CABRIRRSAE

Bollettino degli utilizzatori di CABRI-géomètre e di altri software matematici

Settembre 1999 - N. 21

S O M M A R I O

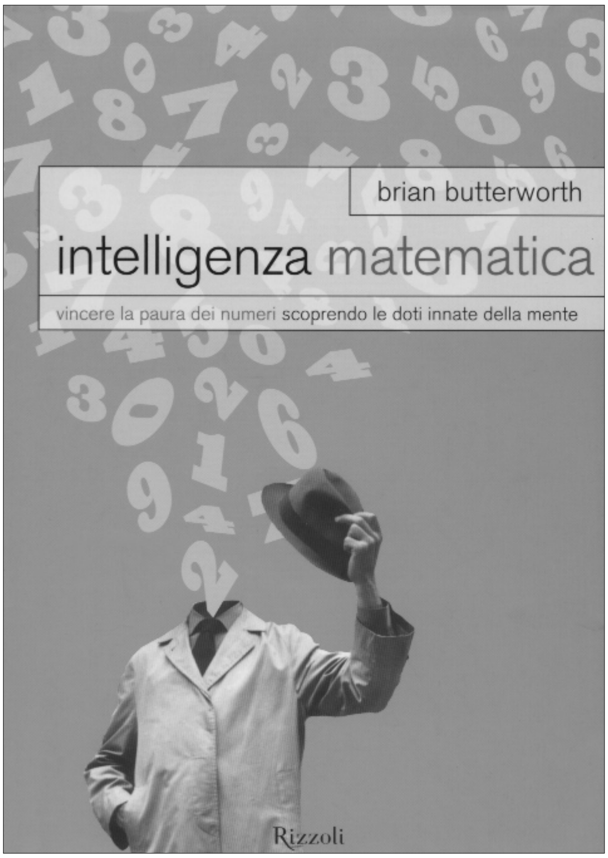
Indirizzo

Bollettino CABRI*RRSAE*
IRRSAE-Emilia Romagna
Via Ugo Bassi, 7 - 40121 Bologna
Tel. (051)22.76.69 - Fax (051)26.92.21
E-mail: cabri@arci01.bo.cnr.it
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/
Gruppo di discussione:
E-mail: cabrinews@arci01.bo.cnr.it

Fardiconto:
http://arci01.bo.cnr.it/fardiconto/
Flatlandia:
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/

La versione elettronica del bollettino è consultabile a questo indirizzo:
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/rivista.html

I.R.R.S.A.E.
Emilia-Romagna



Cabri discusso

Insegnare matematica con DERIVE

di Aurelia Orlandoni
ITCS G. Salvemini - Casalecchio di Reno - BO

Fra i "Computer Algebra Systems (CAS)" il software DERIVE non è certo il più completo e potente, ciononostante è uno dei più diffusi e utilizzati nell'insegnamento della matematica nella scuola superiore. Ha un costo contenuto, non richiede un hardware sofisticato, né grossa memoria e occupa poco spazio sul disco rigido, infine è di semplice utilizzo, soprattutto nella versione per Windows, attraverso un'interfaccia a icone. Ultimamente è anche presente un suo sottoinsieme nelle calcolatrici Texas TI-89 e TI-92 (quest'ultima contiene anche CABRI II).
L'uso di questi strumenti rende improrogabile una revisione della didattica della matematica sotto vari aspetti: l'approccio ai concetti, il "peso" dei contenuti tradizionali e la valutazione. Infatti anche il MPI ha avviato una sperimentazione controllata sull'uso dei CAS in classe, assegnando i finanziamenti per l'acquisto di TI-92, fornendo un supporto didattico ai docenti e istituendo un monitoraggio delle esperienze.

L'obiettivo che mi propongo è di riflettere su quale possa essere il guadagno formativo che deriva dall' utilizzo di DERIVE nel processo di insegnamento/apprendimento della matematica, senza soffermarmi sulle sue potenzialità tecniche, che ritengo sufficientemente note ai lettori di questa rivista.
Dal punto di vista dell'attività dell'insegnante può essere utilizzato sia come una lavagna molto potente, dinamica e duttile, sia come uno strumento per preparare esercitazioni, verifiche, schede di lavoro e materiali per interventi di recupero.
In Laboratorio gli studenti possono verificare soluzioni trovate in altro modo, "esplorare concetti" e tentare generalizzazioni (procedendo per ipotesi e ricerca di convalida o meno), risolvere problemi individuando un percorso controllabile, ridurre l'attività e il tempo dedicato al calcolo, concentrando l'attenzione sulle idee.
Ad un primo livello possono essere utilizzati semplicemente i comandi presenti nelle icone e le più semplici funzioni interne.
Già la scrittura di una semplice espressione come:

$$\left(a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)\left(\frac{1}{2b^2}-\frac{1}{2a^2}\right)$$

richiede allo studente la traduzione dal linguaggio algebrico abituale ad uno lineare, che comporta il riconoscimento della struttura dell'espressione stessa. Il controllo sulla correttezza è immediato, perché DERIVE la trascrive nel linguaggio algebrico tradizionale. Può sembrare un fatto banale, ma non dimentichiamo che gli studenti spesso sbagliano i calcoli con la calcolatrice, per un'inadeguata analisi strutturale ed un conseguente uso errato delle parentesi. Nel biennio si può proporre di risolvere equazioni, disequazioni e sistemi lineari, indicando i passaggi, in modo che lo studente possa concentrarsi sul procedimento più che sul calcolo ed utilizzare il comando *Solve* solo come verifica. Ad esempio:

#1: $3\cdot x-5=x+2$

#2: $(3\cdot x-5=x+2)+5$

#3: $3\cdot x=x+7$

#4: $(3\cdot x=x+7)-x$

#5: $2\cdot x=7$

#6: $\dfrac{2\cdot x=7}{2}$

#7: $x=\dfrac{7}{2}$

oppure

#8: $3\cdot x-2<5\cdot x+3$

#9: $(3\cdot x-2<5\cdot x+3)+2$

#10: $3\cdot x<5\cdot x+5$

#11: $(3\cdot x<5\cdot x+5)-5\cdot x$

#12: $-2\cdot x<5$

#13: $\dfrac{-2\cdot x<5}{-2}$

#14: $x>-\dfrac{5}{2}$

In questo modo lo studente è costretto ad applicare l'inverso additivo/moltiplicativo, per ottenere successive equazioni equivalenti, fino a determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione/disequazione.
Lo studio dell'algebra lineare, e in particolare del calcolo matriciale, viene spesso trascurato nell'insegnamento per ragioni di tempo e di complessità di calcolo. Calcolare il determinante di una matrice quadrata o determinarne l'inversa, o risolvere un sistema lineare col metodo di Gauss con carta e penna, crea grossi problemi ai nostri studenti, che possiedono sempre meno abilità di calcolo. DERIVE può essere un grosso aiuto, non solo

nei calcoli, ma anche nello studio delle proprietà delle matrici. Possiamo proporre agli studenti di studiare le proprietà delle operazioni fra matrici quadrate, ad esempio di ordine 2, a partire da esempi numerici, per poi passare alla generalizzazione:

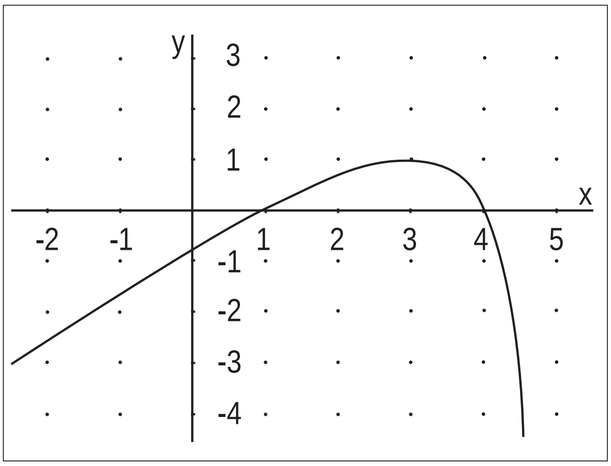
#1:
$$mat1 := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
#2:
$$mat2 := \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
#3:
$$mat3 := \begin{bmatrix} i & l \\ m & n \end{bmatrix}$$
#4:
$$mat1 + mat2 = mat2 + mat1$$
#5:
$$true$$
#6:
$$(mat1 + mat2) + mat3 = mat1 + (mat2 + mat3)$$
#7:
$$true$$
#8:
$$mat1 \cdot mat2 = mat2 \cdot mat1$$
#9:
$$\begin{bmatrix} b\cdot g = c\cdot f & a\cdot f + b\cdot h = b\cdot e + d\cdot f \\ c\cdot e + d\cdot g = a\cdot g + c\cdot h & c\cdot f + d\cdot h = b\cdot g + d\cdot h \end{bmatrix}$$

È necessario anzitutto che lo studente abbia chiaro che, per passare ad una generalizzazione, deve definire matrici non numeriche, poi deve scrivere le proprietà in linguaggio formale ed infine deve saper interpretare i risultati. Infatti l'ultima risposta costringe a riflettere sul fatto che il prodotto è in generale non commutativo, ma esistono casi particolari in cui lo è.

