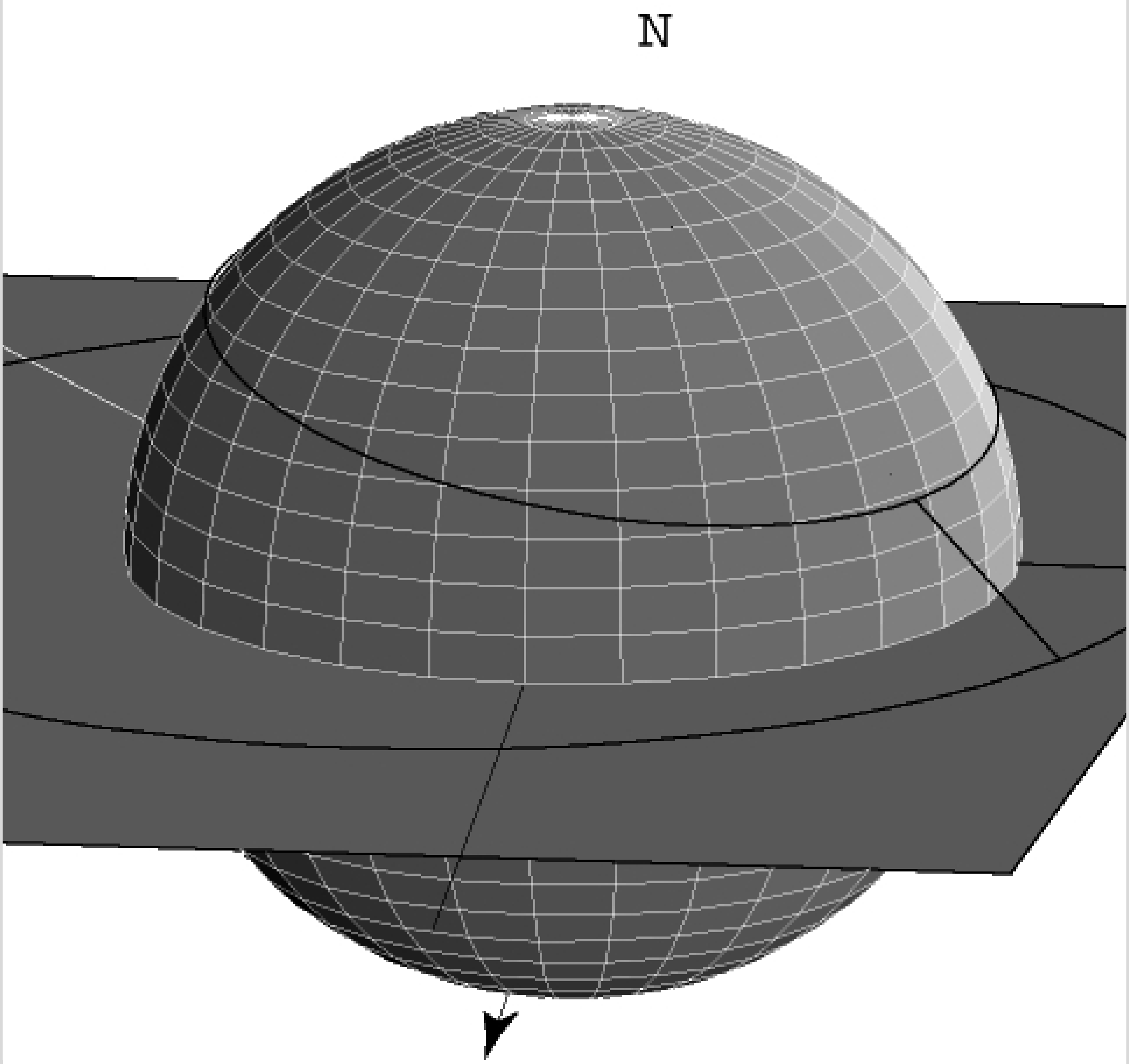
CABRIRRSAE 2000

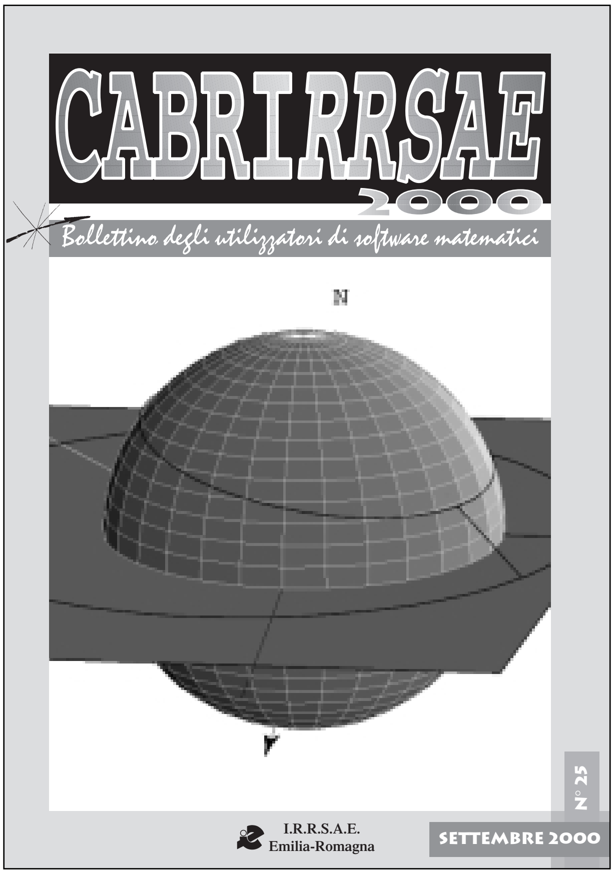
Bollettino degli utilizzatori di software matematici



N° 25

OTTOBRE 2000

I.R.R.S.A.E.
Emilia-Romagna



L'immagine

La figura, realizzata con Mathematica, illustra la rappresentazione stereografica dei numeri complessi. Le circonferenze tracciate sulla sfera vengono proiettate, a partire dal polo Nord, in circonferenze tracciate sul piano equatoriale che rappresenta il piano complesso.

Cabri informa

Si consiglia di visitare il sito ministeriale, relativo alla nuova struttura della prova scritta di matematica dell'esame di stato, all'indirizzo
http://www.istruzione.it/news/2000/nes00_01_matematica.htm
Dopo aver esposto i motivi che inducono ad una ristrutturazione della prova, il Ministero propone due esempi di cui uno all'indirizzo prima riportato, l'altro all'indirizzo:
http://www.istruzione.it/news/2000/nes00_01_matematica_esempio2.doc
Gli iscritti alla lista di discussione Cabrinews, gestita dall'IRRSAE Emilia Romagna, hanno avviato un dibattito sull'argomento.
Ricordiamo a quanti volessero partecipare a questo e ad altri eventuali dibattiti che, per iscriversi alla lista è sufficiente inviare un messaggio senza soggetto all'indirizzo:
listserv@arci01.bo.cnr.it, scrivendo: subscribe cabrinews.

Indirizzo

Bollettino CABRIRRSAE 2000
IRRSAE-Emilia Romagna
Via Ugo Bassi, 7 - 40121 Bologna
Tel. (051)22.76.69 - Fax (051)26.92.21
E-mail: cabri@arci01.bo.cnr.it
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/
Gruppo di discussione:
E-mail: cabrinews@arci01.bo.cnr.it

Fardiconto:
http://arci01.bo.cnr.it/fardiconto/
Flatlandia:
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/

La versione elettronica del bollettino è consultabile a questo indirizzo:
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/rivista.html

Supplemento al n.4 Luglio Agosto 2000, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento educativi dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24 - 10 - 1980. Direttore resp. Davide Ferrari, proprietà IRRSAE/ER.

Progettazione grafica e videoimpaginazione GRAPHICART
Via Fondazza, 37 - 40125 Bologna
Tel. Seg. Fax 051 30.70.73 - Tel. Seg. Modem 051 42.920.47

Sommario

In questo numero

Nella sezione ***Cabri discusso*** riportiamo un lungo e acceso dibattito, intercorso fra gli iscritti alla lista di discussione Cabrinews, sul ruolo della dimostrazione e in generale della Matematica nella Scuola Secondaria.
Nella sezione ***Come fare*** riportiamo, per la scuola superiore, una risoluzione con Cabri di una costruzione "riga e compasso" inerente fasci di circonferenze; segue la presentazione di una unità didattica sperimentata in classe nell'ambito di un Corso di Perfezionamento.

Corsi e seminari

■ Nei giorni 20 - 21 - 22 Ottobre 2000 , a Montesilvano (PE), si è tenuto il 2° Congresso Nazionale ADT (Associazione Nazionale per la Didattica con le Tecnologie) dedicato a **Matematica e Scienze Sperimentali nella Scuola Riformata: cosa cambia con le Nuove Tecnologie.**
Si sono tenute conferenze generali al mattino e, nei pomeriggi di Venerdì e Sabato, numerose comunicazioni che testimoniano il crescente interesse dei docenti verso l'uso di calcolatrici e computer nella didattica della matematica e delle scienze.
■ A Bologna, dal 12 Ottobre al 3 Dicembre 2000, presso l'Aula Magna della Biblioteca Universitaria, via Zamboni 35, si tiene la Mostra ***Matematica, Arte e Tecnologia: da Escher alla Computer Graphics***.
La Mostra è organizzata dal Dipartimento di Matematica della Università di Bologna che, in occasione dell'*Anno Mondiale della Matematica* e di *Bologna 2000 Capitale Europea della Cultura*, intende portare al di fuori della ristretta cerchia degli addetti ai lavori i legami tra Matematica e Arte. L'ingresso alla Mostra è gratuito, l'orario di apertura è dalle 10.00 alle 18.00 e, il Sabato, dalle 10.00 alle 13.00. Sono previste aperture straordinarie. Per informazioni rivolgersi alla Segreteria Scientifica del Dipartimento di Matematica,
Piazza di Porta S. Donato 5 - 40126 Bologna -
tel. 051 209485 - fax 051 2094499
bologna2000@dm.unibo.it
http://www.dm.unibo.it/bologna2000/
■ Il Dipartimento di Matematica della Università di Bologna, sempre nell'ambito delle manifestazioni per l'anno 2000, organizza inoltre una Rassegna Cinematografica ***Matematica e Cinema***, dal 19 ottobre al 7 Dicembre 2000, ogni Giovedì alle ore 21.00 presso la Sala Mascarella, via Mascarella 44 - 40126 Bologna. L'ingresso è gratuito. Per informazioni rivolgersi agli indirizzi e numeri prima riportati.

Cabri in biblioteca

Segnaliamo l'uscita di due volumetti della serie dei Quaderni della Direzione Classica del MPI, Documenti di lavoro relativi al 5° Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica per docenti delle scuole medie superiori (il n. 35) e per i docenti della scuola elementare (il n. 36), svoltosi a Viareggio (novembre 1998 e febbraio 1999):

GEOMETRIA E MULTIMEDIALITA', M.P.I. - U.M.I. (Unione Matematica Italiana), Quaderno n. 35 (per le Scuole Superiori), Liceo Scientifico "Vallisneri", Lucca 2000;

GEOMETRIA E MULTIMEDIALITA', M.P.I. - U.M.I. (Unione Matematica Italiana), Quaderno n. 36 (Istruzione Elementare), Liceo Scientifico "Vallisneri", Lucca 2000.

La notizia è riportata sul sito del Liceo Scientifico "Vallisneri":
http://www.liceo-vallisneri.lu.it/testi.htm

Inviateci i vostri articoli

CABRI*RRSAE* pubblica contributi relativi all'utilizzo del pacchetto Cabri-géomètre e di altri software matematici, con particolare attenzione alla valenza didattica e all'inserimento nel curricolo scolastico.
Ogni articolo (non più di 4 cartelle) deve pervenire, su supporto magnetico e cartaceo, ad uno degli indirizzi indicati in copertina, rispettando le seguenti modalità:

• *SUPPORTO CARTACEO*
- testo e figure devono essere impaginate secondo le intenzioni dell'autore (anche in bassa qualità di stampa)
- una stampata delle sole figure ***in alta qualità di stampa***
- una stampata dei grafici ***in alta qualità di stampa***
- anche le immagini catturate dallo schermo devono essere accompagnate da una stampata ***in alta qualità***

• *SUPPORTO MAGNETICO*
- il file di *testo* in ***formato Word*** (estensione .doc, meglio sarebbe se fosse .mcw) non deve contenere le figure che invece devono essere collocate in un file a parte.
- altri materiali (tabelle, grafici, ecc.) devono pervenire in formato originale, con indicazione dell'applicativo che le ha generate, comunque sempre accompagnate da una stampata di alta qualità.
- altre immagini (tipo quelle tridimensionali) generate da qualunque programma, devono essere esportate come prodotti vettoriali, cioè con estensione A.I.
Il materiale inviato non sarà restituito.

