità scientifica dei siti e abbia fatto uno studio preliminare di quelli che sono più validi dal punto di vista didattico. Si badi bene che queste considerazioni non sono dovute al desiderio di censurare gli studenti nell’uso della rete - anche se in alcuni casi occorre purtroppo intervenire in tal senso - ma di dare una organizzazione didattica efficace all’uso della rete.
Occorre infine un controllo puntuale dei tempi di lavoro in classe ed è quindi opportuno costruire delle mappe - sotto forma di schede strutturate, questionari, ecc. - per la “visita guidata” dei siti da assegnare agli allievi, in modo da sapere cosa cercare e quali materiali prelevare dalla rete, fermo restando che negli allievi si vuole sviluppare soprattutto la capacità di utilizzare ed organizzare i materiali recuperati dalla rete.

Nota:
Questo articolo è stato pubblicato il 25 gennaio 2000, in una forma leggermente diversa e più adatta al Web, nella rivista telematica della Regione Emilia Romagna: “Scuola ER”:

LA RECENSIONE DEL MESE

Alcuni siti su CabriJava

di ***Luigi Tomasi,*** e-mail: *luigi.tomasi@libero.it*

CabriJava è un'applicazione (un "applet"), scritta in linguaggio Java, che permette di pubblicare facilmente nel web una figura costruita con Cabri, conservandone la dinamicità e la possibilità di manipolazione. E' opportuno osservare che per usare CabriJava non occorre conoscere il linguaggio Java! Questa applicazione può quindi essere utile agli insegnanti e agli studenti che vogliono pubblicare in rete le loro figure prodotte con Cabri, ad esempio nel sito della loro scuola, o anche per costruire degli ipertesti di geometria da mettere su un cd-rom o in Internet. CabriJava è quindi uno strumento che completa Cabri ed è un eccellente supporto per il Web.

http://poncelet.math.nthu.edu.tw/
CabriJava è stato sviluppato da **Gilles Kuntz**, che fa parte dell'equipe di Cabri ed è docente di informatica all'Università di Grenoble.
Gli obiettivi del Progetto Cabri Java sono i seguenti:

- portare le figure costruite con Cabri-géomètre, con la loro interattività, nelle pagine Web
- costruire uno strumento facile da usare e ben integrato nei programmi di navigazione più diffusi (Internet Explorer, Netscape,...)
- fornire uno strumento facile da istallare senza costo supplementare
- fornire uno strumento che permetta, in una pagina web, una interazione ricca con le figure geometriche, assimilabile a quella che si ha con una figura di Cabri-géomètre.

Si riportano di seguito alcuni collegamenti a siti particolarmente interessanti che fanno uso di CabriJava.

Siti su CabriJava

Il sito ufficiale, curato da Gilles Kuntz, del Progetto CabriJava presso l'IMAG di Grenoble è il seguente:
http://www.cabri.net/cabrijava
Da questo sito si può prelevare l'applet CabriJava. In esso ci sono degli esempi di figure create usando CabriJava.
Altre figure si possono trovare anche nel sito dedicato agli utilizzatori di CabriJava:
http://cabrijava.free.fr
Si possono inoltre visitare le pagine dedicate a CabriWeb, un'applicazione creata da Gilles Kuntz, in Java, che permette di trasformare automaticamente, senza sapere nulla del linguaggio HTML, una figura di Cabri in un applet:
http://www.cabri.net/cabrijava/CabriWeb.html

Alcuni siti Web che utilizzano CabriJava

AbraJava: è una sezione, molto vasta, del sito "abraCAdaBRI", indubbiamente uno dei più bei siti dedicati a Cabri, ricchissimo di materiali, adatti agli insegnanti. Il sito è in via di traduzione italiana:
http://www.cabri.net/abracadabri/abraJava/IntroCJava.html
Sito di **Genevieve Tulloue**, dedicato alla geometria, a fisica, astronomia; sono particolarmente notevoli le applicazioni della geometria alle rotazioni di un cubo rispetto ad un qualunque asse e quelle dedicate alla cristallografia e alle coordinate geografiche sulla sfera:
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/index.html
Sito a cura di **Jean-Marie Laugier** dedicato a Ottica Meccanica Elettromagnetismo:
http://www.up.univ-mrs.fr/~laugierj/CabriJava/
Sito di **Yves Cortial** "Cabri en Physique":
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/cortial/bibliohtml/biblgene.html
Sito di **Thérèse Eveilleau**; è un sito molto affascinante, premiato in Francia come uno dei più bei siti dedicati alla matematica; se ne raccomanda la visita:
http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau
Particolarmente interessante, per gli insegnanti, è anche la visita al sito di **José Antonio Mora** di Alicante, Spagna, dedicato alla "Geometria dei meccanismi articolati" e alla geometria analitica:
http://teleline.terra.es/personal/joseantm/
In Gran Bretagna si raccomanda la visita al sito:
"The Wilson's pages", dedicato alle coniche, alla dualità in geometria proiettiva e inversione circolare:
http://www.maths.gla.ac.uk/~wilson/cabripages/cabrijava.html
e quello di **Tim Lister** dedicato alla geometria iperbolica:
http://mcs.open.ac.uk/tcl2/nonE/nonE.html
Tutti i siti citati in questa recensione si trovano elencati - per evitare di trascriverli! - nella seguente pagina presso l'IRRE Emilia Romagna, all'indirizzo:
http://arci01.bo.arci.it/cabri/cabrijava/