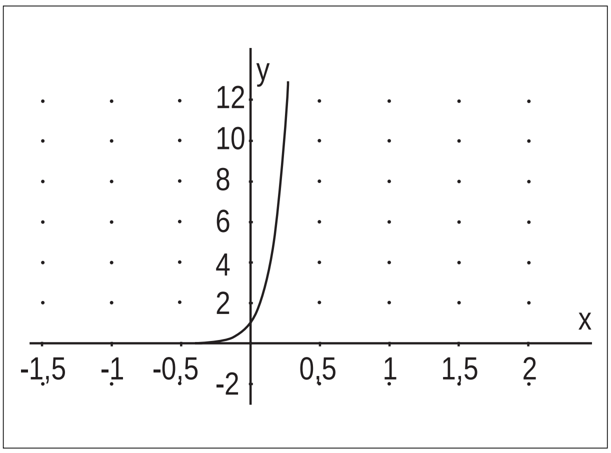
La possibilità di avere rappresentazioni grafiche immediate di funzioni, consente di proporre attività che richiederebbero tempi proibitivi con carta e penna, quali:

- Analisi del rapporto fra i parametri di retta e parabola e loro rappresentazione grafica;
- Significato geometrico delle soluzioni di un sistema in due variabili;
- Analisi del rapporto fra il grafico di una funzione e quello delle sue derivate prima e seconda;
- Studio del grafico di funzioni che contengono un parametro e inviluppi di curve;
- Rappresentazione di funzioni in due variabili;
- Relazione fra il grafico di una funzione *f(x)* e *f(x+k)*, *f(x)+k*, Ω*f(x)*Ω, …;
- Individuazione di una funzione a partire da un asse gnato grafico, o da una descrizione delle caratteristiche del grafico.

L'obiettivo di queste attività non è solo quello di avere a disposizione grafici in tempi rapidi, e quindi avere un valido aiuto per costruire immagini mentali di funzioni e per passare da una funzione ad una classe di funzioni, ma anche quella di sapere leggere ed interpretare i grafici forniti da DERIVE. Infatti gli studenti si fermano spesso alla "prima immagine", cioè ad un'immagine locale e parziale della funzione e ne deducono l'andamento generale. L'insegnante deve dare consegne precise, chiedere sempre di fare uno schizzo su carta del grafico e scegliere funzioni che creino qualche problema di interpretazione.
Ad esempio per il grafico della funzione:
$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$$
la prima immagine che compare è parziale, ma



la maggior parte degli studenti non si rende conto che, essendo il dominio della funzione R-{5}, è necessario un cambiamento di scala o l'utilizzo della modalità *Trace Mode*, per analizzare correttamente il grafico. La modalità *Trace Mode* vincola il cursore a muoversi sulla curva e risulta uno strumento molto utile nella fase di esplorazione del grafico.
Un altro esempio è il grafico della funzione: $e^{10x - x^2}$



Quest'immagine è accettata dagli studenti come il grafico completo della funzione, perché "ha l'andamento di un'esponenziale", senza riflettere sul fatto che in realtà esiste un massimo per $x = 5/2$.
Le conoscenze di analisi risultano quindi ancora fondamentali, non tanto per rappresentare il grafico di una funzione, ma per essere in grado di interpretare i grafici di DERIVE e scegliere la scala ottimale.
Come ho affermato all'inizio, DERIVE può essere utilizzato anche per fare congetture e/o confutarle.
Ad esempio, possiamo chiedere agli studenti di verificare la congettura di Fermat: *tutti i numeri della forma*

$$2^{2^n}+1$$

con n intero positivo, sono primi.

#1: $VECTOR\left[2^{2^n}+1, n, 1, 6\right]$

#2: $[5, 17, 257, 65537, 4294967297, 18446744073709551617]$

#3: FACTOR([5, 17, 257, 65537, 4294967297, 18446744073709551617], Rational)

#4 : $[5, 17, 257, 65537, 641 \cdot 6700417, 274177 \cdot 67280421310721]$

Come si può osservare, la congettura di Fermat è falsa: i primi 4 numeri sono primi, ma il quinto non lo è. Anche questa è una situazione che sarebbe improponibile con carta e penna. Esempi di questo genere sono anche importanti, perchè sottolineano l'importanza del controesempio, per dimostrare la falsità di un'affermazione.
Anche un uso elementare di DERIVE ha quindi una forte valenza didattica.
L'utilizzo degli elementi di programmazione consentono di definire funzioni ricorsive e di apprendere e utilizzare alcune strutture fondamentali di programmazione in modo immediato, con una sintassi molto semplice. E' possibile proporre esercizi che richiedano conoscenze minime di programmazione, stimolando gli studenti a riflettere sugli aspetti concettuali e procedurali dei problemi, senza grosse difficoltà sintattiche.
Per concludere voglio ricordare le *Utility*: cataloghi di funzioni direttamente utilizzabili dall'utente, che vanno ben oltre gli obiettivi dell'insegnamento nella scuola superiore, ma che possono essere utilizzati come "scatole nere" nella soluzione di particolari problemi.

Molte delle riflessioni e degli esempi proposti sono ampiamente ispirati ad attività proposte in vari corsi di aggiornamento dai professori G. C. Barozzi e S. Capuccio, che ringrazio per il contributo.
Infine ricordo che all'indirizzo
http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi/Net_Elenco_schede.tml
si trovano le schede di lavoro guidato per il corso di Matematica 1. Si tratta di materiale di esercitazione, parte da fare a mano, parte con l'ausilio di DERIVE, preparate da S. Cappuccio come complemento al corso di Matematica 1, svolto per il Consorzio Nettuno da G.C. Barozzi.

Come fare

media superiore

L'omologia con CABRI per introdurre alcune trasformazioni geometriche

di Bonarelli Roberta e Lamberti Laura
ITG Pacinotti, Bologna

Questo articolo nasce da una esperienza realizzata in un Istituto Tecnico per Geometri, maturata durante un corso di aggiornamento per insegnanti di matematica e disegno, con l'obiettivo di introdurre l'omologia nella scuola secondaria superiore tramite un lavoro interdisciplinare.
Le trasformazioni geometriche che si introducono in genere nel biennio della media superiore, ad esclusione della rotazione e di quelle ottenute mediante composizioni con essa, sono casi particolari dell'omologia, la trasformazione più significativa della geometria proiettiva. Può essere pertanto interessante introdurre queste trasformazioni: **traslazioni, simmetrie, omotetie e particolari affinità**, come sottoinsiemi delle trasformazioni omologiche. Ciò consente inoltre di rendere più semplice la costruzione grafica di trasformazioni di figure, in quanto sono riconducibili ad un'unica procedura: quella dell'omologica di una figura data, a patto che si introducano i concetti di punto e retta impropri, elementi che, d'altra parte, sono normalmente utilizzati in disegno, anche se chiamati punto di fuga e linea dell'orizzonte.
La possibilità di avere inoltre come foglio da disegno Cabri, permette di individuare con una certa immediatezza gli invarianti delle trasformazioni prese in esame.
Uno spunto semplice ed intuitivo, per introdurre in un biennio alcuni concetti riguardanti l'omologia e le trasformazioni che ad essa si possono ricondurre, è dato dalla formazione dell'ombra di un oggetto.
Supponiamo, per esempio, di avere una finestra rettangolare, con una grata, in una data parete, una lampada non appartenente alla parete e l'ombra che si produce sul pavimento. Semplifichiamo e schematizziamo tale situazione reale mediante un modello geometrico e chiamiamo figura **F** la finestra, figura **F'** la sua ombra, piano π la parete, piano α il pavimento e punto S la sorgente luminosa (fig.1a).

Mediante un ribaltamento, possiamo riportare le due figure su di uno stesso piano: facciamo quindi ruotare il piano α di 1/4 di giro, in modo che vada a sovrapporsi al piano π, detto quadro, e, nello stesso senso di rotazione, anche il punto S, fino a quando non appartiene anch'esso al quadro e lo chiamiamo O. Si viene così a determinare una corrispondenza fra i due piani coincidenti, π ed α e, in particolare, fra i punti della finestra F e della sua ombra ribaltata, che per semplicità continuiamo a chiamare F'(fig.1b).

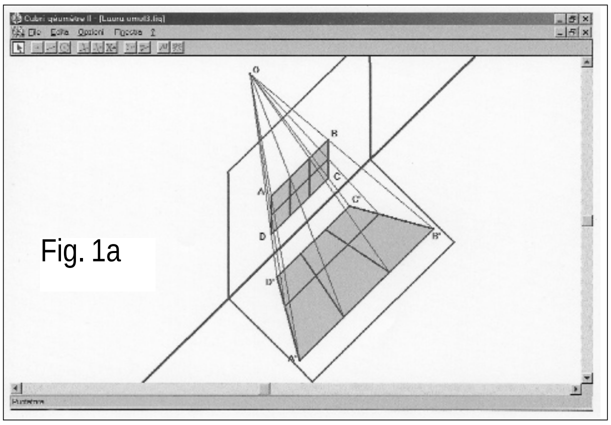


Fig. 1a

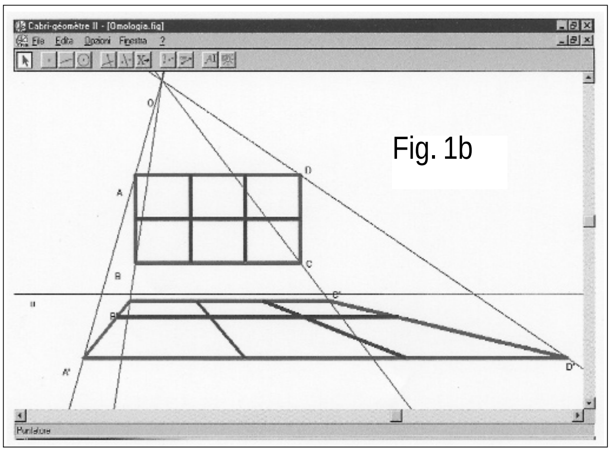


Fig. 1b

La trasformazione geometrica che consente di ottenere F' a partire da F è un'**omologia**:

Osservando la fig.1b, supportata dalla genesi spaziale (fig.1a), si possono fare alcune considerazioni:

- la corrispondenza che ad ogni punto di F associa la sua ombra in F' è biunivoca e trasforma rette in rette (collineazione),
- c'è un punto **O**, proiezione di S sul quadro, centro di un fascio di rette congiungenti punti corrispondenti e pertanto unite,
- c'è una retta **u** proiezione della retta intersezione fra α e π che coincide con se stessa e pertanto è luogo di infiniti punti uniti in cui si tagliano rette corrispondenti.