Siamo ugualmente interessati a ricevere materiali più articolati sull'utilizzo di Cabri; tali materiali possono essere diffusi mediante la collana "Quaderni di **CABRI***RRSAE* ".

Cabri discusso

Da Cabrinews

Discussione on line, 04-24 Giugno 2000

a cura della redazione

In seguito ad una segnalazione giunta alla lista di discussione Cabrinews, che riguarda un articolo di Lucio Russo sulla graduale scomparsa del metodo dimostrativo nella scuola secondaria, è scaturito un dibattito fra alcuni iscritti alla lista, che, come già fatto in precedenza, riteniamo utile riportare all'attenzione dei nostri lettori.

04 Giugno 2000 Segnalazione
di Valerio Mezzogori
Vi segnalo, sul domenicale de "IL SOLE-24 ORE" di oggi (4 giugno 2000) l'articolo di Lucio Russo "Requiem per la dimostrazione. Perché i nuovi metodi di insegnamento incrementano l'analfabetismo scientifico". Da domani l'articolo sarà consultabile in rete al seguente indirizzo:
www.ilsole24ore.it/cultura/domenica

18 Giugno 2000 Risposta alla segnalazione (Abbasso Hilbert)
di Consolato Pellegrino
Sono andato a leggere su "IL SOLE-24 ORE", del 4 giugno 2000, l'articolo segnalato da Valerio Mezzogori. L'ho trovato interessante anche perché si inserisce bene sul tema "Abbasso Hilbert" che è stato trattato da alcuni aderenti a Cabrinews. Lo riporto più sotto per coloro che non hanno avuto la possibilità di leggerlo (**Allegato 1**).

19 Giugno 2000 Altra segnalazione (Punti critici)
di Margherita Dini
A proposito dell'interessante articolo di Lucio Russo sull'analfabetismo scientifico, segnalato dal Prof. Mezzogori e riportato dal Prof. Pellegrino, vi segnalo la "Presentazione" della rivista PUNTI CRITICI (www.hortusconclusus.it), indicata, tempo fa, dal Prof. Pontorno. Mi pare che gli autori facciano un'analisi molto attenta della politica culturale del nostro paese sulla quale, viste le riforme in atto nella scuola, occorre veramente riflettere.

19 giugno 2000 Intervento sulla prima segnalazione (Lucio Russo: Abbasso o Viva Hilbert?)
di Paolo Bonavoglia
Avevo già letto l'articolo di Russo e vi avevo ritrovato temi già ampiamente trattati nel suo "Segmenti e bastoncini" (ed. Feltrinelli 1998) che immagino molti listaioli avranno già letto; a chi non lo conoscesse, raccomando caldamente la lettura di questo libro.
Devo dire che di fronte alle idee e ai lamenti di Russo provo sentimenti contrastanti: sulla questione del metodo dimostrativo sono pienamente d'accordo tanto che da alcuni anni sto reintroducendo in dosi sempre maggiori la geometria euclidea, insistendo molto proprio su dimostrazioni e su problemi. Impresa faticosa e dai risultati alterni, ma credo valga la pena di insistere. Una cosa che ancora non ho capito è se Cabri sia effettivamente utile a questo scopo, come sostiene Russo; quest'anno ho fatto alcune prove, probabilmente avrò sbagliato qualcosa, ma non mi pare che Cabri dia significativi aiuti in questa direzione (mi aspetto qualche replica... non dovrebbe essere questo il tema principale di questa lista?) Dove invece non riesco a sentirmi in sintonia con Russo è sulla questione "Numeri reali"; innanzitutto qui la posizione di Russo non mi pare affatto in sintonia con quell'Abbasso Hilbert che è risuonato tempo fa su questa lista, ma anzi mi pare equivalga a un opposto "Viva Hilbert, viva il rigore ..."
Io da anni insegno in prima Liceo classico la definizione di numero reale secondo Dedekind: i ragazzi fanno molta fatica ad assimilarla e molta poca fatica a dimenticarla subito dopo. Quando in 3° Liceo si arriva alla definizione di limite alla Weierstrass si deve ricominciare tutto da capo. La verità è che queste cose mi sembrano un po' corpi estranei nei programmi delle superiori, nel senso che sono nozioni che non vengono poi mai usate o messe in pratica con il risultato appunto che vengono facilmente dimenticate. Mi sto convincendo che sono argomenti che si potrebbero benissimo tagliare dai programmi delle superiori (ovvero ridurre a un livello puramente intuitivo, introducendo metodi numerici come quello della secante o la formula di Simpson che mi paiono ottimi per farsi un'idea intuitiva di numero reale). Non ci vedrei niente di scandaloso se venissero rimandati all'Università riservandoli a chi fa studi scientifici. Qui emerge un'altra ancor più basilare dissonanza con l'impostazione di Russo: anche lui, come tanti altri, tende a vedere i programmi di Matematica delle superiori esclusivamente come preparazione alle facoltà Matematiche-Scientifiche (anche il recente Syllabus dell'UMI era impostato secondo questa logica). Io credo invece che sarebbe ora di pensare i programmi di Matematica anche in funzione degli studenti che non faranno studi matematico-scientifici, ai futuri avvocati, giornalisti, impiegati ecc. Il risultato dell'impostazione tradizionale è che abbiamo generazioni di avvocati, giornalisti... che pensano che la matematica consista solo nel manipolare misteriose ed insensate espressioni algebriche o trigonometriche e che hanno

poi conoscenze nulle o peggio ancora erronee su cose come probabilità, statistica, logica (che sono pur sempre matematica).
Che senso ha allora insegnare a un futuro avvocato o giornalista la definizione di numero reale di Dedekind e non insegnargli neanche i rudimenti della probabilità e della statistica? E' anche in questo senso che posso condividere il recente "Abbasso Hilbert!"

19 Giugno 2000 Commento (Abbasso o Viva Hilbert?)
di Consolato Pellegrino
L'intervento, interessante e ricco, di Paolo Bonavoglia merita di essere ripreso ed approfondito.
Sistemate alcune emergenze, vedrò di fare la mia parte.
Per chi non lo sapesse, faccio presente che Lucio Russo è ordinario di Probabilità.

20 Giugno 2000 Risposta a Paolo Bonavoglia
di Luigi Tomasi
A proposito dell'intervento di Paolo Bonavoglia, prima di tutto sono contrario a chiamare "listaioli" gli iscritti alla Lista; è una mancanza di etichetta!
Venendo alle cose sostanziali e a quello che scrive Lucio Russo, penso che in ogni periodo capita che ci siano "nostalgici" e conservatori. Lucio Russo è senz'altro un nostalgico della scuola di un tempo (più esattamente del Liceo Classico di Gentile) quando andava a scuola una piccolissima percentuale degli italiani. Ora la vera sfida, come dice anche Paolo Bonavoglia, è quella di insegnare matematica a tutti (perfino... negli istituti professionali) e non solo ai pochi eletti che studiavano un tempo; il problema è tutto qui! Altrimenti occorre dire che la matematica è adatta solo a chi fa il liceo, ma questo mi sembra un po' difficile da sostenere. Finora un certo tipo di insegnamento, "formalista e rigoroso", ha tenuto lontani molti allievi dalla matematica e l'ha fatta odiare. Con la scusa della necessità di introdurre subito (il primo giorno di scuola media superiore) le dimostrazioni, volendo introdurre i numeri reali con il metodo delle sezioni nel campo dei numeri razionali (un metodo adatto a studenti universitari di matematica e agli insegnanti di matematica, propinato a chi deve ancora capire che cosa è un numero!). O imponendo la definizione epsilon-delta di limite. Riguardo all'uso di Cabri nell'insegnamento della geometria, come introduzione alla dimostrazione, non sono assolutamente d'accordo con quanto dice Paolo Bonavoglia. Ogni software, anche il più bello (come è certamente Cabri), deve essere usato dall'insegnante in modo molto preciso, con piena chiarezza di quel che si vuol fare. Certamente, se si vuole ridurre l'impatto negativo della introduzione precoce (e assolutista) della dimostrazione nel biennio, costruendo invece un percorso graduale verso la dimostrazione, l'uso di Cabri non può che essere consigliato! Vorrei infine proporre di cambiare il "subject" dei messaggi: invece di "Abbasso Hilbert!" propongo "Abbasso Dieudonné! ".

21 Giugno 2000 Commento (Abbasso Mister X)
di Consolato Pellegrino
Anche il contributo di Luigi Tomasi è ricco e stimolante e comincia a toccare punti importanti e difficili quali:
- cosa è (o deve essere) la Scuola?
- a chi ed a cosa deve servire?
Certamente deve servire al cittadino. Ma basta? Deve essere indifferenziata? ....
>*Vorrei infine proporre di cambiare il "subject" dei messaggi: invece di "Abbasso Hilbert!" propongo "Abbasso Dieudonné! "*.<
Condivido l'idea di cambiare nome al "subject". Io toglierei anche l'"Abbasso". Se si preferisce lasciarlo proporrei: "Abbasso Mister X".

21 Giugno 2000 Risposta a Luigi Tomasi (etichetta e uso di Cabri)
di Paolo Bonavoglia
>*…sono contrario a chiamare "listatoli" gli iscritti…*<
Chiedo scusa. Questo termine "listaiolo" viene usato correntemente su altre liste a cui sono iscritto e non ricordo che nessuno abbia mai avuto da eccepire. Non ci vedo nulla di offensivo o di sgradevole salvo forse l'assonanza con "pizzaiolo". Si vede che come nel mondo reale anche in quello virtuale l'etichetta cambia quando si passa di là dal fiume...
> *Riguardo all'uso di Cabri nell'insegnamento della geometria …*<
Forse mi sono spiegato male. La mia non era affatto una critica a Cabri, ma semmai una domanda. Ho cominciato a usare Cabri solo nell'ultimo anno scolastico in quarta ginnasio (primo anno) del liceo classico.
Formidabile come lavagna elettronica in combinazione con un video-proiettore. È utilissimo per illustrare simmetrie assiali e centrali, per esempio. I problemi sono insorti quando si è passati alla sperimentazione diretta da parte degli allievi. Mancando un libro di testo che spieghi in dettaglio tante piccole banali questioni (come si fa a mettere un nome a un punto, come si fa a tracciare la bisettrice ...) ho dovuto perderci molto tempo in prima persona; arrivati poi a fine anno a tentare qualche problema con dimostrazione ho provato ad usare ancora Cabri come supporto ma non sono riuscito a ricavarne sensibili vantaggi. Del resto quella di Tomasi la vedo come una risposta alla mia domanda: Cabri serve come preparazione alla geometria assiomatico-deduttiva, non come supporto alla medesima.

22 Giugno 2000 Altro contributo alla discussione (Viva la geometria?)
Di Luigi Monica
Alcuni argomenti che discuto sono trattati nell'intervento di Tomasi che ho appena letto. Invio comunque anche il mio contributo alla discussione sull'argomento perché

mi sembra particolarmente interessante. Le teorie di Lucio Russo, che preferisco peraltro in “La rivoluzione dimenticata” piuttosto che in “Segmenti e Bastoncini”, sono abbastanza note e l’autore le porta avanti in modo piuttosto deciso già da qualche anno. Come non essere d’accordo almeno a livello teorico?
Nella pratica la nostra scuola superiore è però una realtà particolarmente diversificata ed eterogenea. Ritengo che gli obbiettivi e i metodi dell’insegnamento della matematica di un liceo, di una scuola tecnica o di una scuola professionale dovrebbero essere (anche se i libri di testo e i programmi sono praticamente identici) molto diversi tra di loro. Pertanto quello che vale per i licei non è detto che debba necessariamente valere per le altre. Noi insegnanti, inoltre, dobbiamo fare i conti con la realtà di una scuola in continua evoluzione, dove i ragazzi cambiano di anno in anno mettendoci davanti a situazioni sempre diverse. Le considerazioni che faccio riguardano pertanto la mia realtà scolastica: la sezione sperimentale di un Istituto per Geometri di una città del nord Italia. Ovviamente una realtà molto diversa da quella di Bonavoglia che mi sembra di capire insegni in un triennio di liceo classico. Condivido comunque gran parte dell’intervento di Bonavoglia sia per quanto riguarda la geometria euclidea che per quanto riguarda i numeri reali. Anch’io nei miei programmi ho da qualche anno reintrodotto l’insegnamento della geometria euclidea in modo piuttosto massiccio perché mi sembra che il suo valore formativo e culturale sia insostituibile. Mi sembra poi normale che si incontrino difficoltà e che non tutti gli studenti l’affrontino con gli stessi risultati. Meglio comunque essere elastici piuttosto che costringere ragazzi a memorizzare le dimostrazioni di teoremi (come peraltro avviene ancora in certe scuole).
Quali sono i risultati conseguiti con questa mia esperienza? Anzitutto gli studenti si abituano

- ad un ragionamento rigoroso: fissare delle premesse e trarne delle conseguenze attraverso passaggi logici
- ad usare un linguaggio rigoroso e preciso.