Queste proprietà caratterizzano l'omologia e sono fondamentali per la costruzione di figure omologiche: due punti corrispondenti sono allineati con O, detto centro dell'omologia e due rette corrispondenti si tagliano sulla retta u detta asse dell'omologia. Si può dimostrare che un'omologia è univocamente determinata dal centro, dall'asse e da due elementi distinti corrispondenti. Pertanto la costruzione di un'omologia, sia con carta e matita che con Cabri, può essere determinata conoscendo soltanto queste poche informazioni .

Vediamo ora che cosa succede se, sempre pensando alla finestra F, la sorgente luminosa si allontana sempre più, in modo che il cono di raggi luminosi diventi un cilindro o, come si definisce in geometria proiettiva, il centro del fascio diventa un punto improprio. Il sole, ovviamente, ci offre un ottimo esempio per immaginare tale realtà.

Proviamo a spostare il centro al limite di un bordo del foglio: il fascio di centro O tende a diventare improprio e le rette dei punti corrispondenti tendono a diventare parallele.

Volendo che il centro sia un punto improprio, le rispettive rappresentazioni diventano:

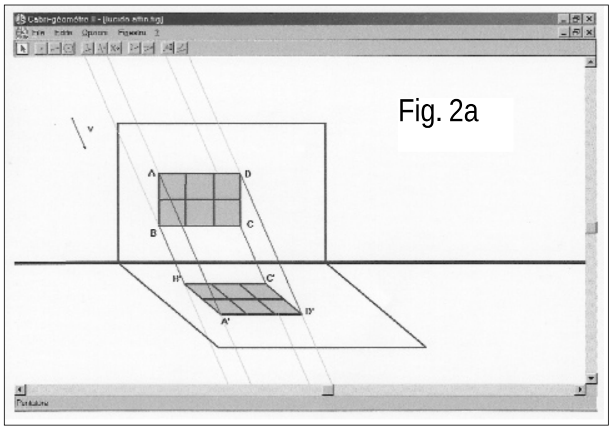


Fig. 2a

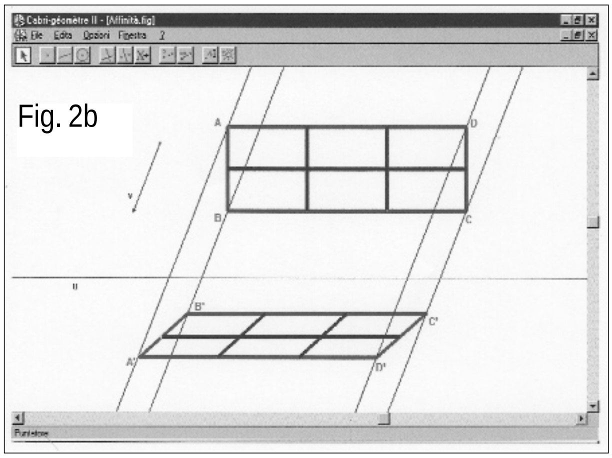


Fig. 2b

La figura 2b è ancora un'omologia, in essa però il centro è diventato un punto improprio; le rette contenenti punti corrispondenti sono quindi parallele e si parla in tal caso di **omologia affine** o **affinità omologica**.

Vediamo ora come costruire l'immagine di un punto in una affinità omologica, ricordando che per poterla univocamente individuare, è necessario conoscere centro, asse ed una coppia di elementi corrispondenti, per esempio due punti A ed A'.

Facciamo prima alcune considerazioni: essendo il centro improprio, l'informazione relativa ad esso è implicita nella direzione d di un vettore, e quindi i punti A e A', scelti arbitrariamente, devono appartenere ad una retta di direzione d e tutte le rette contenenti punti corrispondenti dovranno avere anch'esse direzione d.

Dati quindi un vettore v, l'asse u, una coppia di punti corrispondenti A ed A', tali che la retta AA' sia parallela a v, ed un generico punto B, determiniamo il punto B', corrispondente di B nell'affinità omologica:

1. si costruisce la retta r per B parallela alla retta AA',
2. si costruisce la retta AB e si determina l'intersezione H con l'asse, (se AB è parallela all'asse l'intersezione è il punto improprio dell'asse),
3. si costruisce la retta HA', corrispondente di AB,
4. si determina l'intersezione di HA' con la retta r: poiché ad elementi che si appartengono corrispondono elementi che si appartengono, tale punto intersezione sarà B'.

Ovviamente tale procedura dev'essere ripetuta per la costruzione di tutti i punti necessari per disegnare l'immagine di una data figura. Pertanto utilizzando Cabri, si può creare una macro che, assegnati come oggetti iniziali l'asse, il vettore che definisce una data direzione, la coppia di punti corrispondenti A ed A' ed il punto B, fornisca come oggetto finale il punto B', corrispondente di B nell'affinità omologica.

Costruito il nostro disegno con Cabri, cambiamo la direzione del vettore, finché, come caso particolare esso sia perpendicolare all'asse: in tal caso si parla di affinità omologica ortogonale (fig. 3). Proviamo inoltre, nell'affinità ortogonale, a spostare il punto A oppure A', sulla retta AA', in modo che le distanze dall'asse dei due punti corrispondenti siano uguali: in tal caso ritroviamo la **simmetria assiale** (fig.4).

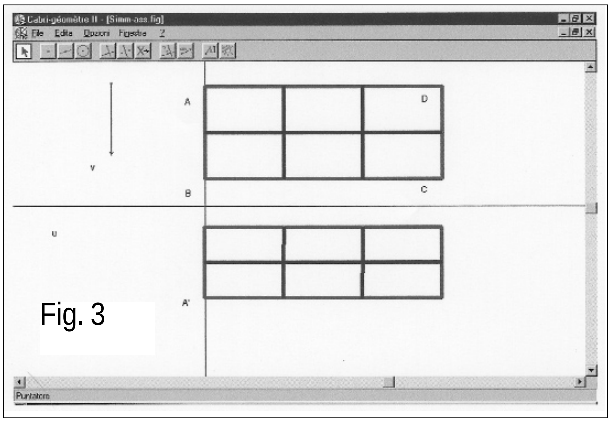


Fig. 3

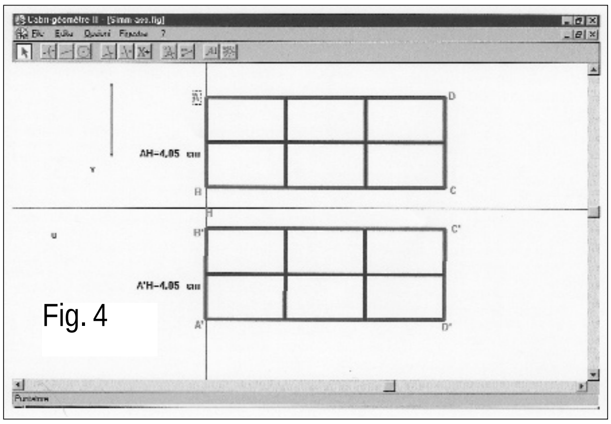


Fig. 4

Supponiamo adesso di avere la solita finestra F nella parete π, la sorgente luminosa puntiforme esterna ad essa e l'ombra che si produce, anziché sul pavimento, su una parete α, parallela al piano π. In questo caso, essendo i piani paralleli, la loro intersezione è una retta impropria e pertanto l'asse dell'omologia, che rappresenta nel disegno tale intersezione, è diventato un elemento improprio: rette corrispondenti, quindi, saranno parallele, dovendosi tagliare su una retta impropria (fig. 5a). Questa volta, essendo i piani paralleli, per riportare le due immagini su di uno stesso piano, effettuiamo una traslazione che porti il piano α a sovrapporsi al quadro π e, nella stessa direzione, trasliamo anche la sorgente S su π chiamando O il suo corrispondente (fig.5b).

In questo caso l'omologia che si viene a determinare presenta la particolarità di avere l'asse improprio e pertanto rette corrispondenti sono parallele. Siamo di fronte all' **omotetia**.

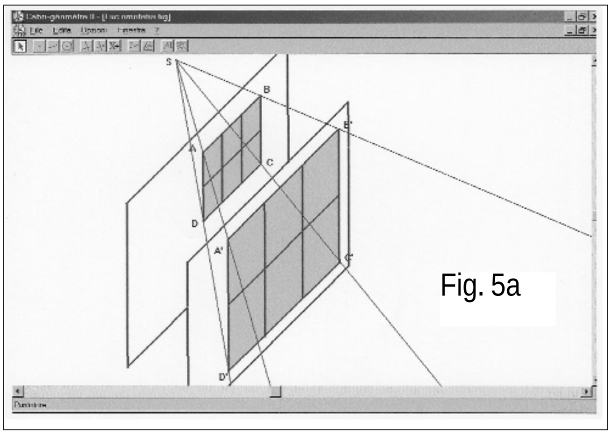


Fig. 5a

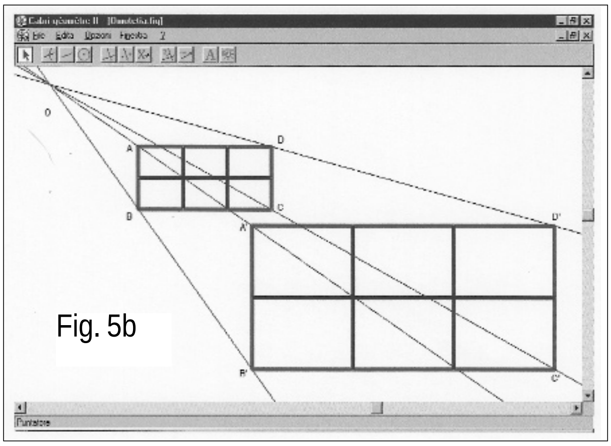


Fig. 5b

Si può riconoscere nella fig.5b, l'omotetia di centro O.