(Questi mi sembrano obiettivi trasversali fondamentali, che non vengono invece conseguiti con l’insegnamento del calcolo algebrico). Inoltre l’aspetto storico culturale nel quale la geometria euclidea ha avuto origine non mi sembra secondario e merita di essere recuperato anche in scuole di carattere tecnico. A proposito non vi sembra sempre più importante ed attuale, ora che le macchine ci aiutano a perdere un po’ meno tempo nei calcoli, un recupero della storia del pensiero matematico e scientifico in genere e del valore culturale della materia? (Qui ritorniamo al Lucio Russo e alla sua Rivoluzione dimenticata). Per quanto riguarda l’uso di Cabri, devo anzitutto tranquillizzare Bonavoglia: l’amore di Lucio Russo per questo programma o per altri (come è chiaramente emerso anche dal suo intervento al convegno di Salsomaggiore) è piuttosto scarso. Anzi penso lo ritenga uno strumento del tutto dannoso.
Il programma Cabri-géomètre mi ha permesso di recuperare l’insegnamento della geometria che avevo quasi del tutto eliminata. Personalmente lavoro con Cabri dal suo primo apparire e lo uso nelle mie classi (prime e seconde principalmente) da parecchi anni. Gli studenti lavorano con passione. Si abituano a vedere e a controllare quello che fanno e discutono di geometria e di costruzioni geometriche. La dimostrazione viene dopo, molto dopo. Si “perde” senz’altro anche molto tempo, ma alla fine del primo anno di scuola molti studenti sono in grado di affrontare dimostrazioni (semplici) in modo rigoroso e senza traumi.

22 Giugno 2000 Risposta a Paolo Bonavoglia (numeri reali)

di Lucio Russo

Avendo letto le osservazioni del professor Bonavoglia, mi sono reso conto di non essere stato abbastanza chiaro su alcuni punti. Sulla questione “numeri reali” io non volevo affatto sostenere che tutti debbano necessariamente imparare la definizione di Dedekind (o equivalenti). Tutt’altro! Se si studia la geometria euclidea, il modo più naturale per introdurre il concetto di numero reale è certamente quello di considerare rapporti tra segmenti (o altre grandezze omogenee) e notare che a volte i segmenti sono incommensurabili. A questo punto vi sono varie possibilità: o si afferma che, ad esempio, la diagonale di un quadrato deve necessariamente avere un rapporto con il lato (basando così l’esistenza dei numeri reali su un’intuizione geometrica), oppure si introduce la teoria euclidea delle proporzioni (che a me sembra bella e difficile), oppure ancora si introducono le definizioni moderne di numero reale (Dedekind, Weierstrass, ...). Supponiamo di aver fatto la prima scelta. Supponiamo cioè di avere introdotto su base puramente intuitiva i rapporti tra grandezze incommensurabili. La struttura dimostrativa degli altri argomenti della geometria non viene in alcun modo scalfita da questa scelta. Inoltre la geometria sintetica fornisce solidità all’introduzione intuitiva. Se invece rinunciamo ad una definizione rigorosa di numero reale decidendo, allo stesso tempo, di sostituire la geometria sintetica con quella analitica (basando cioè anche i concetti di retta e piano sul concetto intuitivo di numero reale, sul quale non abbiamo postulati) è chiaro che miniamo alla base la struttura dimostrativa della geometria.
Tutto l’argomento esposto in “Segmenti e bastoncini” voleva essere un invito a non trascurare la geometria sintetica. Spero di essere stato chiaro.
Secondo problema (accennato nell’articoletto su il Sole-24 Ore). A chi e quando bisogna insegnare la definizione di numero reale? Ad esempio: un professore di matematica dovrebbe conoscerla, oppure no? Io propenderei per il si. Temo invece che nei prossimi anni si deciderà, contemporaneamente, di:

1. Eliminare la definizione rigorosa di numero reale da

tutti i licei.
2. Sostituire i corsi di analisi matematica per la laurea triennale in matematica con corsi di Calculus basati su una nozione “intuitiva” di numero reale.
3. Formare i professori di matematica aggiungendo al primo triennio di laurea vari corsi su diversi argomenti (soprattutto psico-pedagogici), ma nessun nuovo corso di analisi.
Il risultato potrebbe essere che nessun professore di matematica saprà più cos’è un numero reale.
In questa situazione vi sono varie opzioni possibili. Io propenderei per conservare la definizione di numero reale in alcuni indirizzi della scuola secondaria, ma sono perfettamente d’accordo sul fatto che conservare il metodo dimostrativo è estremamente più importante. Qualche osservazione su questo argomento è in un mio articolo uscito su Iter (**Allegato 2**).
Altro problema. Secondo il prof. Bonavoglia, io sarei portato a pensare alla scuola secondaria essenzialmente come preparazione alle facoltà tecnico-scientifiche, condividendo un’impostazione tradizionale, il cui risultato sarebbe (cito le sue parole):
>*… che abbiamo generazioni di avvocati, giornalisti ... che pensano che la matematica consista solo nel manipolare misteriose ed insensate espressioni algebriche o trigonometriche e che hanno poi conoscenze nulle o peggio ancora erronee su cose come probabilità, statistica, logica che sono pur sempre matematica.*<
Sinceramente non riesco a capire. Mi sembra che ridurre la matematica a manipolazioni di espressioni algebriche o trigonometriche sia un misero risultato per chiunque, ma sia particolarmente grave proprio per chi avrebbe dovuto avviarsi a studi scientifici. Non capisco come mai questo maltrattamento della matematica potrebbe essere il frutto di un eccessivo concentrarsi sulla preparazione dei futuri scienziati. Sono comunque d’accordo sul fatto che andrebbero riformati i programmi, riducendo il peso delle manipolazioni algebriche e trigonometriche. Su cosa inserire abbiamo probabilmente idee diverse. Ad esempio io sarei molto cauto con la logica. Credo che la logica vada insegnata nei fatti, in particolare attraverso la geometria. La logica formale mi sembra invece una disciplina molto più astratta della teoria di Dedekind dei numeri reali. Quanto al calcolo delle probabilità il problema è come insegnarlo. Nei libri per le scuole secondarie mi sembra che spesso si oscilli tra una presentazione formale (basata sugli assiomi di Kolmogorov) e l’esposizione di procedure da seguire per effettuare statistiche, prive di giustificazione razionale. Naturalmente si potrebbero introdurre molti altri argomenti. Mi sembra che in ogni caso sia importante farlo con il metodo giusto, in particolare conservando allo stesso tempo il rapporto con l’applicazione concreta e la razionalità delle argomentazioni. Credo che da questo punto di vista l’antica geometria fornisca un modello che andrebbe imitato nei nuovi settori. Ultima osservazione su Cabri. Io, non avendo esperienza nelle scuole secondarie, non sono in grado di giudicare la reale efficacia didattica di Cabri. Quando ne ho parlato ho solo detto che mi sembrava che gli ideatori avessero fatto un tentativo in una direzione concettualmente interessante.

22 Giugno 2000 Replica a Lucio Russo (numeri reali)
di Paolo Bonavoglia

> *Avendo letto le osservazioni del professor Bonavoglia, mi sono reso conto …*<
Devo innanzitutto precisare che il mio intervento su Cabrinews pur prendendo spunto dal suo articolo su il Sole-24 Ore, era in effetti mirato all’attuale situazione dell’insegnamento della Matematica in Italia e non alle sue posizioni in proposito.
> *Provo a rimediare. Sulla questione “numeri reali”…*<
Ecco un esempio di quanto dicevo sopra; quando ho contestato la sua opinione che sia essenziale insegnare la definizione rigorosa di numero reale nelle scuole superiori, ho immediatamente pensato alla definizione di Dedekind (classi contigue ...), semplicemente perché questa è la definizione riportata in quasi tutti i libri di algebra nelle superiori. Io stesso negli ultimi anni ho trattato l’argomento secondo la sequenza: dimostrazione classica dell’incommensurabilità della diagonale del quadrato, definizione di numero irrazionale alla Dedekind, dimostrazione che i numeri razionali sono numerabili e i numeri reali no (Cantor).
>*... o si afferma che, ad esempio, la diagonale di un quadrato deve necessariamente …*<
Devo dire che non mi riesce molto chiara questa prima scelta. Ma forse c’è un equivoco di fondo su cosa intendiamo per definizione rigorosa di numero reale. Mi pare infatti di capire che, dopo aver dimostrato che la diagonale del quadrato è incommensurabile con il lato, basta affermare che si deve pur inventare un nuovo insieme di numeri per queste situazioni; io questa non la consideravo tra le definizioni “rigorose” di numero reale, credo che l’equivoco stia in questo. Alla fin fine ho il sospetto che stiamo dicendo le stesse cose con parole diverse.
>*… Mi sembra che ridurre la matematica a manipolazioni ...*<
Forse mi sono spiegato male: quello che volevo dire è che i programmi di matematica delle superiori (o meglio dei licei) mi sembrano pensati essenzialmente per gli studenti che proseguiranno gli studi matematico-scientifici; Ora è certo importante che un futuro matematico o fisico o ingegnere sappia trasformare espressioni e risolvere equazioni, e per lui queste cose avranno un senso preciso, sono abilità di base, mentre per un futuro “umanista” sono in buona parte insensate. A quest’ultimo servirebbe di più un altro tipo di matematica. Comunque anche qui io avevo presente soprattutto l’attuale situazione dell’insegnamento della matematica nelle superiori: in base alla mia ormai ventennale esperienza, questo tende spesso a degenerare nel modo già descritto: la

geometria euclidea viene abbandonata perché troppo difficile o tutt'al più viene ridotta allo studio mnemonico di qualche teorema, la probabilità e la statistica non si fanno perché "non c'è tempo", ovvero perché sono considerate cose secondarie. In definitiva tutto si riduce a algebra, algebra e ancora algebra (con un po' di trigonometria e di geometria analitica, anche questa trattata principalmente nei suoi aspetti algebrici).

> *... io sarei molto cauto con la logica. …*<

Un piccolo esempio: tutti gli anni quando ricevo una nuova classe dalle scuole medie inserisco nel test di ingresso due domandine del tipo: qual è il contrario di affermazioni come "Tutti i gatti hanno la coda" e "Piove e fa freddo". Ebbene il 99% risponde invariabilmente: "Nessun gatto ha la coda", "Non piove e non fa freddo".

Allora basta un poco di calcolo proposizionale, connettivi AND, OR, NOT, leggi di De Morgan, principio di dualità e quantificatori per correggere questi radicati errori e per affrontare l'informatica dove errori del genere sono frequenti e pericolosi (io insegno Matematica PNI: ovvero con elementi di Informatica). Non stavo certo pensando a corsi di logica di alto livello.

D'accordo comunque che la miglior scuola di logica è la geometria euclidea, ma anche l'informatica è una buona palestra logica, anche troppo dura a dir il vero...

> *Quanto al calcolo delle probabilità il problema è …*<

Comunque se si facessero veramente sarebbe già meglio di niente. Il problema, come dicevo sopra, è che questi argomenti pur presenti oggi sulla maggior parte dei libri di testo, sono quasi sempre "tagliati" dai docenti (un po' come avveniva per la storia e la letteratura del Novecento ...).

22 Giugno 2000 Sull'intervento di Luigi Monica (viva la geometria)
di D'Aprile Margherita

Due parole per dire che sono completamente d'accordo con l'intervento di Luigi Monica. Il mio sogno è riuscire a trovare i modi per formare insegnanti (dato che a livello nazionale ci siamo quasi tutti imbarcati nell'impresa delle scuole di specializzazione per la formazione degli insegnanti) o di collaborare con insegnanti in servizio che vogliano avviare i ragazzi al ragionamento deduttivo in modo sensato, convincente, sereno. E mi pare che, giudico dalla ventina di specializzandi più impegnati tra quelli che ho incontrato in un modulo di didattica della geometria, una strada sia quella di proporre problemi di costruzione, meglio se come lavoro di gruppo. Intorno ad un calcolatore o ad una calcolatrice che permetta di usare Cabri si crea facilmente l'atmosfera giusta per tentativi, discussioni, prove, verifiche, eccetera. Per quanto posso giudicare, non sono pochi gli insegnanti che sottoscriverebbero l'affermazione finale di Luigi Monica a proposito di Cabri.

> *Il programma Cabri-géomètre mi ha permesso di recuperare l'insegnamento della geometria...*<

Altro che "tempo perso"! Ma che vorreste di più?

22 Giugno 2000 Intervento su :Dimostrazioni e altro
di Maria Alessandra Mariotti

Gentili iscritti alla lista (sarà abbastanza politically correct?), mi fa piacere che la discussione si sia accesa ancora una volta e che la "miccia" sia ancora legata al tema delle dimostrazioni.

Credo che le posizioni non siano poi così distanti come il tono talvolta un po' acceso e perentorio di alcuni può far pensare.

Il problema per tutti è quello di dare un senso a ciò che si propone agli allievi; un senso che rispecchi l'idea di matematica che ciascuno ha, e che nello stesso tempo sia rispettoso delle esigenze intellettuali degli allievi, in particolare possa essere compreso e accettato come ragionevole da loro. Tutto questo è molto complesso: la grande difficoltà della trattazione classica della geometria euclidea nelle prime classi della scuola secondaria superiore passa proprio attraverso questo nodo. Che senso ha fare lunghe argomentazioni per "dimostrare" fatti ovvi e scontati? Il senso di un approccio teorico ai problemi non è né spontaneo, né necessario, ma non di meno credo sia un aspetto della matematica che ne costituisce una parte importante.

La scelta da fare dal punto di vista didattico, io credo, stia proprio qui: se questa prospettiva teorica sia da portare in classe o se questo aspetto debba restare fuori delle nostre aule. Ci sono ormai da diversi anni ricerche in corso su come si possa affrontare, anche molto precocemente, il problema didattico dell'introduzione degli allievi al pensiero teorico. Credo di avere già segnalato a suo tempo il sito della newsletter sulla "dimostrazione"
http://www-cabri.imag.fr/Preuve

Benché il sito sia collegato a Cabri, la newsletter riguada il problema della dimostrazione a prescindere da Cabri! C'è un'ampia bibliografia e molti articoli sono disponibili on line. I risultati sono interessanti, rivelano sia la possibilità che la difficoltà dell'introduzione degli allievi alla dimostrazione. Innanzi tutto sembra fondamentale la scelta dei contesti nei quali trovare le problematiche significative per l'impianto e lo sviluppo di una teoria. A questo proposito il micromondo Cabri può risulatare particolarmente interessante; i "fenomeni" che si presentano sullo schermo chiedono spiegazioni che per la natura stessa del software possono essere ricollegate al sapere teorico incorporato. Certo che se Cabri viene utilizzato solo come un ambiente di verifica per enunciati, se l'osservazione (magari di figure ben fatte dall'insegnante e da lui magistralmente messe in movimento!) resta comunque la sola attività riservata agli allievi, mi sento di sollevare molti dubbi sull'utilità di Cabri come ambiente per introdurre gli allievi alla teoria geometrica. Anzi, credo che disporre di un mezzo così sofisticato per la verifica di enunciati renda sempre più difficile per l'allievo comprendere la necessità di "dimostrare". Infine, vorrei buttare sul tappeto un problema che considero strettamente connesso al tema della dimostrazione ed è quello delle definizioni (e qui forse il secondo pomo della discordia torna in ballo). Io credo che non sia possibile scindere il problema dei teoremi da quello delle definizioni, in entrambi i casi la prospettiva teorica ha specificità sue proprie che non possono essere ignorate. Come ci comportiamo a scuola con le definizioni?

22 Giugno 2000 Visto da un altro mondo (Abbasso o Viva Hilbert?)
di Giovanni Artico
Ho seguito con vero piacere lo scambio di messaggi di questo filone, che mi piacerebbe veder continuare.
Io vivo la cosa un po' da spettatore, appartenendo al mondo del professionale, di cui pur qualcuno per la verità si è ricordato. Però, da quel che sento, non è che nei licei le cose vadano molto diversamente che da noi.
Sono rimasto un po' colpito dall'ultimo messaggio di Paolo Bonavoglia, in cui descrive il biennio del liceo pervaso dall'algebra: sembra la fotocopia del mio professionale. Seguendo la discussione mi sono venute alcune riflessioni ed una proposta.
Prima riflessione: molto bello questo scambio di opinioni, trasuda dalle parole la passione dei partecipanti alla ricerca di un modo migliore di fare scuola. Ho però la sensazione che non porterà risultati, e si spegnerà come altre accese discussioni che ho visto passare sulla lista.
Seconda riflessione: quelli che si esprimono su questa lista sono più o meno sempre gli stessi e rivelano una certa unanimità di opinioni, al di là di passeggere incomprensioni. Eppure dalla descrizione di Paolo Bonavoglia, e anche dalla mia esperienza, sembra che la realtà della scuola sia contraria agli auspici dei "listaioli". È vero o è solo un'impressione? Esistono davvero tutti questi colleghi di biennio che si dedicano solo all'algebra, magari quella della peggiore specie? Potrebbero avere le loro buone ragioni per questo?
Bisognerebbe raccogliere informazioni abbastanza attendibili su che cosa succede in realtà nelle classi di biennio. I programmi preventivi sono sicuramente inattendibili, quelli consuntivi non sempre mostrano il tempo dedicato ai vari argomenti. Io penso che una discreta spia potrebbero essere i testi dei compiti in classe, perché di solito rappresentano un buon riassunto del programma svolto nel periodo precedente. Naturalmente un semplice testo non dice tutto, però se fosse accompagnato da qualche nota esplicativa sugli strumenti concessi agli studenti, o sulle abilità da testare, potrebbe dare utili informazioni. Perciò mi è venuta in mente questa proposta: creiamo un archivio di un anno di compiti di matematica del biennio (o anche del triennio o anche delle medie, se vi piace); però deve essere fatto così: tutti i compiti di tutto un istituto, perché altrimenti partecipano solo i soliti, e non si riesce a capire niente. In pratica: se qualcuno riesce a convincere un certo numero di scuole (diciamo almeno una decina) a pubblicare su un sito i compiti di matematica di tutti docenti per un anno, io mi impegno a costruire e gestire il sito, fornendo una tecnologia semplice per la pubblicazione e la consultazione. I compiti andrebbero scritti in formato accessibile a tutti, diciamo Word o PDF o simili. Io penso che sia quasi impossibile convincere i docenti ad esporsi in questo modo, però, se qualche preside premesse un po', ci si potrebbe anche riuscire. Qualcuno più addentro ai meccanismi burocratici potrebbe anche tirarne fuori un progetto di cooperazione tra scuole, che faciliterebbe molto le cose.
Io l'idea l'ho buttata: se a qualcuno sembra interessante, o vuole anche soltanto parlarne un po', o magari rilanciare qualche altra proposta, a me fa piacere sentire. In ogni caso mi piacerebbe che si arrivasse a fare qualcosa insieme, dopo aver discusso.
All'inizio pensavo di scrivere due righe. Mi scuso per avere abusato con questo profluvio di parole.

23 Giugno 2000 Replica a Paolo Bonavoglia
di Lucio Russo
Per completezza di informazione inoltro alla lista l'ulteriore replica di Lucio Russo al mio intervento su Cabrinews.
Paolo Bonavoglia
Mi sembra che siamo d'accordo su molte cose. A volte vi sono però difficoltà di comunicazione. Ho scritto che una delle possibilità è quella di "basare l'esistenza dei numeri reali su un'intuizione geometrica".
Lei risponde che questa non la considera una definizione "rigorosa" di numero reale. Lo credo bene! Non lo è affatto e non mi sarebbe mai passato per la testa di dirlo. Infatti ho scritto che si tratta di un'introduzione basata sull' "intuizione", e l'ho contrapposta alle definizioni "rigorose" considerate successivamente. Le confesso che non riesco a capire l'origine di questo equivoco. Sulla logica abbiamo idee abbastanza diverse. Non mi scandalizza affatto che il 99% dei ragazzi pensi che il "contrario" dell'affermazione "tutti i gatti hanno la coda" sia "nessun gatto ha la coda". Nella lingua italiana "contrario" è sinonimo di "opposto". Come il contrario di "amarissimo" è "dolcissimo", il vento "contrario" ad un vento da Nord Ovest è un vento da Sud Est, esattamente allo stesso modo il "contrario" dell'affermazione "tutti i gatti hanno la coda" è appunto "nessun gatto ha la coda". Naturalmente le cose cambiano drasticamente se invece del "contrario" consideriamo la "negazione logica". Se i giovani della nostra specie hanno più familiarità con il concetto di "opposto" che non con la negazione logica, è, secondo me, perché si tratta di un concetto più utile nella maggioranza delle occasioni della vita quotidiana. Se quindi si vuole insegnare loro l'uso di strutture logiche formali (anche nel senso ele-

mentarissimo della negazione) l'unico modo efficace di farlo, a mio parere, è quello di introdurle in un contesto in cui tali strutture mostrano qualche utilità. Un contesto naturale è quello della geometria. Ad esempio non si può dimostrare un teorema per assurdo se non si possiede il concetto di negazione logica. Un altro contesto che richiede necessariamente nozioni di logica è quello dei linguaggi di programmazione. Se però non dovessimo studiare né la matematica, né l'informatica, né altre strutture concettuali paragonabili, ma dovessimo solo divertirci a parlare di code e di gatti, mi sembra che non vi sarebbe motivo per non accontentarci del vecchio concetto di "opposto", come infatti fa il 99% dei ragazzi. Non credo che i ragazzi nascano con pericolosi errori radicati nella testa, che bisogna estirpare. Penso che semplicemente debbano essere avviati ad usare strumenti intellettuali via via più raffinati, adatti agli scopi che si vogliono ottenere. Se lo ritiene, può rendere pubblica tutta la nostra corrispondenza

24 Giugno 2000 Considerazioni (Proposta di G. Artico)
di Enrico Pontorno
>*…Esistono davvero tutti questi colleghi di biennio che si dedicano solo all'algebra…*<
Confermo. Ho fatto da "tutor" a due giovani colleghe che si preparavano ai concorsi. Qualunque cenno o riferimento alla geometria veniva stroncato da un "...si, bello, ma a me la geometria non piace!"
>*…Proposta: creiamo un archivio di un anno di compiti di matematica del ….*<
Aderisco senz'altro all'iniziativa.

Allegato 1

REQUIEM PER LA DIMOSTRAZIONE.
Perché i nuovi metodi di insegnamento incrementano l'analfabetismo scientifico
di Lucio Russo

Quali conoscenze dovrebbe possedere un giovane che si iscrive a un corso di laurea scientifico? Si tratta di conoscenze effettivamente fornite dalle nostre scuole secondarie e verificate negli esami di stato? Credo che per rispondere a queste domande occorra evitare accuratamente alcuni luoghi comuni pericolosamente diffusi. Innanzi tutto occorre riconoscere che le conoscenze di base necessarie per intraprendere degli studi scientifici oggi non sono troppo diverse dar quelle che erano necessarie un secolo fa.
Ovviamente oggi un giovane deve sapere usare molti strumenti che allora non esistevano o erano poco diffusi (come il telefono, l'automobile, il videoregistratore o il computer) ma si tratta di abilità che qualsiasi ragazzo acquisisce facilmente da solo.
La scuola dovrebbe invece fornire allo studente alcuni strumenti intellettuali: in primo luogo le capacità linguistiche, logiche e operative che lo mettano in grado di osservare, descrivere e progettare oggetti ed esperimenti, cogliere nessi logici e ragionare all'interno di semplici modelli teorici. Vi sono state, naturalmente, delle importanti novità ad esempio la possibilità nuova di tradurre immediatamente, grazie all'informatica, un algoritmo in uno strumento operativo che altera i rapporti tra matematica, fisica ed ingegneria. Tuttavia le basi del metodo scientifico continuano a consistere, in larga misura, nel metodo dimostrativo e nel metodo sperimentale. Se si teorizza che bisogna evitare come ormai superate le capacità linguistiche e logiche, sostituendo il linguaggio puramente iconico ai linguaggi verbali e le libere associazioni di idee alle implicazioni logiche, si pongono evidentemente le basi della diffusione dell'analfabetismo, anche scientifico. Il metodo dimostrativo, come si sapeva bene fin dall'Antichità, non solo è essenziale per chi voglia proseguire gli studi scientifici, ma è anche uno strumento utile per la formazione delle capacità argomentative. Chi è abituato ad accettare le conseguenze logicamente necessarie delle scelte fatte capisce, a esempio, che non si dovrebbe salutare con entusiasmo la regionalizzazione dei concorsi e poi scandalizzarsi subito dopo scoprendo che le commissioni di concorso di regioni diverse hanno seguito criteri diversi. Un passo essenziale per l'abbassamento delle capacità argomentative degli italiani è stato compiuto in questi anni espellendo dalle scuole il metodo dimostrativo. Si tratta di un'espulsione graduale e ancora in corso, ma che terminerà in breve tempo se la tendenza attuale non sarà radicalmente invertita. Vorrei fare un solo esempio: nella prova di matematica proposta alla maturità scientifica dello scorso anno, in una delle poche domande non alterate da errori di stampa, si chiedeva di fornire una "dimostrazione esauriente" della risposta. Se gli esperti del ministero pensano ormai che le dimostrazioni matematiche, come le descrizioni o le giustificazioni, sono a volte esaurienti e a volte non esaurienti, dobbiamo evidentemente dedurne che il concetto di "dimostrazione" sta scomparendo dall'orizzonte culturale della nostra scuola. Rimanendo nell'ambito della matematica, un altro concetto quasi del tutto eliminato dall'insegnamento scolastico è quello di numero reale.
Gli studenti che oggi si iscrivono all'università, nella la quasi totalità dei casi, non sanno né cosa sia un teorema, né cosa sia numero (reale). Naturalmente si tratta di una circostanza che rende problematico l'insegnamento serio, a esempio, di un corso di analisi matematica al primo anno di università. Il problema può essere risolto in due modi diversi: o reintroducendo nella scuola secondaria alcuni concetti oggi in via di espulsione, oppure espellendo l'analisi matematica (e i corsi analoghi) dalle università: in effetti si sono già compiuti passi notevoli nella seconda direzione, a esempio eliminando la struttura dimostrativa (e anche tra l'altro, il concetto di numero reale) da molti corsi di matematica universitari (a esempio dai corsi di matematica generale delle