Costruiamo ora l'immagine di un punto in una omotetia di centro O, ricordando che, in questo caso, l'asse è improprio e pertanto, pur non potendolo disegnare, deduciamo che due rette corrispondenti devono essere parallele. Dati quindi un centro O, una coppia di punti corrispondenti A ed A', allineati con il centro ed un generico punto B, determiniamo il punto B', corrispondente di B nell'omotetia:

1. si costruisce la retta AB, r
2. si costruisce la retta parallela ad AB e passante per

A’, r’
3. si costruisce la retta OB,
4. si determina l’intersezione fra le rette OB e r’: poiché ad elementi che si appartengono, corrispondono elementi che si appartengono, tale punto intersezione sarà B’.

Anche in questo caso possiamo creare una macro che, assegnati come oggetti iniziali il centro, la coppia di punti corrispondenti A ed A’ ed il punto B, fornisca come oggetto finale il punto B’, omotetico di B .
Costruito il disegno con Cabri, proviamo a modificare la posizione di A o di A’, in modo che si trovino da parti opposte rispetto ad O e alla stessa distanza dal centro: possiamo ritrovare la **simmetria di centro O**. (fig.6)

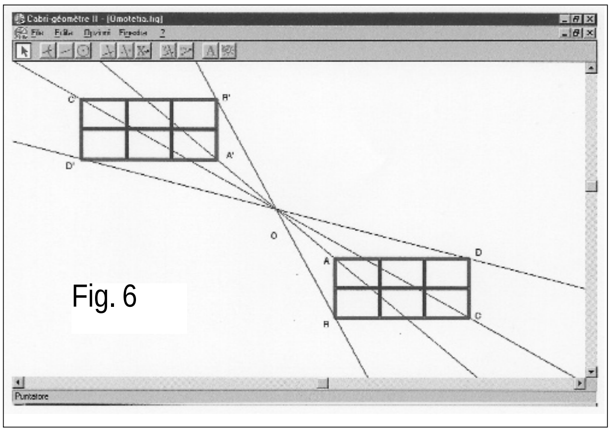


Fig. 6

Infine come ultimo caso, supponiamo di avere la solita finestra, ma come sorgente luminosa il sole (fig.7a). Proviamo quindi a spostare il centro al limite di un bordo del foglio: rette contenenti punti corrispondenti tendono a diventare parallele. La corrispondenza che nasce non è altro che la traslazione (fig. 7b). Anche questa isometria è un caso particolare di omologia, in cui centro ed asse sono entrambi impropri.

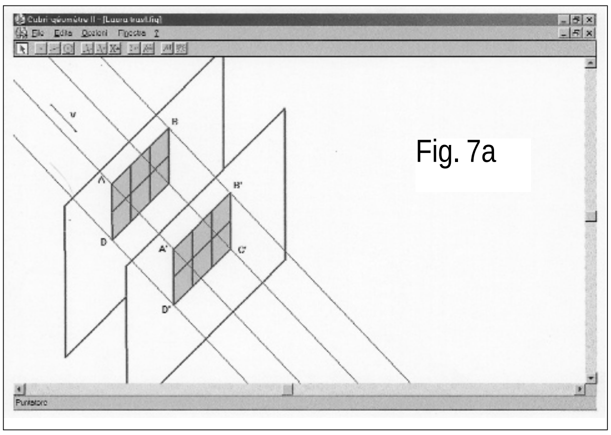


Fig. 7a

Costruiamo ora l’immagine del traslato di un punto, ricordando che, in questo caso, essendo il centro improprio, rette contenenti coppie di punti corrispondenti saranno parallele ad un dato vettore v, essendo anche l’asse improprio, rette corrispondenti saranno parallele.
In questo caso quindi è sufficiente assegnare un vettore v, una coppia di punti corrispondenti A ed A’, tali che

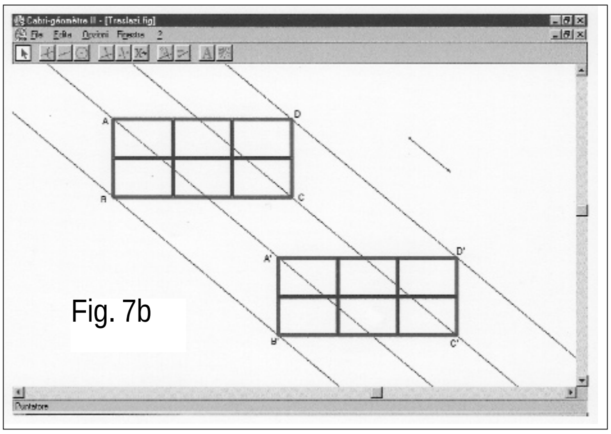


Fig. 7b

AA’ sia parallela a v ed un generico punto B, per poter determinare il punto B’, corrispondente di B nella traslazione:
1. si costruisce la retta AA’,
2. si costruisce la retta AB,
3. si costruisce la retta r parallela ad AB e passante per A’,
4. si costruisce la retta r’ parallela ad AA’ e passante per B,
5. si determina l’intersezione fra le rette r ed r’: poiché ad elementi che si appartengono corrispondono elementi che si appartengono, tale punto intersezione sarà B’.

La macro, che permette di costruire il traslato di un generico punto, è quella che ha come oggetti iniziali il vettore v, la coppia di punti corrispondenti A ed A’ ed il punto B, e come oggetto finale il punto B’.

La costruzione dei disegni dovrebbe mettere maggiormente in risalto quanto detto inizialmente: le procedure che abbiamo introdotto per le varie trasformazioni fanno riferimento ad un’unica matrice, che è quella relativa alla costruzione dell’omologia, avendo chiari i concetti di punto e retta impropri. In ognuno dei casi analizzati infatti, l’importanza del fatto che asse o centro siano elementi propri od impropri, si ripercuote sul comportamento di punti e rette corrispondenti. Se il centro è improprio rette che contengono punti corrispondenti sono parallele, come appunto avviene nell’affinità omologica e nella traslazione, così come se l’asse è improprio, rette corrispondenti sono parallele, come accade nell’omotetia e ancora nella traslazione .
Oltre a fornire un valido aiuto per la costruzione della figura immagine, tutto ciò può essere utile anche per fare il percorso a ritroso e scoprire l’eventuale trasformazione geometrica che lega due date figure piane. Il seguente diagramma di flusso (fig. 8) schematizza la procedura necessaria per risolvere quest’ultimo problema, mettendo in risalto come la maggior parte delle trasformazioni che si introducono nella scuola, siano casi particolari dell’omologia.
Un altro aspetto sicuramente interessante delle trasformazioni geometriche è legato allo studio degli **invarianti**, sia perché consente di individuare proprietà *uguali* fra figure *diverse*, sia perché permette di sostituire figure complesse ad altre più semplici, la cui analisi o

rappresentazione è meno problematica. Riguardo a ciò, la possibilità di far analizzare ai ragazzi figure omologiche mediante Cabri, ci sembra estremamente utile, in quanto la dinamicità del software, oltre a permettere di intuire come le varie trasformazioni siano casi particolari dell'omologia, fornisce una certa immediatezza nella individuazione delle proprietà invarianti

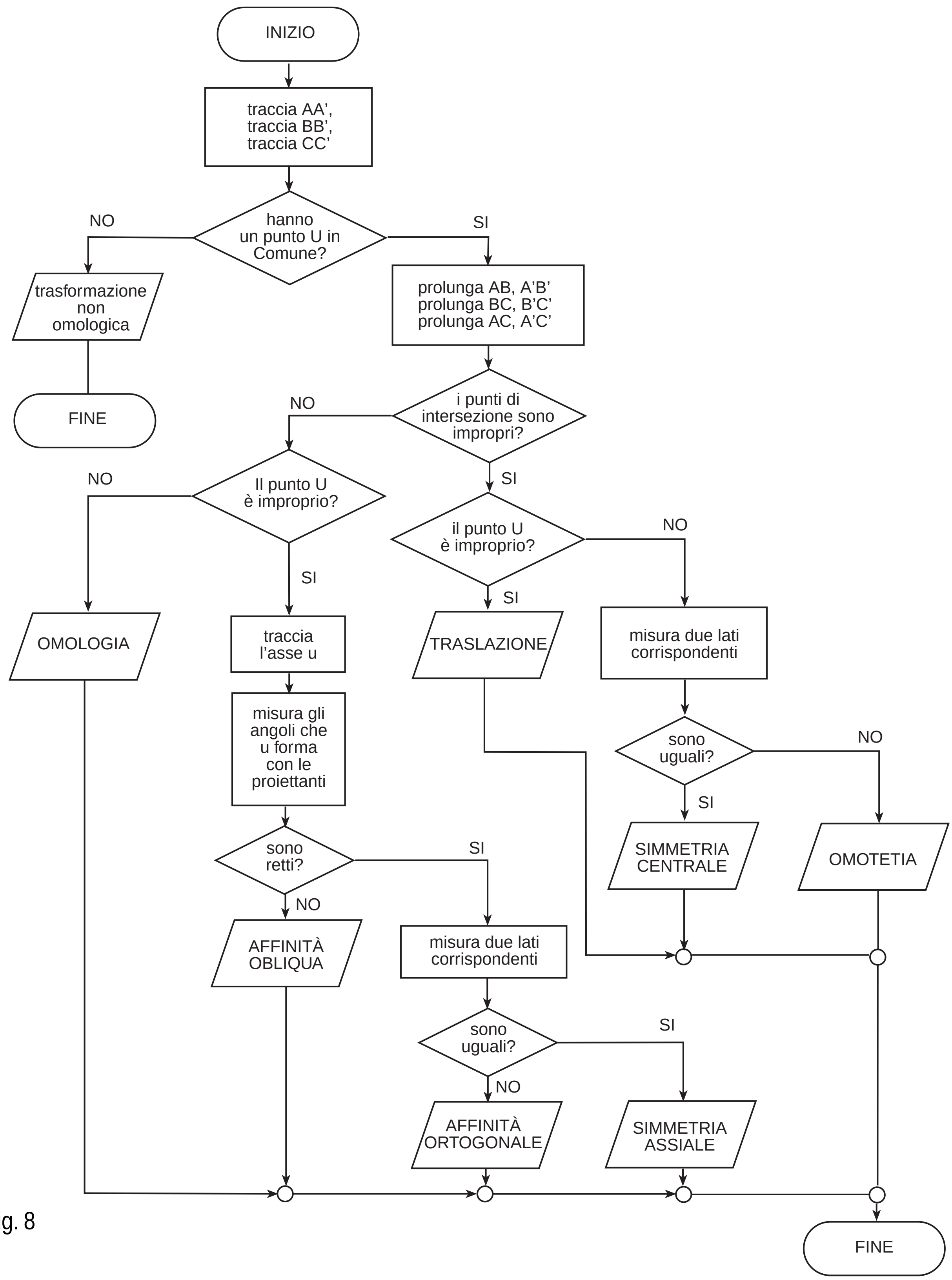


Fig. 8

Individuazione della corrispondenza fra due triangoli ABC e A'B'C'.

Trisezione dell'angolo e costruzione dell'ettagono regolare:

realizzazione con CABRI del percorso indicato da Viète nel "Supplementum Geometriae"

di Francesca Cellamare e Grazia Indovina
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Università di Palermo

Le pagine seguenti nascono come lezione conclusiva di un percorso didattico dedicato alle costruzioni euclidee ed in particolare ai poligoni regolari inscrittibili con riga e compasso in una circonferenza. Nelle unità didattiche precedenti a questa, dopo un discorso teorico sulle costruzioni elementari in generale e su quali fossero i poligoni regolari costruibili con riga e compasso, gli studenti, con l'aiuto del CABRI, hanno realizzato le seguenti costruzioni: triangolo equilatero, quadrato, sezione aurea, pentagono ed esagono regolare. E' venuta fuori in maniera del tutto naturale, l'esigenza di trovare un modo per la costruzione con CABRI dell'ettagono regolare. In questo contesto ci è sembrato opportuno, tra tutti i percorsi possibili, scegliere quello indicato da Viète nel *Supplementum Geometriae*, dove, il continuo ricorso nelle dimostrazioni alla teoria delle proporzioni, rende evidente l'importante operazione teorica svolta da Viète nello stabilire uno stretto legame tra l'algebra e la geometria. Risulta inoltre molto chiaro e naturale il collegamento stretto tra la costruzione dell'ettagono regolare e la trisezione dell'angolo. Tale percorso ci è sembrato il più vicino allo spirito euclideo e quindi il più adatto al discorso didattico che avevamo svolto sino a quel momento. Nel "Supplementum", infatti, Viète non si serve di ingegnosi strumenti atti a trisecare l'angolo e costruire l'ettagono, ma si limita semplicemente ad ampliare i 5 postulati euclidei con un nuovo postulato, "che è in grado di sopperire a quella che probabilmente è la carenza logica più grave della geometria euclidea, l'assenza di un postulato di continuità" (cfr. A.Brigaglia e P.Nastasi 1986 pg.105). In relazione alla polemica, nata recentemente in seguito ad un articolo comparso sul numero 18 del bollettino CABRI*RRSAE*, nella quale è stata coinvolta la lista Cabrinews, vogliamo precisare che la scelta fatta non è motivata dalla ricerca della "migliore" costruzione possibile, ma dall'esigenza didattica di sottolineare il collegamento tra le tre cose seguenti: l'inserzione, la trisezione dell'angolo e la costruzione dell'ettagono regolare. Questa nota è dunque una realizzazione con Cabri di alcune delle proposizioni del *Supplementum Geometriae* di Viète (1540-1602).
In essa viene affrontato e risolto, seguendo le indicazioni di Viète, il problema della trisezione dell'angolo e della conseguente costruzione dell'ettagono regolare inscritto in una circonferenza.
Naturalmente, trattandosi di costruzioni realizzate "a occhio", non è possibile trasformarle in macrocostruzioni. Ricordiamo comunque che una macrocostruzione "trisezione dell'angolo" si trova tra le macro fornite con il software dai suoi realizzatori.
Sempre seguendo lo schema vietiano, il percorso didattico potrebbe essere completato mostrando il collegamento tra le costruzioni geometriche realizzate e la risoluzione delle equazioni di terzo grado.
Per ogni proposizione viene indicata tra parentesi la relativa collocazione nel *Supplementum Geometriae.*

Postulato (postulatum)

Per sopperire alle deficienze della geometria si conviene che:

- E' possibile da un punto qualunque tracciare una retta che intersechi due rette date in modo tale da inserire tra le due rette un segmento che abbia lunghezza uguale a quella di un segmento precedentemente inserito tra le due rette.

Sebbene quando si tracciano rette sia necessario avere prima definito due punti, qui il secondo punto è sostituito dalla prestabilita distanza tra due punti presi rispettivamente su ciascuna delle due rette.

- E' possibile, date due rette incidenti, tracciare da un punto qualunque (diverso dal punto di incidenza delle due rette) una retta che intercetti sulle due rette date un segmento di lunghezza qualsivoglia.
- E' possibile, data una circonferenza ed una retta incidenti, tracciare da un punto qualunque, interno alla circonferenza data o su di essa, un'altra retta che intercetti tra la circonferenza e la retta data un segmento di lunghezza predefinita

Proposizione 1 (VIII)

Se esiste un triangolo isoscele ABC di base BC, e un segmento CD uguale al lato obliquo del triangolo, il cui estremo D giaccia su BA o sul suo prolungamento, allora l'angolo DCE è il triplo dell'angolo di base del triangolo isoscele dato.

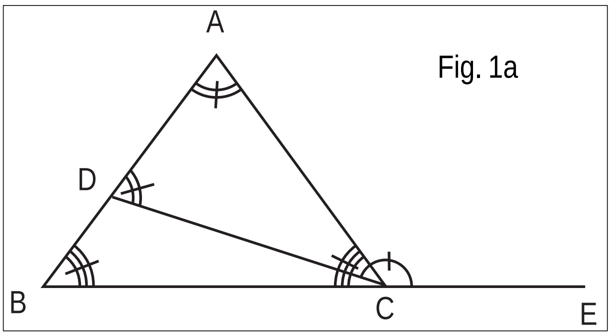


Fig. 1a

La dimostrazione si basa sulle seguenti proprietà: la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti; gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali; l'angolo esterno è uguale alla somma degli

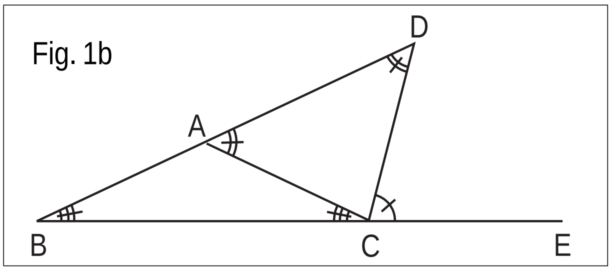


Fig. 1b

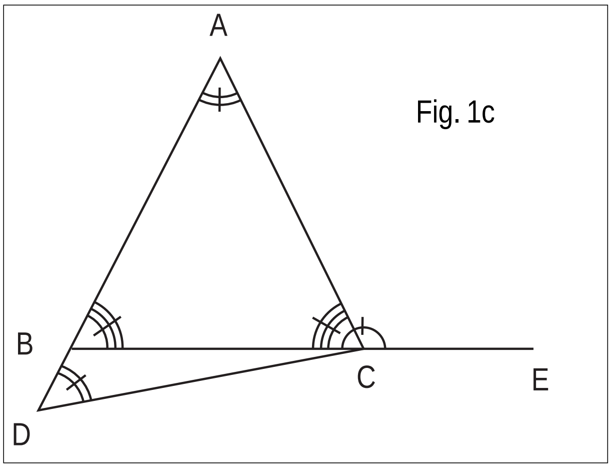


Fig. 1c

angoli interni non adiacenti.

Osservazione: Escluso il caso banale del triangolo equilatero, le tre figure precedenti illustrano i tre casi possibili. La realizzazione al Cabri (cfr. fig.1.d) è la seguente:

Comando utilizzato	**Specificazione**	**Oggetto costruito**
Segmento		Segmento BC
Asse	Del segmento BC	Retta r
Punto su un oggetto	Su r	Punto A
Segmento		Segmento AB
Segmento		Segmento AC
Circonferenza	Di centro C e passante per A	Circonferenza K
Retta	Passante per A e B	Retta s
Intersezione di due oggetti	Di K con s	Punto D
Segmento		Segmento CD
Retta	Passante per B e C	Retta t
Punto su un oggetto	Sulla retta t	Punto E

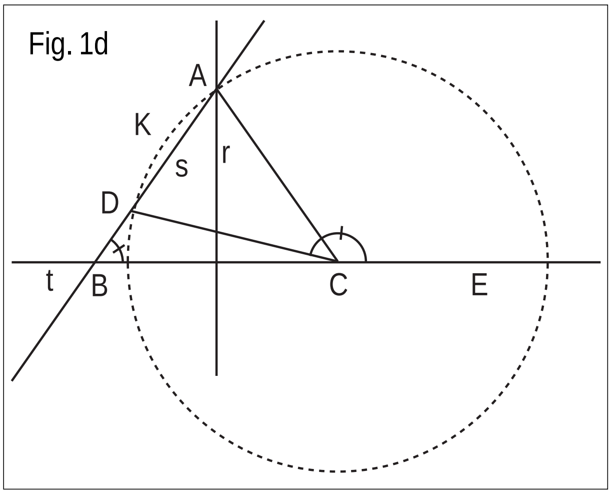


Fig. 1d

Per realizzare le tre diverse configurazioni, basta far scorrere con la manina il punto A sulla retta r. Per segnare gli angoli, si può utilizzare il comando: “Segna un angolo”. Segnare gli angoli risulta molto utile, per evitare che nascano equivoci, quando li vogliamo misurare.