facoltà di economia). L'introduzione del 3+2, costringendo a comprimere le discipline di base, determinerà passi successivi nella stessa direzione.
L'altro elemento fondamentale del metodo scientifico, accanto a quello dimostrativo, è quello sperimentale. Uno scienziato riconosce infatti come valide solo due tipi di affermazioni: quelle che sono conseguenza necessaria di affermazioni già accettate e quelle che servono a spiegare una fenomenologia nota. Per eliminare completamente il metodo scientifico dalle scuole non basta quindi eliminare la struttura dimostrativa della matematica, ma occorrerebbe anche spezzare il legame tra le affermazioni scientifiche e i fatti sperimentali. Anche in questo caso si tratta di un processo già avviato con successo in tutto il mondo occidentale: tutti i ragazzi sanno, a esempio, che la materia è costituita da atomi, ma il fisico Alan Sokal (coautore assieme a J. Bricmont di "Imposture intellettuali", Garzanti, Milano, 1999, pp. 306, Lire 39.000: n.d.r.) ha sostenuto che i suoi studenti di fisica (alla New York University) non sanno riferire nessun fatto sperimentale a sostegno della teoria atomica.
La sostituzione degli esperimenti di laboratorio con visualizzazioni, che illustrano le teorie senza spiegarne le basi sperimentali, rischia di trasformare in senso dogmatico anche l'insegnamento di discipline come la fisica. In questa situazione non mi sembra che vi siano molte speranze di innalzare rapidamente il livello delle conoscenze scientifiche degli studenti italiani. Bisognerebbe invertire la tendenza attuale, anteponendo il valore formativo degli insegnamenti al loro immediato "indice di gradimento" e la qualità dei contenuti da comunicare alle forme della comunicazione. Si potrebbe allora affrontare seriamente il difficile problema dei contenuti e metodi dell'insegnamento scientifico nella nuova scuola secondaria.

Allegato 2

Alcune osservazioni sulla storia e la didattica del numero.

di Lucio Russo

La fonte più famosa sulla matematica egizia dell'epoca faraonica è il papiro di Rhind, scritto materialmente verso il 1650 a.C. dallo scriba Ahmes copiando un esemplare del Regno Medio di circa tre secoli più antico (il contenuto del papiro è esposto nel libro di Gillings). Tra i problemi risolti nel papiro vi sono molte divisioni tra interi. Ad esempio la divisione 3:13 viene effettuata scrivendo:

$$3:13 = 1/8 + 1/13 + 1/52 + 1/104\ .$$

Le storie della matematica (ad esempio quella di Boyer) spiegano in genere che lo strano metodo usato dagli scribi egizi per eseguire le divisioni era una conseguenza della loro incapacità di concepire frazioni con numeratore non unitario come "numeri". Questa incapacità avrebbe loro impedito di capire che il risultato della divisione di 3 per 13 è semplicemente la frazione 3/13, costringendoli a esprimere il risultato come somma di quattro frazioni a numeratore unitario. Se però effettuo la divisione 3:13 con il *computer* con cui sto scrivendo (o meglio, con il *software* commerciale fornitomi dal produttore) non ottengo la frazione 3/13. Appare invece il risultato:

$$0{,}23076923077.$$

Supponiamo di dovere spiegare ad Ahmes redivivo il senso della scrittura precedente. Dovremmo dirgli innanzitutto che essa significa:

$$2/10 + 3/100 + 7/10000 + 6/100000 + 9/1000000 + 2/10000000 + 3/100000000 + 7/1000000000 + 7/10000000000$$

In un secondo momento saremmo costretti ad ammettere che la nostra decomposizione in nove frazioni, a differenza della sua in quattro, non solo impiega frazioni più "complesse" (in quanto con numeratori non necessariamente unitari e denominatori molto più grandi), ma non è neppure esatta. Probabilmente Ahmes avrebbe molte difficoltà nel capire come mai sia il procedimento suo, e non il nostro, ad apparirci "strano".
Questo esempio mostra come ciò che in una cultura appare come un difficile problema da risolvere (la somma di molti risultati di complesse divisioni tra interi) possa essere visto in un'altra cultura come *la soluzione* (*il numero* 0,23076923077). Inoltre nella stessa cultura possono convivere visioni diverse e contraddittorie, soprattutto nelle fasi di transizione. Nei riguardi del concetto di numero oggi ci troviamo probabilmente in quest'ultima situazione, soprattutto per il sovrapporsi di una pratica digitale sempre più pervasiva a una teoria matematica storicamente legata ai procedimenti analogici. Consideriamo innanzitutto i numeri naturali. In genere un numero naturale si considera noto quando se ne conoscono le cifre dell'espansione decimale (o binaria). Va osservato che non sempre è stato così. La teoria pitagorica dei numeri figurati conserva forse la traccia di un'epoca in cui un numero era considerato noto quando erano stati raccolti e ordinati un corrispondente numero di sassolini. Un numero "visto" attraverso una disposizione regolare delle sue unità può in effetti mostrare alcune sue proprietà (come l'essere "triangolare" o "quadrato") che non risultano affatto evidenti dalla successione delle cifre. Senza ovviamente rinunciare alla notazione posizionale (né alla rappresentazione binaria delle nostre macchine) l'antichissima teoria dei numeri figurati può ancora offrire qualcosa sul piano didattico, sia permettendo di valorizzare l'intuizione visiva in un campo in cui è di solito poco utilizzata, sia dando l'occasione di riflettere in un caso partico-

larmente semplice sulla relatività delle conoscenze considerate "semplici": è più semplice individuare un numero come la quantità di unità contenute in tredici file di tredici unità o come la quantità ottenuta sommando un centinaio, sei decine e nove unità? La convenzionalità della seconda scelta, che probabilmente è quella istintivamente preferita dai ragazzi, appare evidente dopo un minuto di riflessione. Vedremo con altri esempi che la didattica potrebbe arricchirsi di molto se invece di tentare (senza ovviamente riuscirci) di riprodurre nella scuola le ultime novità del mondo esterno, cercasse di attingere in modo intelligente alle strutture concettuali elaborate dall'uomo nel corso della storia, usando il passato per accrescere la comprensione critica del presente. La matematica elementare usava tradizionalmente, accanto ai naturali, numeri razionali e numeri reali, che venivano introdotti rispettivamente nelle scuole medie e nelle scuole superiori. A questa molteplicità di concetti corrispondeva una molteplicità di opzioni usate per rappresentare i numeri sulla carta. Oltre a scrivere gli interi in notazione decimale si usavano infatti altre tre possibilità: la rappresentazione decimale dei numeri razionali (in linea di principio sempre esatta, in quanto una sopralineatura permetteva di individuare il "periodo" dell'eventuale espansione illimitata); la rappresentazione di razionali con frazioni (con le quali si ottenevano i risultati esatti delle operazioni aritmetiche) e la rappresentazione simbolica di numeri irrazionali come e, π o $\sqrt{2}$ (usata per eseguire molte manipolazioni algebriche). Oggi il quadro precedente sta rapidamente mutando. La diffusione delle calcolatrici tascabili e dei *computer* usati con *software* commerciale di largo consumo ha fatto quasi sparire dall'uso non scolastico le rappresentazioni diverse da quella decimale. Quanto alla scuola, in Italia i numeri razionali sopravvivono nella scuola media in condizioni precarie, mentre lo studio dei numeri reali (che nelle scuole secondarie già i programmi Brocca avevano ridotto a un'"introduzione intuitiva") sta sparendo anche dall'università: è già scomparso da molti dei corsi di matematica generale delle facoltà di economia e l'istituzione di corsi di laurea breve in serie con i successivi "master" lo eliminerà tra breve anche dalle facoltà scientifiche, almeno fino al terzo anno di studi. Processi analoghi sono in atto negli altri paesi. Naturalmente l'uso esclusivo di numeri in notazione decimale non è affatto imposto dai calcolatori, con i quali è possibile eseguire una varietà di operazioni molto più ampia di quelle effettuabili con carta e penna. Lo sviluppo dell'algebra computazionale ha ampiamente dimostrato le possibilità offerte dalle macchine nel calcolo simbolico (per un'informazione rapida sui problemi della matematica computazionale cfr. il quaderno di *Le Scienze* citato in bibliografia; un testo sistematico sullo stesso argomento è quello di Bevilacqua et al.). Come in molti altri casi, lo sviluppo tecnologico ha però un duplice effetto: in linea di principio amplia enormemente le possibilità offerte all'uomo; in pratica tale ampliamento rischia di essere effettivo solo per un'esigua minoranza, poiché logiche commerciali tendono ad appiattire il ventaglio delle possibilità a disposizione dei più, fino a renderlo spesso più ristretto di quello pre-tecnologico.

Tornando al nostro problema, se calcolatrici tascabili, registratori di cassa e computer mostrano i numeri come successione finita di cifre decimali, le frazioni rischiano di apparire a molti come un anacronismo che sarebbe bene eliminare dalla scuola. Naturalmente si tratta del meccanismo attraverso il quale la pretesa esigenza di adeguare la didattica al mondo contemporaneo la rende in realtà subalterna alla politica commerciale delle grandi imprese. L'eliminazione dei numeri razionali dalla scuola costituirebbe una perdita grave per vari motivi. Innanzitutto la rappresentazione decimale (o in qualsiasi altra base) porta a considerare sostanzialmente diverse tra loro operazioni come 2:3 e 2:5 (in quanto solo la seconda darebbe un risultato esatto) generando confusione tra fenomeni dipendenti dalla scelta della base di numerazione e le vere proprietà matematiche. In secondo luogo non bisogna dimenticare che oltre alla realtà virtuale esiste il mondo reale e dividere gli oggetti reali in tre parti eguali non è più difficile che dividerli in cinque parti eguali. Infine la teoria dei razionali è tuttora indispensabile per chi voglia proseguire nello studio della matematica. Per conservare un vero insegnamento matematico nelle scuole utilizzando in modo consapevole e critico le tecnologie moderne sono praticabili diverse strade. Innanzitutto i ragazzi dovrebbero essere resi consapevoli dell'errore commesso quasi sempre dagli strumenti automatici di calcolo nell'eseguire operazioni diverse dalle addizioni e moltiplicazioni. Con le calcolatrici di una volta bastava dividere uno per tre e triplicare il risultato per ottenere una sfilza di nove. Oggi in casi del genere si vede sempre il risultato "esatto". In alcuni casi ciò avviene perché il programma esegue realmente la semplificazione, ma il più delle volte si tratta solo di un'apparenza, dovuta al fatto che viene mostrato l'arrotondamento di un risultato con un numero di cifre superiore. In questo secondo caso basta sottrarre al numero visualizzato se stesso per scoprire che il risultato ottenuto era in realtà diverso da quello visualizzato. In secondo luogo lo studio e l'uso di numeri diversi da quelli decimali mostrati dalle calcolatrici, come le frazioni generiche, richiede motivazioni adeguate. Credo che i vantaggi dell'uso di frazioni con denominatore arbitrario non si colgano del tutto nella scuola perché non si insegna mai a ottimizzare la scelta del denominatore. Al contrario, la scelta decimale viene spesso ribadita anche a proposito di argomenti teorici che non dovrebbero esserne influenzati: ad esempio quando si insegna a misurare le grandezze. A questo scopo bisogna innanzitutto contare quante volte l'unità di misura è contenuta nella grandezza da misurare. Per stimare poi la parte restante, si insegna spesso a contare quante volte entra in essa un decimo dell'unità di misura, e così via. In questo modo il concetto di misura viene legato alla scelta di una particolare base di numerazione, vanificando in buona parte il significato dell'insegnamento del calcolo frazionario. Se si vuole proseguire nella misurazione in modo ottimale, invece di usare decimi (o altri sottomultipli arbitrari) dell'unità di misura per misurare il resto, basta invertire i ruoli, contando quante volte il resto entra nell'unità di misura, e così via, usando sempre la grandezza minore per misurare la maggiore. Questo algoritmo naturale porta a quello che si chiama "sviluppo in frazione continua" del rapporto cercato. In questo modo viene automaticamente ottimizzata a ogni passo la scelta del denominatore della frazione che approssima il rapporto. Si possono usare procedimenti analoghi per approssimare con frazioni quantità irrazionali come π o $\sqrt{2}$. Introducendo questi algoritmi nelle scuole secondarie l'utilità del calcolo frazionario diverrebbe molto più chiara.