Proposizione 2 (IX)

Trisezione di un angolo dato.

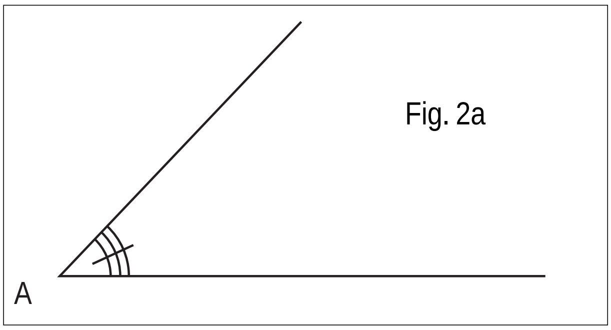


Fig. 2a

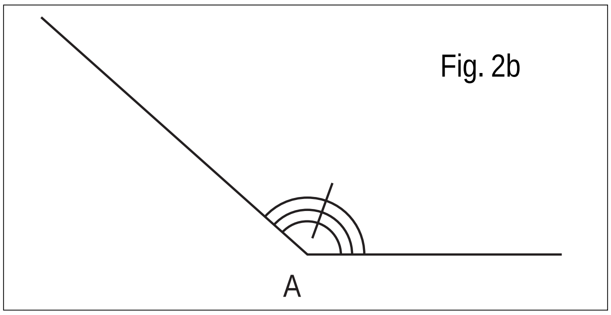


Fig. 2b

Sia Â l’angolo da trisecare. La realizzazione con Cabri è la seguente:

Comando utilizzato	**Specificazione**	**Oggetto costruito**
Circonferenza	Di centro A e raggio arbitrario	Circonferenza K
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza con un lato dell’angolo Â	Punto B
Retta	Per A e B	Retta r
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza con la retta r	Punto C
Punto su un oggetto	Su K	Punto H
Intersezione di due oggetti	Della circonferenza K con l’altro lato dell’angolo Â	Punto D
Retta	Passante per H e D	Retta s
Intersezione di due oggetti	Della retta r e della retta s	Punto L

Far scorrere con la manina il punto H sulla circonferenza K in modo che L giaccia sulla circonferenza K’ di centro H e passante per A. L’angolo ALD (segnato in figura) è l’angolo cercato.

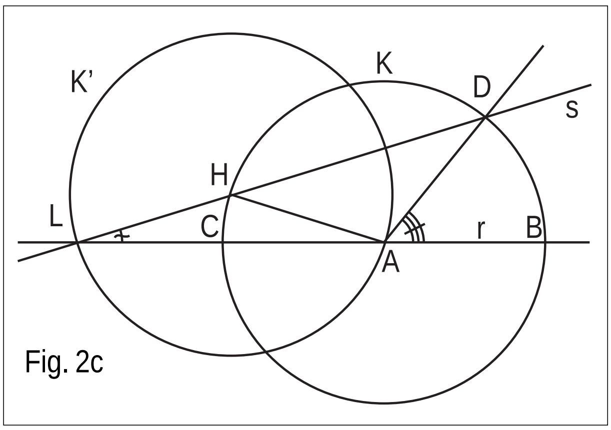


Fig. 2c

La figura precedente illustra il caso di un angolo acuto. Questa costruzione, che altro non è se non la costruzione di Archimede, è già stata proposta sul Bollettino CABR*IRRSAE* n.16 da Renato Verdiani.
Nel caso di un angolo ottuso la figura sarà la seguente:

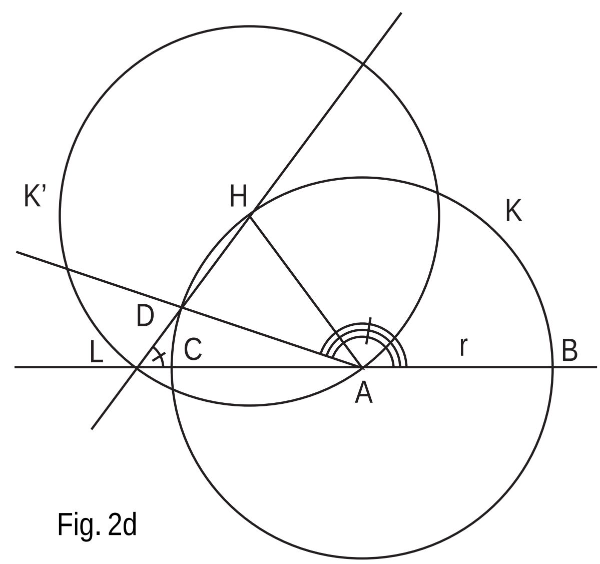


Fig. 2d

Dimostrazione:
Basta tracciare il segmento AH e applicare la Proposizione 1 al triangolo isoscele AHL.

Proposizione 3 (XIX)

Data una circonferenza è possibile prolungare il suo diametro in maniera tale che il prolungamento stia al raggio più il prolungamento, come il quadrato del raggio sta al quadrato del diametro con il suo prolungamento.
Con riferimento alla figura: $IB:IA=AB^2:IC^2$

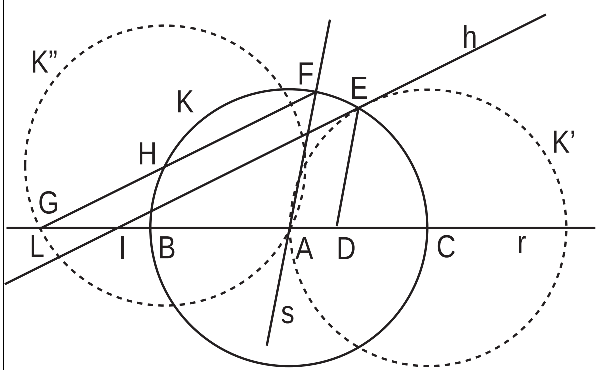


Fig. 3d

Gli oggetti iniziali sono la circonferenza K di centro A e un suo diametro BC.
La realizzazione con Cabri è la seguente:

Comando utilizzato	Specificazione	Oggetto costruito
Macro: Trisezione di un segmento	Del segmento BC	Punto D (scelto dalla parte di C)
Circonferenza	Di centro C e passante per A	Circonferenza **K'**
Intersezione di due oggetti	Di **K** e **K'**	Punto E
Segmento		Segmento ED
Retta parallela	Passante per A e parallela a ED	Retta s
Intersezione di due oggetti	Di s e **K**	Punto F
Segmento		Segmento AF
Retta	Passante per B e C	Retta r
Punto su un oggetto	Su r dalla parte opposta di A, rispetto a B	Punto G
Segmento		Segmento FG
Intersezione di due oggetti	Di **K** con il segmento FG	Punto H
Circonferenza	Di centro H e passante per A	Circonferenza **K"**
Intersezione di due oggetti	Di **K"** con r	Punto L
Spostare G con la manina fino a farlo coincidere con L		
Retta parallela	Passante per E e parallela a FG	Retta h
Intersezione di due oggetti	Di h ed r	Punto I
Segmento		Segmento IB

Il segmento IB è il prolungamento cercato.
Per la verifica si veda il Viète, 1970, pagg. 251, 252.
Osservazione: Il punto F deve essere scelto dalla stessa parte (rispetto ad r) del punto E.

Proposizione 4 (XX)

E' possibile costruire un triangolo isoscele in cui la differenza tra la base e uno dei due lati obliqui sta alla base come il quadrato di uno dei lati obliqui sta al quadrato della somma della base con uno dei due lati obliqui. Con riferimento alla figura: $IB:IA=AB^2:IC^2$

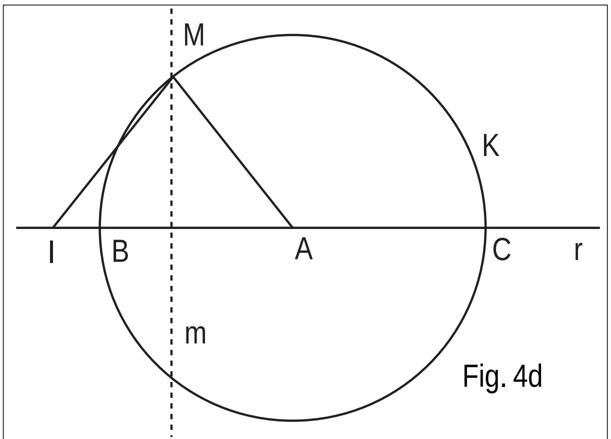


Fig. 4d

Il triangolo si costruisce facilmente, a partire dal prolungamento del diametro BC, realizzato nella costruzione precedente.

Comando utilizzato	Specificazione	Oggetto costruito
Segmento		Segmento IA
Asse	Del segmento IA	Retta m
Intersezione di due oggetti	Di K con m	Punto M
Triangolo		Triangolo AIM

Il triangolo AIM è il triangolo isoscele cercato.