Un'altra direzione importante di intervento consiste nell'ampliare l'uso effettivo del calcolo automatico nella scuola. Mentre probabilmente non è opportuna la diffusione nelle scuole secondarie di *software* complesso in grado di eseguire calcoli simbolici, programmi in grado di eseguire calcoli con le frazioni sono facili non solo da usare, ma anche da scrivere e la loro diffusione può dare un importante contributo alla sopravvivenza della nozione di numero razionale. Dovrebbe però non trattarsi di *software* costruito allo scopo esclusivo di illustrare il calcolo frazionario, ma di programmi usati anche per risolvere problemi concreti. I numeri irrazionali, apparsi storicamente nell'ambito della geometria come rapporti tra grandezze incommensurabili, possono sembrare molto più lontani dalla possibilità di essere usati su macchine digitali. In realtà essi possono essere efficacemente introdotti proprio attraverso l'elaborazione di programmi in grado di calcolarne approssimazioni comunque buone in un tempo sufficientemente lungo. Il rapporto tra numero e macchina diviene in questo caso chiaro, purché la macchina non sia vista dal punto di vista di un utente passivo, ma con un interesse agli algoritmi su cui sono basati i procedimenti di calcolo. Naturalmente in questo modo non si possono introdurre "tutti" i numeri irrazionali, poiché esistono solo un'infinità numerabile di possibili programmi, mentre gli irrazionali costituiscono un'infinità non numerabile. Ci si può però chiedere in che senso gli "altri" irrazionali (quelli cioè per i quali non esiste un algoritmo finito in grado di calcolarne approssimazioni comunque buone) veramente "esistano". In definitiva si tratterebbe di un'introduzione molto sana, anche dal punto di vista filosofico, allo studio dei reali. Si tratta però certamente di una strada incompatibile con le attuali tendenze didattiche, che vanno nella direzione dell'espulsione del concetto di numero reale dalla scuola. Ho espresso le mie opinioni su quello che considero il processo di degrado che sta investendo la scuola (in particolare nel settore dell'insegnamento matematico) nel libretto *Segmenti e bastoncini*. In ogni caso bisognerebbe fare scelte consapevoli e coerenti. Se si elimina dall'insegnamento secondario lo studio dei numeri reali, occorre rinunciare a uno studio rigoroso non solo di argomenti come radici, logaritmi e funzioni trigonometriche, ma anche del "piano cartesiano" (che dei numeri reali non può fare a meno). In altre parole si tratta di espellere il rigore dall'insegnamento secondario della matematica, il che equivale, sostanzialmente, a eliminare l'insegnamento della matematica. Vi è forse un'altra possibilità: quella di mantenere il rigore rinunziando a insegnare nelle scuole secondarie la matematica del continuo e limitandosi a procedimenti finiti, che usino solo numeri interi o razionali. Consideriamo, ad esempio, il calcolo di integrali. I metodi di integrazione numerica consistono, in ultima analisi, nel calcolarli approssimandoli con somme finite. Perché allora, ci si potrebbe chiedere, continuare a studiare la teoria di oggetti che non vengono realmente calcolati? Non potremmo limitarci alle somme? Si può obiettare che il calcolo di somme di moltissimi termini non ha lo stesso significato intuitivo e visivo della valutazione di un'area. Possiamo però immaginare di invertire il rapporto tradizionale tra integrali e somme. Invece di considerare le "somme di Riemann" come approssimazioni di un'integrale, si potrebbero cioè introdurre gli integrali come rappresentazione geometrica intuitiva che approssima bene il calcolo di alcuni tipi di somme di moltissimi termini. Esattamente allo stesso modo si potrebbero studiare in modo rigoroso (già nella scuola secondaria) le equazioni alle differenze finite, per poi introdurre il concetto di equazione differenziale come rappresentazione approssimata e intuitiva di particolari equazioni alle differenze, e così via. Una trattazione incompleta e puramente "intuitiva" dei concetti dell'analisi matematica acquisterebbe in questo modo una precisa giustificazione teorica e molti metodi numerici discreti potrebbero essere correttamente descritti nel loro reale funzionamento, senza necessità di complicati andirivieni tra discreto e continuo. Non so se quella appena delineata sia la scelta migliore. Personalmente preferirei conservare nelle scuole lo studio della matematica del continuo basata sulla geometria classica, ma penso che restringersi al discreto sia un'alternativa preferibile a quella, che rischia di imporsi, di ridurre la matematica a una serie di procedimenti euristici pensati "intuitivamente" nel continuo e tradotti concretamente nel discreto, senza una precisa consapevolezza né delle teorie sviluppate nel continuo, né dei loro rapporti con i calcoli automatici realmente eseguiti.

⇨

Bibliografia

• Bevilacqua R., Bini D., Capovani M., Menchi O., *Metodi numerici*, Bologna, Zanichelli, 1994.
• Boyer Carl B., Storia della matematica, ISEDI, 1976.
• Capovani M., Codenotti B. (a cura di), *Matematica computazionale*, Le Scienze, quaderni, 84 (1995).
• Courant R., Robbins H., *Che cos'è la matematica?* Torino, Boringhieri, 1988[7].
• Gillings R.J., *Mathematics in the time of the pharaos*, New York, Dover, 1972.
• Russo L., *Segmenti e bastoncini*, Milano, Feltrinelli, 1998.

COME FARE

media superiore

Fasci di circonferenze

di Lucio Benaglia
Liceo Scientifico E. Vittorini - Milano

0. Il problema

Mentre in una terza liceo scientifico stavo trattando i fasci di circonferenze dal punto di vista analitico, mi si è posto il problema di individuare graficamente l'asse radicale di un fascio iperbolico, e, viceversa, dato un fascio iperbolico, costruire con riga e compasso la circonferenza del fascio passante per un punto dato.
Il problema è stato affrontato utilizzando Cabri. La ricerca della soluzione si è articolata in tre fasi:

- Costruzione della circonferenza per tre punti e realizzazione della relativa macro.
- Costruzione dell'asse radicale del fascio individuato da due circonferenze non secanti e realizzazione della relativa macro.
- Costruzione della circonferenza del fascio individuato da una circonferenza e da una retta non secante e realizzazione della relativa macro.

Ritengo noti i concetti di potenza di un punto rispetto ad una circonferenza e di centro radicale di tre circonferenze:[(1)] argomenti che sono reperibili facilmente su qualunque libro di testo. Suppongo che il lettore conosca l'uso basilare di Cabri (apertura di files, di Macro, ecc.).

1. Circonferenza per tre punti non allineati

Il problema da risolvere è evidentemente quello di determinare il punto equidistante dai tre punti dati. Per questo basterà intersecare gli assi di due delle possibili tre coppie di punti. La costruzione non presenta alcuna difficoltà:

1. Fai clic sulla casella degli strumenti *Punto*, e seleziona *Punto*
2. Fai clic in un punto dello schermo (punto A), in un secondo punto B, in un terzo punto C, curando che i tre punti non siano allineati.
3. Fai clic sulla casella degli strumenti *Costruisci*, seleziona *Asse*; fai clic prima su A, poi su B (asse di AB). Fai clic su B, poi su C (asse di BC).
4. Fai clic sulla casella degli strumenti *Curve*, seleziona *Circonferenza*; fai clic nell'intersezione dei due assi costruiti al punto 3, e successivamente su uno qualsiasi dei punti A, o B, o C.
5. Fai clic sullo strumento *Macro*; seleziona come *Oggetti iniziali* i tre punti A, B, C.
6. Fai clic sullo strumento *Macro*; seleziona come *Oggetti finali* la circonferenza costruita al punto 4, e il suo centro.
7. Definisci la macro nel modo consueto, completando opportunamente la finestra di dialogo, e cliccando su *Ok*.

Il risultato delle istruzioni è mostrato nella figura 1.

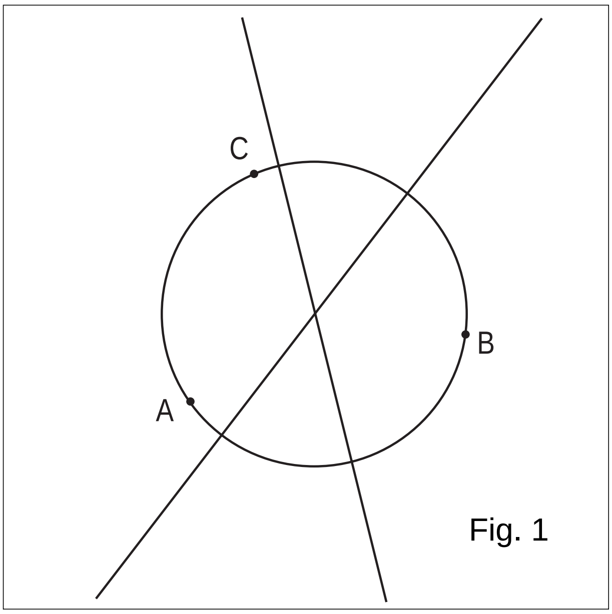


Fig. 1

2. Asse radicale di un fascio iperbolico di circonferenze

Il problema si riduce alla costruzione di un punto dell'asse radicale di due circonferenze, perché successivamente esso si ottiene tracciando per quel punto la perpendicolare alla retta dei centri. Il problema è stato risolto scegliendo due punti su una delle circonferenze e uno sull'altra, non allineato ai precedenti. Costruita la circonferenza per i tre punti, si determina il centro radicale delle tre circonferenze come intersezione degli assi radicali dei fasci ellittici determinati dalla prima e terza circonferenza e dalla seconda e terza circonferenza. La perpendicolare per il centro radicale alla retta dei centri è l'asse radicale cercato. La soluzione con Cabri è la seguente:

1. Fai clic sulla casella degli strumenti *Curve*, seleziona *Circonferenza*; fai clic in due punti del piano (circonferenza K).
2. Fai clic in altri due punti dello schermo (circonferenza K'); disponi le due circonferenze in modo che non siano secanti.
3. Fai clic sulla casella degli strumenti *Punto*, e seleziona *Punto.*
4. Fai clic in un punto A della circonferenza K; fai clic in due punti B e C della circonferenza K', curando che i tre punti non siano allineati.
5. Fai clic sullo strumento *Macro*, e seleziona la macro *Circonferenza per tre punti* costruita nel paragrafo precedente (se non fosse presente, è necessario aprirla).
6. Fai clic su A, B e C, in modo da costruire la circonferenza K" per i tre punti indicati.
7. Fai clic sullo strumento *Retta*, e seleziona *Retta*.
8. Fai clic su A e su K∩K"=D; fai clic su B e su C. Fai clic sui due centri delle circonferenze K e K'.
9. Fai clic sulla casella degli strumenti *Costruisci*, e seleziona lo strumento *Rette perpendicolari*.
10. Fai clic in AD∩BC, fai clic sulla retta congiungente i centri di K e K'. La retta trovata è l'asse radicale cercato.
11. Fai clic sulla casella degli strumenti *Macro*. Seleziona come oggetti iniziali le due circonferenze K e K', e i punti A, B, C; seleziona come oggetto finale l'asse radicale.

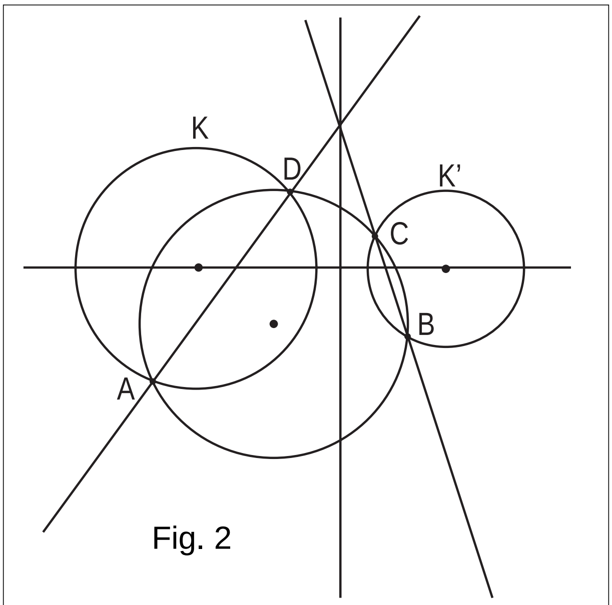


Fig. 2

Il risultato della costruzione è mostrato nella precedente figura 2:
Per verificare la correttezza della costruzione eseguita, è possibile:

- Spostare il punto A su K, verificando che E percorre l'asse radicale (la costruzione non dipende dalla posizione di A su K). Ripetere il procedimento per i punti B e C.
- Spostare il centro della circonferenza K (o K'), in modo che le due circonferenze siano secanti o tangenti, verificando che l'asse radicale passa nel primo caso per i punti d'intersezione di K e K', mentre nel secondo è la tangente comune alle due circonferenze nel punto di contatto.
- Variare il raggio di K (o di K'), eseguendo lo stesso controllo descritto nel punto precedente.

3. Costruzione della circonferenza di un fascio iperbolico per un punto dato

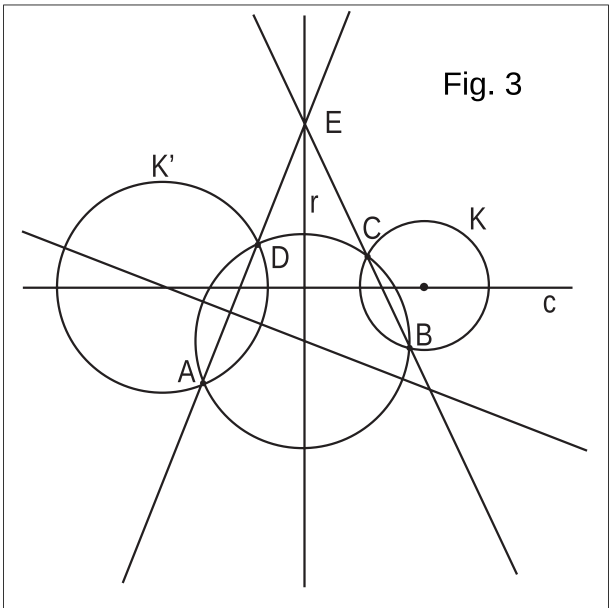
Supporremo che il fascio iperbolico sia assegnato per mezzo di una circonferenza K, e dell'asse radicale r del fascio. Se così non fosse, ci si riconduce a questo caso con la costruzione descritta nel precedente paragrafo 2.
Della circonferenza cercata è noto un punto A, e sappiamo che il centro appartiene alla perpendicolare c all'asse radicale, tracciata dal centro della circonferenza data. Pertanto il problema si riduce alla costruzione di un secondo punto X della circonferenza richiesta, perché il suo centro è l'intersezione di c con l'asse del segmento AX. Per la soluzione del problema basta selezionare due punti B e C su K. Posto poi E=BC∩r, è E il centro radicale della circonferenza K, della circonferenza per A, B, C, e della circonferenza cercata. L'intersezione di EA con la circonferenza per A, B, C è il punto cercato. Ecco la soluzione con Cabri:

1. Fai clic sulla casella degli strumenti *Retta*, e seleziona lo strumento *Retta*. Traccia la retta r (l'asse radicale del fascio).
2. Fai clic sulla casella degli strumenti *Curve*, e seleziona lo strumento *Circonferenza*. Traccia una circonferenza che non sia secante la retta.
3. Fai clic sulla casella degli strumenti *Punto*, e seleziona lo strumento *Punto*. Fai clic in un punto A dello schermo, e in due punti B e C della circonferenza K, in modo che i tre punti non siano allineati.
4. Fai clic sulla casella degli strumenti *Costruisci*, e seleziona lo strumento *Rette perpendicolari*. Fai clic sul centro di K e sulla retta r (costruzione della retta c dei centri).
5. Fai clic sulla casella degli strumenti Macro, e seleziona *Circonferenza per tre punti* (se la voce non ci fosse, è necessario caricare la macro costruita al precedente punto 1). Fai clic su A, B, C.
6. Fa clic sulla casella dello strumento *Retta*, e seleziona lo strumento *Retta*. Traccia la retta BC e la retta per E=BC∩r ed A.
7. Fai clic sulla casella degli strumenti *Costruisci*, e seleziona lo strumento *Asse.* Fai clic su A e sull'in-

tersezione D della retta EA con la circonferenza per A, B, C.

8. Fai clic sulla casella degli strumenti *Curve*, e seleziona lo strumento *Circonferenza*. Traccia la circonferenza K’ con centro nell’intersezione della retta dei centri c con l’asse costruito al punto precedente, e passante per il punto A. Si tratta della circonferenza desiderata.
9. Fai clic sulla casella degli strumenti *Macro*, e seleziona come oggetti iniziali l’asse radicale r, la circonferenza k, i punti A, B, C. Come oggetti finali seleziona la circonferenza K’ e il suo centro. Salva la macro nel modo consueto.

A video avrai quanto mostrato nella figura 3:



Per verificare la correttezza della costruzione eseguita, è possibile:

- Afferrare la retta r, facendola ruotare attorno al primo punto della sua costruzione. Quando r è tangente o secante la circonferenza K, la circonferenza richiesta deve essere tangente K nel punto di contatto con la retta, o passare per i punti d’intersezione di r e K.
- Spostare i punti B o C su K: la circonferenza K’ non muta, cioè non dipende dalle posizioni dei punti scelti arbitrariamente su K.
- Variare il raggio di K, eseguendo le stesse osservazioni descritte al primo punto. In particolare le intersezioni di K e K’ devono appartenere sempre all’asse radicale.
- Spostare K trascinando il suo centro, ed eseguendo le stesse osservazioni descritte al punto precedente.

(1) Si vedano in proposito i numeri 13 e 15 del bollettino CABRIRRSAE

Similitudini con Cabri II

di Campagnolo Irene
Attività di tirocinio c/o ITC “Calvi” Padova

Questo articolo è tratto dalla tesina del Corso di Perfezionamento in Metodologia e Didattica della Fisica e della Matematica che ho seguito presso l’Università di Padova (a.a. 1998-’99). L’argomento: *Similitudini con l’uso di Cabri II in geometria analitica* è stato svolto in 5 ore di lezione in una classe quarta dell’Istituto Tecnico “Calvi” di Padova. È seguito poi un compito per valutare quanto è stato appreso dai ragazzi con l’uso di tale software. Per introdurre l’argomento, sono stati proiettati dei lucidi raffiguranti strutture architettoniche (bifore e trifore di palazzi veneziani), mosaici, fiori, tessuti (in particolare merletti), che rappresentavano particolari simmetrie (assiali). L’invito a scoprire delle simmetrie presenti nell’ambiente che ci circonda, è stato colto con molto entusiasmo dai ragazzi. La prima lezione si è così conclusa con una breve introduzione al mondo di Cabri II. Quanto basta per far capire ai ragazzi che da questo software non ci si deve aspettare tutto, ma che deve essere visto come un “amico” che ci può aiutare a vedere in modo più dinamico quella parte di geometria che molto spesso viene insegnata in modo molto statico.
Dalla seconda lezione in poi è stata data la definizione di affinità, in particolare di simmetria (assiale e centrale) e traslazione. Per concludere sono seguite le definizioni di omotetia e similitudine. Ciascun argomento è stato trattato in un capitolo a parte così strutturato: all’inizio è stata data la definizione classica di ciascun oggetto, seguendo la costruzione geometrica (con riga e compasso). Costruzione che fa, o meglio dovrebbe far parte, del bagaglio culturale di ciascun ragazzo (prerequisito per una classe di triennio superiore). Sono state ricavate tutte le formule analitiche. La stessa costruzione è stata fatta con Cabri II (utilizzando un foglio di lavoro) in modo tale che i ragazzi potessero prendere confidenza con gli strumenti di Cabri II. Inoltre per far capire loro che le trasformazioni, già presenti nella barra degli strumenti, si possono ottenere mediante semplici macrocostruzioni (questo è un buon esercizio). Sono seguiti poi degli esercizi al computer, utilizzando, sempre dalla barra degli strumenti, anche l’opzione Assi Cartesiani, Coordinate, Colora, Riempimento, Spessore. Ciascun capitolo concludeva l’argomento con una serie di esercizi da fare per casa utilizzando le formule analitiche. Il compito in classe non è stato fatto in aula computer, come si potrebbe immaginare, ma in classe: l’obiettivo era verificare quanto questo software potesse essere di aiuto agli studenti per capire la geometria, in particolare le affinità. Sia io che l’insegnante di classe siamo state soddisfatte dei risultati ottenuti. Seguirà ora la descrizio-

ne di ciascun capitolo della tesina.

Introduzione

Le affinità sono trasformazioni del piano in sé che conservano il parallelismo, il rapporto delle aree delle figure corrispondenti. Ad esempio è una affinità la corrispondenza biunivoca che associa ad ogni oggetto la sua ombra, proiettata su di un piano dai raggi solari. Si chiama **geometria affine** quella geometria che studia le proprietà delle figure che sono invarianti rispetto al gruppo delle affinità. Le trasformazioni del piano che saranno trattate, quali le simmetrie assiali, le simmetrie centrali e le traslazioni, fanno parte delle isometrie (dove viene conservata la distanza tra coppie di punti corrispondenti). Una **affinità** è una corrispondenza biunivoca del piano in sé che trasforma rette in rette e in particolare rette parallele in rette parallele. Le equazioni di una affinità sono le seguenti:

$$\begin{cases} x' = ax + by + h \\ y' = cx + dy + k \end{cases} \quad \text{con } ad - bc \neq 0.$$

Proprietà:
- Un'affinità conserva il parallelismo;
- il rapporto tra le aree di due figure corrispondenti in una affinità è uguale al valore assoluto del determinante ad-db;
- la composizione di due affinità è ancora una affinità;
- la composizione di affinità non è commutativa;
- la composizione di affinità è associativa.

Al variare dei coefficienti a,b,c,d,h,k con ad - dc ≠ 0 si ottengono le equazioni che caratterizzano le varie trasformazioni geometriche nel piano e che sono:
- isometrie (affinità che conservano la distanza)
  (a) simmetrie
  (b) traslazioni
- omotetie (particolare tipo di similitudini)
- similitudini.

Simmetria assiale

Obiettivi:
- Definire la simmetria assiale;
- individuare punti e rette unite;
- costruire la figura simmetrica, rispetto ad una retta, di figure date;

Strumenti:
Laboratorio informatico (software: Cabri II).
Due punti P e P' si dicono simmetrici rispetto ad una retta r se questa è l'asse del segmento PP'. **Simmetria assiale** di asse **r** è la corrispondenza biunivoca di un piano π in se stesso tale che ad ogni punto P di π fa corrispondere il punto P' di π simmetrico di P rispetto ad r.
Nel piano cartesiano si possono individuare tre tipi di simmetrie: (1) simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse y, (2) simmetria rispetto ad una retta parallela all'asse x ed infine (3) simmetria rispetto ad una retta generica.

(1) Si supponga che la retta abbia equazione x=h, di avere un punto generico P(x,y) e di voler trovare il punto P'(x',y') simmetrico di P rispetto alla retta data.
P e P' sono simmetrici rispetto alla retta x=h se il punto medio appartiene alla retta e i due punti hanno la stessa ordinata. Questo equivale a:

$$\begin{cases} (x + x')/2 = h \\ y = y' \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x' = -x + 2h \\ y' = y \end{cases}$$

e le equazioni sopra scritte sono proprio le equazioni di un'affinità.
(2) Si supponga che la retta abbia equazione y=k, di avere un punto generico P(x,y) e di voler trovare il punto P'(x',y') simmetrico di P rispetto alla retta data.
P e P' sono simmetrici rispetto alla retta y=k se il punto medio appartiene alla retta e i due punti hanno la stessa ascissa. Questo equivale a:

$$\begin{cases} (y + y')/2 = k \\ x = x' \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2k \end{cases}$$

e, di nuovo, le equazioni sopra scritte sono proprio le equazioni di un'affinità.
(3) Si supponga che la retta abbia equazione y=mx+q (con m‡0) e di avere un punto generico P(x,y): trovare le equazioni della simmetria che manda il punto P nel punto P' simmetrico di P rispetto alla retta data. I due punti sono simmetrici rispetto alla retta se:
- la retta individuata da P e P' è perpendicolare alla retta di equazione y=mx+q;
- il punto medio del segmento PP' appartiene alla retta.

In formule questo equivale a:

$$\begin{cases} (y - y')/(x - x') = -1/m \\ (y + y')/2 = m(x + x')/2+q \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x'=-(1-m^2)/(1+m^2)\ x+2m/(1+m^2)\ y-2mq/(1+m^2) \\ y'=2m/(1+m^2)\ x+(1-m^2)/(1+m^2)\ y\ -2q/(1+m^2) \end{cases}$$

che rappresentano le equazioni di una affinità.
Con Cabri II:
- Prendi due punti e crea la retta per essi: chiamala a; tale retta divide il piano in due semipiani alfa, beta;
- crea un punto P in alfa che non appartenga alla retta;
- costruisci la retta perpendicolare alla retta a per P e chiamala h;
- crea il punto H intersezione di a con h;
- costruisci il simmetrico di P rispetto ad H; per far questo devi:
  - considerare la circonferenza di centro H e passante per P;
  - creare la semiretta con origine in P e passante per il punto H e chiamarla b;
  - considerare il punto di intersezione fra b e la circonferenza e chiamarlo P';
  - nascondere la semiretta e la circonferenza.