Proposizione 5 (XXI)

In un triangolo isoscele in cui la differenza tra la base e

uno dei due lati obliqui sta alla base come il quadrato di uno dei lati obliqui sta al quadrato della somma della base con uno dei due lati obliqui, un segmento uguale al lato obliquo che congiunge uno spigolo di base con un punto del lato opposto divide l'angolo di base in due parti uguali.
Si parte dalla figura costruita prima.

Comando utilizzato	**Specificazione**	**Oggetto costruito**
Intersezione di due oggetti	Di **K** con IM	Punto F
Segmento		Segmento AF

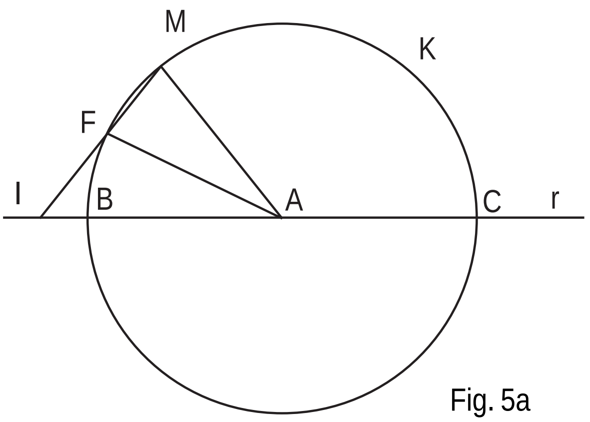


Fig. 5a

La dimostrazione si ottiene dopo aver ricavato dalle ipotesi la proporzione
IF : IM = IA : IC
che ci assicura che i triangoli FIA e MIC sono simili. (cfr. fig.5.b). Di conseguenza gli angoli $I\hat{A}F$ e $I\hat{C}M$ sono uguali e i lati AF e CM paralleli. Gli angoli $M\hat{A}F$ e $A\hat{M}C$ sono uguali e la tesi segue immediatamente dal fatto che il triangolo MAC è isoscele.

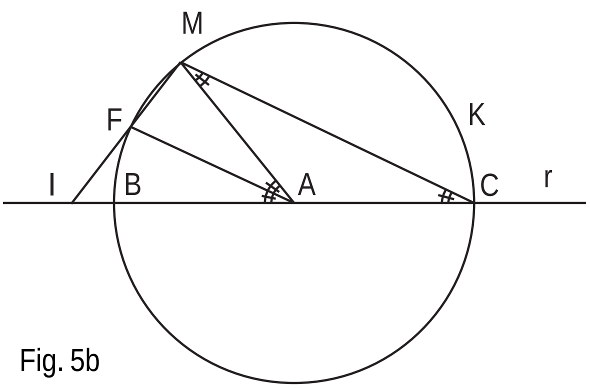


Fig. 5b

Proposizione 6 (XXII)

L'angolo al vertice di un triangolo isoscele, in cui si possa condurre da uno dei vertici di base al lato opposto un segmento di lunghezza uguale al lato obliquo che biseca l'angolo alla base, è una volta e mezza ciascuno degli angoli di base.

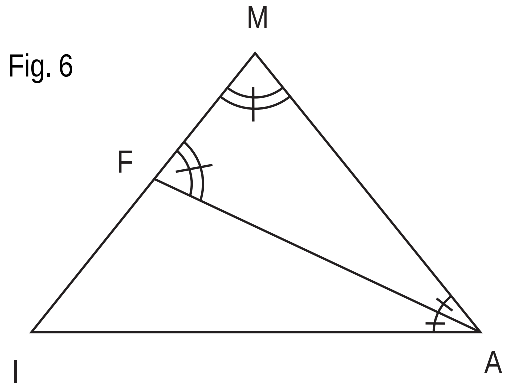


Fig. 6

Con riferimento alla figura si vede facilmente che:
$I\hat{M}A=3/2M\hat{A}I=3/2A\hat{I}M$

Proposizione 7 (XXXIII)

Sia dato un triangolo isoscele ABC il cui angolo al vertice è una volta e mezza ciascuno degli angoli di base e in cui ci sia un segmento uguale al lato obliquo che unisce il vertice di base C con un punto D del lato opposto. Nel triangolo isoscele ACD ciascuno degli angoli di base è il triplo del vertice.

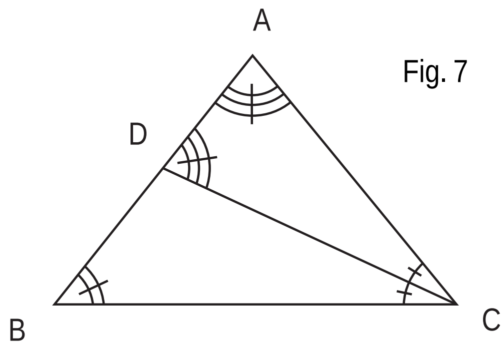
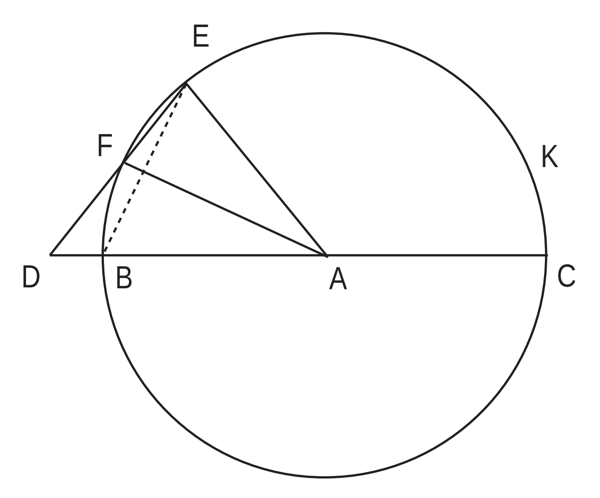


Fig. 7

Con riferimento alla figura:
$D\hat{A}C=A\hat{D}C=3A\hat{C}D$

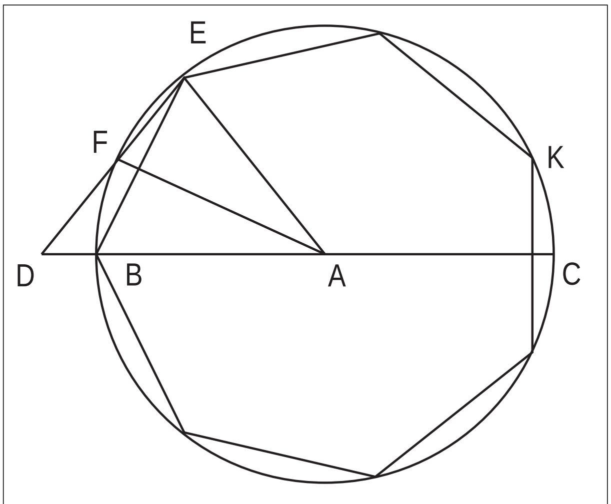
Proposizione 8 (XXIV)

Inscrivere un ettagono regolare in un cerchio dato.
Sia A il centro del cerchio e BC un suo diametro. Si prolunghi CB dalla parte di B in modo tale che DB stia a DA come il quadrato di AB al quadrato di DC, e sia E un punto sulla circonferenza tale che DE sia uguale al raggio.
Il segmento EB sarà il lato dell'ettagono cercato.
Infatti, indichiamo con F il punto in cui il segmento DE interseca la circonferenza e tracciamo i raggi AE ed AF. Il triangolo DEA è isoscele ed è tale che la differenza tra la base e il lato obliquo sta alla base come il quadrato del lato obliquo sta al quadrato della somma del lato obliquo e della base. Quindi AF, che è uguale al lato AE, divide l'angolo EAD in due parti uguali, ciascuna delle quali è la settima parte di due retti. Da cui l'angolo EAD è la settima parte di quattro retti. L'arco BE è dunque la settima parte dell'intera circonferenza.



Ne consegue che B ed E sono due vertici consecutivi dell'ettagono regolare.
Costruiamo con Cabri l'ettagono regolare a partire dalla Figura precedente:

Comando utilizzato	Specificazione	Oggetto costruito
Poligono regolare	Di centro A e primo vertice B	Ettagono regolare



Bibliografia

[1] A. Brigaglia e P. Nastasi, Le ricostruzioni apolloniane in Viète e in Ghetaldi, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche,* vol. VI (1986) fasc. 1

[2] L. Conti (a cura di), La Matematizzazione dell'Universo; *Momenti della cultura matematica tra '500 e '600,* Edizioni Porziuncola 1992

[3] P. Freguglia, Algebra e geometria in Viète, *Bollettino di storia delle Scienze Matematiche,* vol.IX (1989) fasc. 1

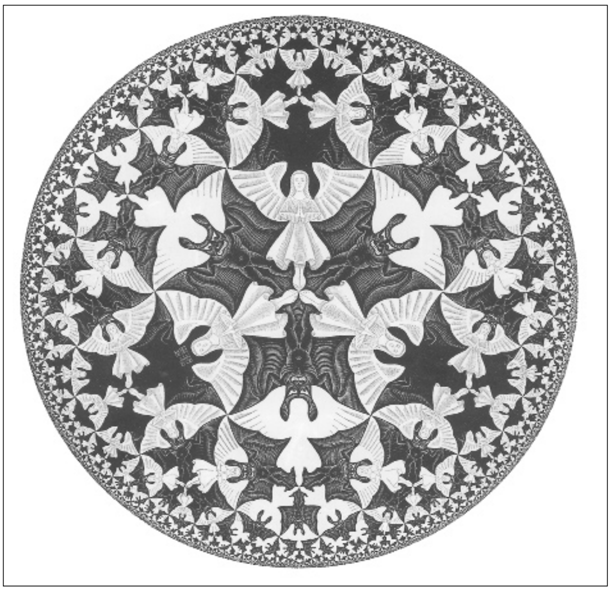
[4] F. Viète, *Opera Matematica*, Georg OlmsVerlag, 1970

[5] R. Verdiani, Trisettore di Pascal, *Bollettino CABRIRRSAE* n16 Giugno 1998

Introduzione al modello di Poincaré

della geometria non euclidea iperbolica con Cabri-géomètre II

di Luigi Tomasi
Liceo Scientifico Statale "G. Galilei" Adria (Rovigo)



M.C. Escher, Limit Circle IV

Che cosa penso della domanda: "È vera la geometria euclidea?". Essa non ha significato. E' come chiedersi … se la geometria cartesiana delle coordinate è vera e quella delle coordinate polari è falsa.
Una geometria non può essere più vera di un'altra, essa può essere solo più conveniente.
H. Poincaré, *La scienza e l'ipotesi*, la Nuova Italia, Firenze.