Seguendo queste indicazioni si perviene alla costruzione vera e propria della simmetria assiale. P' si dice il simmetrico di P rispetto alla retta a. Per evitare di ripetere ogni volta questo procedimento si può utilizzare un sottoprogramma che in Cabri II è chiamato macro-costruzione e serve per costruire il simmetrico di un punto rispetto ad una retta (è un buon esercizio). Cabri II è in grado di trovare il simmetrico di un punto o di una qualunque figura rispetto ad una retta scegliendo l'istruzione "simmetria assiale" dal menù "Trasforma".

Invarianti

- I punti uniti, per le simmetrie assiali, sono costituiti dai punti appartenenti all'asse di simmetria.
- La retta asse e le rette perpendicolari all'asse vengono mutate in se stesse: sono rette unite.

Le simmetrie assiali non formano un gruppo: la composizione di due simmetrie assiali non è una simmetria assiale. Inoltre non viene conservato il verso di lettura dei vertici.

Simmetria centrale

Obiettivi:

- Definire la simmetria centrale;
- individuare gli invarianti e gli elementi uniti;
- costruire la figura simmetrica, rispetto ad un punto, di figure date;

Strumenti:

Laboratorio informatico (software: Cabri II).

Due punti P e P' si dicono simmetrici rispetto ad un dato punto S se questo è il punto medio del segmento PP'. **Simmetria centrale** di centro **S** è la corrispondenza biunivoca di un piano π in se stesso tale che ad ogni punto P di π fa corrispondere il punto P' di π simmetrico di P rispetto ad S. Siano (x,y) e (x',y') le coordinate di P e P' rispettivamente. Si fissi un punto S(h,k) nel piano rispetto al quale fare la simmetria centrale. P e P' sono simmetrici rispetto ad S se:

$$\begin{cases} (x + x')/2 = h \\ (y + y')/2 = k \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x' = -x + 2h \\ y' = -y + 2k \end{cases}$$

e queste sono le equazioni della simmetria centrale rispetto ad S.

Con Cabri II:

Si può considerare la simmetria centrale come composizione di due particolari simmetrie assiali;

- costruisci la retta per due punti e chiamala a;
- costruisci una retta h perpendicolare ad a;
- costruisci il punto di intersezione di a e h e chiamalo S;
- costruisci un segmento AB;
- costruisci il segmento A'B' simmetrico di AB rispetto ad a;
- costruisci il segmento A"B" simmetrico di A'B' rispetto ad h;
- nascondi A'B';
- costruisci i segmenti AA" e BB";
- verifica che A, A" e B, B" sono simmetrici tra di loro nella simmetria di centro S.

Nella costruzione si è pervenuti alla simmetria centrale attraverso la composizione di due simmetrie particolari tali che gli assi di simmetria siano due rette ortogonali. In realtà Cabri II è in grado di realizzare la simmetria centrale scegliendo l'istruzione "simmetria centrale" dal menù "Trasforma".

Invarianti

- L'unico punto unito rimane il centro di simmetria.
- Le rette per il centro sono rette unite.

Le simmetrie centrali non formano un gruppo: la composizione di due simmetrie centrali non è una simmetria centrale. Il verso di lettura dei vertici viene conservato.

Traslazioni

Obiettivi:

- Definire la traslazione;
- individuare gli invarianti e gli elementi uniti;
- costruire la figura traslata di figure date.

Strumenti:

Laboratorio informatico (software: Cabri II). Si chiama **traslazione** di vettore $\underline{s}$ la corrispondenza biunivoca del piano in se stesso che ad ogni punto P associa il nuovo punto P' ottenibile "aggiungendo" il vettore $\underline{s}$(h,k) al punto iniziale. Se (x,y) e (x',y') sono le coordinate di P e P' rispettivamente, allora P' è il punto traslato di P secondo $\underline{s}$ se:

$$\begin{cases} x' - x = h \\ y' - y = k \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases}$$

con h e k reali. Se fossero entrambi nulli otterremmo la traslazione identica.

Con Cabri II:

Si può ottenere la traslazione come composizione di due particolari simmetrie assiali;

- crea una retta per due punti e chiamala a;
- crea una retta parallela alla precedente e chiamala b; costruisci e misura la distanza che esiste tra a e b;
- costruisci un triangolo ABC esterno alla striscia di piano compresa tra a e b, nel semipiano che non contiene b;
- costruisci il triangolo A'B'C' simmetrico di ABC rispetto ad a;
- costruisci il triangolo A"B"C" simmetrico di A'B'C' rispetto ad b;
- nascondi A'B'C'.

Invarianti

- Una traslazione, in generale, non ammette punti uniti a meno che non si tratti di una traslazione di vettore nullo (ossia l'identità).
- Le rette unite sono le rette che congiungono i punti corrispondenti.
- Le traslazioni formano un gruppo.

Omotetie

Obiettivi:

- Definire l' omotetia;

- individuare gli invarianti e gli elementi uniti;
- costruire la figura omotetica di figure date.

Strumenti:
Laboratorio informatico (software: Cabri II).
Le omotetie sono un particolare tipo di similitudini (trasformazioni che conservano la forma).
Considerato un piano π ed un punto S, detto centro, ed un numero reale non nullo k, detto rapporto di omotetia, il punto P' di π è detto il corrispondente di P nell'**omotetia** di centro S e rapporto k se:
- i punti S, P e P' appartengono ad una stessa retta;
- SP'/SP=k.

Il centro S può essere:
(1) esterno al segmento PP' (in questo caso k è maggiore di zero e si parla di omotetia diretta);
(2) interno al segmento PP' (in questo caso k è minore di zero e si parla di omotetia indiretta).
Riferito il piano π ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, consideriamo i punti S(a,b), P(x,y) e P'(x',y'): si può determinare quale relazione deve intercedere fra le coordinate dei punti P e P' affinché siano omotetici con centro S secondo il rapporto k.
Proiettando la relazione SP'/SP=k lungo gli assi coordinati si ottengono le equazioni di un'omotetia di centro S(a,b) e rapporto k:

$$\begin{cases} (x' - a)/(x - a) = k \\ (y' - b)/(y - b) = k \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x' = k(x - a) + a \\ y' = k(y - b) + b. \end{cases}$$

E' un facile esercizio provare che un'omotetia, diversa dall'identità (k=1), ha come unico punto unito il centro di omotetia.
Un punto P è unito rispetto ad una trasformazione se si verifica che il trasformato di P' coincide con P, ossia
x = x', y = y'. In questo caso:

$$\begin{cases} x = k(x - a) + a \\ y = k(y - b) + b \end{cases}$$

e risolvendo il sistema rispetto ad x e a y si ottiene:

$$\begin{cases} x = a(1 - k)/(1 - k) \\ y = b(1 - k)/(1 - k) \end{cases}$$

da cui segue che se $k \neq 1$ il sistema ammette l'unica soluzione (a,b), se k=1 il sistema è indeterminato e ogni coppia (x,y) è soluzione. Questo risultato si può interpretare geometricamente nella seguente maniera:
(1) se $k \neq 1$ l'omotetia ammette un unico punto unito che è il centro dell'omotetia;
(2) se k=1 l'omotetia coincide con la trasformazione identica e tutti i punti del piano sono uniti.

Invarianti
Un'omotetia conserva la direzione (lati corrispondenti sono paralleli); si conservano gli angoli e dunque l'ortogonalità (è una particolare similitudine) e il rapporto delle misure di segmenti corrispondenti è costante.

Similitudini

Obiettivi:
- Definire una similitudine;
- individuare gli invarianti e gli elementi uniti;
- costruire similitudini di figure date;

Strumenti:
Laboratorio informatico (software: Cabri II).
Una similitudine è una particolare affinità che conserva l'ortogonalità (ciò comporta che l'immagine di un quadrato sia un quadrato) e si può ottenere come composizione di un'omotetia con un' isometria.
In questo modo le similitudini, che non sono presenti nel menù di Cabri II, si possono ottenere considerando prima un'omotetia di centro S e rapporto k, facendo poi eseguire sulla figura omotetica appena ottenuta una qualunque isometria.

Invarianti
- Una similitudine è una particolare affinità che conserva l'ortogonalità.
- Le similitudini conservano gli angoli ed è costante il rapporto tra i segmenti corrispondenti.

Seguirà ora il testo del compito.
C ompito in classe del 13 Ottobre 1999

1) Scrivere l'equazione della simmetria assiale di asse la retta y=x. Disegnare il simmetrico, secondo tale simmetria, del triangolo di vertici A(-2,1) ,B(-1,5), C(3,3). Dire se si tratta di una affinità diretta o indiretta. Indicare gli eventuali elementi uniti.
2) Siano dati i punti A(-1,1), B(-2,5), C(2,4) vertici di un triangolo e il punto S(2,1). Scrivere l'equazione della simmetria centrale di centro S.
Disegnare il simmetrico del triangolo dato secondo tale simmetria.
Dire se si tratta di una affinità diretta o indiretta.
3) Scrivere l'equazione della traslazione secondo il vettore s(1,2).
Dato il triangolo di vertici A(-3,3), B(-4,-4), C(-1,-2) disegnare il triangolo traslato secondo il vettore s.
4)Sia dato il quadrilatero di vertici A(-6,-2), B(-6,1), C(-3,1), D(-1,-4).
Condiderato il punto S(2,2) e il fattore di omotetia k=-1/2, scrivere le equazioni dell'omotetia di centro il punto S e fattore k. Disegnare il quadrilatero omotetico.
Dire quale è il punto unito (non è necessario fare i calcoli).
5) Scrivere le equazioni della similitudine ottenuta componendo l'omotetia di centro S(1,1) e di fattore k=2 con la simmetria assiale di asse x=-3.
Dato il triangolo di vertici A(0,-1), B(2,-2), C(3,2) disegnare il triangolo ottenuto applicando la similitudine sopra definita.
Determinare gli eventuali elementi uniti.

LA RECENSIONE DEL MESE

Centro ricerche didattiche "U. Morin" biblioteca on line

Da molti anni, presso il Centro Ricerche didattiche "U. Morin" di Paderno del Grappa (Via San Giacomo 4, 31010 Paderno del Grappa, TV) è presente una delle biblioteche matematiche "moderne" più fornite oggi esistente in Italia. Recentemente è stato istituito anche un servizio in rete e quindi la biblioteca può essere visitata ormai da tutti i Soci e colleghi (sempre più numerosi) che navigano in Internet.

ACCESSO ALLA BIBLIOTECA:

http://www.filippin.it/morin

Nella home page del Centro tra le varie voci si trova "Biblioteca on line". Cliccando su di essa si ottiene l'ingresso nella biblioteca. Cliccando su "Consultare" appare la maschera di ricerca con le varie voci.

RICERCA DI LIBRI per

** titolo: basta anche digitare una parola del titolo;

** autore: basta anche solo una parte del nome o uno degli autori.

NB: digitando **RIVISTA** si ottiene tutto l'elenco delle riviste possedute dal Centro;

** collana: questo campo permette una gran varietà di ricerche, a secondo del comando digitato:

• **SMP** fornisce tutti i volumi dello School Mathematics Project.

• **ATTI** fornisce l'elenco di tutti gli atti di congressi, convegni, seminari.

• **PROGETTO** fornisce i quaderni del progetto strategico del CNR.

• **DIFF** fornisce l'elenco di tutti i quaderni preparati in Germania per la formazione a distanza dei docenti dalle elementari alle superiori.

• **VIDEO**: fornisce l'elenco delle video-cassette presenti.

• **DOCUMENTO**: fornisce l'elenco dei numerosi documenti ufficiali, di ricerca didattica, di esperienze raccolte in questi anni nel Centro.

Naturalmente, ottenuto l'elenco dei records tra i quali si trova quello cercato, basta cliccare sul nome in blu e si ottiene la maschera del record, contenente tutti i dati del libro, *compreso l'indice e in molti casi anche un breve cenno di recensione orientativa.*

PRESTITI:

I **Soci** possono ottenere in prestito uno o due libri per volta, per una durata limitata a due mesi al massimo, gratuitamente, se vengono a ritirarli di persona, oppure inviando la somma di L. 10 000 in francobolli, se i volumi devono essere spediti per posta.

I **non Soci** possono richiedere ugualmente libri in prestito, ma occorre che vengano a prelevarli in sede, versando una caparra (che verrà restituita alla resa del libro) variabile secondo il valore del libro.

La Biblioteca viene aggiornata almeno una volta al mese e, in certi periodi, anche ogni giorno.

Si ringraziano tutti coloro che segnaleranno errori di immissione nei titoli o negli autori e che suggeriranno migliori classificazioni DEWEY dei volumi.