1. Il "menu iperbolico" di Jean-Marie Laborde in *Cabri-géomètre II*

In queste pagine viene presentata un'introduzione elementare al modello di Poincaré della geometria iperbolica, proposto nel 1881 da Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) in un suo articolo. Il modello in questione è stato creato all'interno della geometria euclidea. Il termine "non euclidea" si riferisce al fatto che in questa geometria non è valido il V postulato di Euclide. Su questo argomento esistono ormai moltissimi materiali didattici anche nella rete Internet, alcuni dei quali saranno citati in seguito. Si vedano inoltre i riferimenti bibliografici.
Quello che segue è un breve sunto di quanto è stato svolto in una classe quinta di liceo scientifico sperimentale nello scorso anno scolastico relativamente al modello di Poincaré.
Il modello di Poincaré è qui presentato con l'uso del "*Menu hyperbolique*" all'interno del programma *Cabri-géomètre II* per Windows. Il menu iperbolico è stato

proposto nel 1998 da Jean-Marie Laborde, Università di Grenoble, Francia, uno degli autori - con Franck Bellemain - del software *Cabri-Géomètre*. Il menu iperbolico esiste in lingua francese e in lingua inglese e può essere prelevato da Internet al seguente indirizzo FTP (sito ufficiale di *Cabri-Géomètre* in Francia):
ftp://ftp.imag.fr/pub/CABRI/Menus-folder/
In ambiente "Cabri-géomètre II" il "menu iperbolico" di J-M. Laborde non è l'unico. Da alcune settimane nello stesso sito è disponibile anche un menu per il modello di Klein-Beltrami di geometria iperbolica. In alternativa a quello proposto da J.-M. Laborde per il modello di Poincaré si può anche usare quello messo a punto da Tim Lister, che si trova nel seguente sito:
http://mcs.open.ac.uk/tcl2/nonE/nonE.html
In tutti i menu citati si usa la possibilità di *Cabri-géomètre II* di creare dei menu definiti dall'utente, aggiungendo o togliendo delle macro-costruzioni al menu normale. Il "menu hyperbolique" di J.-M. Laborde si presenta nel seguente modo:

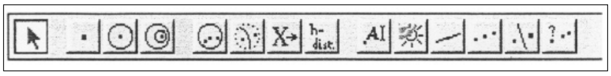


Figura 1. La barra degli strumenti del "Menu Hyperbolique" di J.-M. Laborde

Come si vede dalla figura precedente, ci sono icone del tutto nuove, con costruzioni precedute dalla lettera H, che sta per "hyperbolique". Ad esempio "H-droite" è il nome della macro per disegnare una "retta" iperbolica nel modello di Poincaré; "H-segment" sarà lo strumento per disegnare un "segmento" iperbolico, e così via……
I consueti strumenti di *Cabri-géomètre II* sono stati collocati a destra, alla fine della barra. *Cabri-géomètre*, naturalmente, permette un'esplorazione dinamica ed interattiva del modello di Poincaré di geometria iperbolica e un apprendimento attivo e costruttivo di nozioni che fino a qualche anno fa erano presentate in classe in forma astratta e passiva per lo studente.
Perché svolgere le geometrie non euclidee al liceo? Una prima risposta è: perché sono in programma (si vedano i programmi del P.N.I. e i "programmi Brocca"). Ma volendo dare una risposta meno estrinseca, si ritiene che tale argomento sia particolarmente formativo e permetta un'opportuna relativizzazione della geometria euclidea e della matematica in generale oltre a prestarsi ad un facile collegamento con la filosofia e la fisica. L'argomento è sicuramente da collocare in una classe quinta di liceo scientifico sperimentale, al termine di un preciso percorso di geometria, così come prevedono i programmi del Piano Nazionale per l'Informatica ed i "Programmi Brocca" per il liceo scientifico e scientifico-tecnologico.

2. Il modello di Poincaré della geometria non euclidea iperbolica

Supponiamo che il "piano" sia formato dalla regione interna W ad un'assegnata circonferenza w (che si dice *orizzonte*). Chiameremo tale regione il *piano di Poincaré* o "piano". Un punto di W è un *punto* del *piano di Poincaré* in questa nuova geometria. Le costruzioni, con *Cabri II*, sono immediate. Si disegna una circonferenza, detta *orizzonte*, e si usa il menu iperbolico per disegnare la retta iperbolica per *A* e *B* e quella passante per *O* ed *A*. Ad ogni passaggio occorre sempre indicare rispetto a quale "orizzonte" si ragiona.

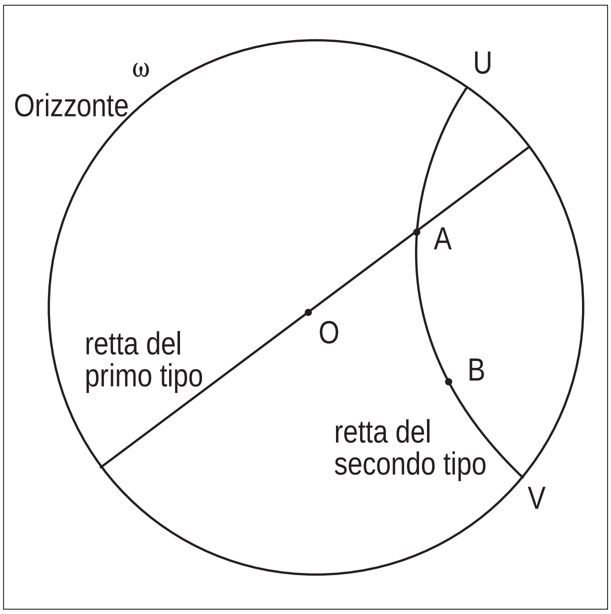


Figura 2. "Rette" del primo tipo e del secondo tipo

In questa geometria ci sono due tipi di *rette*:
a. i diametri del cerchio Ω, vengono dette "*rette del primo tipo*";
b. gli archi di circonferenza ortogonali a ω, aventi gli estremi su ω, vengono dette "*rette del secondo tipo*".

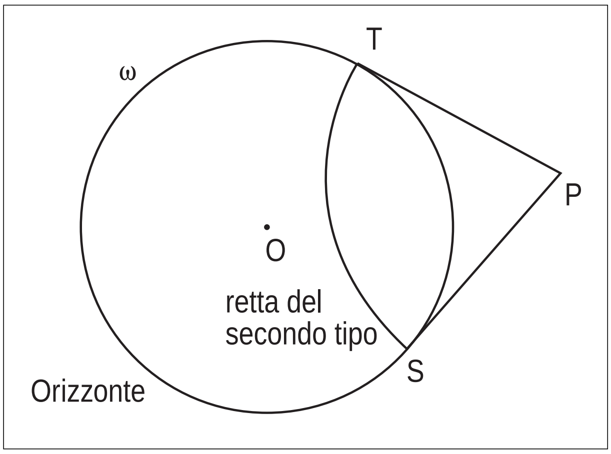


Figura 3. Disegno di una "retta" del secondo tipo.

Per rendersi conto di come il menu iperbolico è stato costruito, si può spiegare la costruzione di una retta del secondo tipo. Per tracciare le rette del secondo tipo basta prendere un qualsiasi punto *P* esterno al cerchio

Ω, tracciare il segmento di tangente PT e descrivere l'arco di circonferenza di raggio PT avente estremi su ω. Tale costruzione, nel "menu iperbolico" è stata evidentemente trasformata in una macro.
L'incidenza tra "*rette*" in questa nuova geometria è definita in modo naturale, come intersezione tra archi o diametri del cerchio.
I teoremi soliti della geometria euclidea del piano relativi all'incidenza tra rette valgono anche in questa nuova geometria. Poiché per due punti distinti P e Q passa sempre uno ed un solo diametro, oppure una ed una sola circonferenza ortogonale a quella dell'*orizzonte* ω , allora possiamo dire:
per due "*punti*" distinti passa una ed una sola "*retta*".
Definiamo l'*angolo* tra due *rette* come l'ordinario angolo della geometria euclidea, misurato nel solito modo, tra le rette tangenti alle due curve nel loro punto di intersezione.
Definiamo "*segmento*" l'insieme dei punti di una *retta* tra due *punti*. La relazione di "*compreso tra*" è la stessa della geometria euclidea.

3. La misura di un "segmento" *AB* nel modello di Poincaré

Nell'ordinaria geometria euclidea due segmenti sono uguali (o congruenti) se uno può essere sovrapposto all'altro. Questa relazione coinvolge un movimento rigido del piano, che mantiene le distanze invariate: in altre parole, un'isometria. Le rette sono trasformate in rette e gli angoli sono conservati. Se l'isometria è diretta, anche il verso di un angolo è conservato.
Nel modello di Poincaré la lunghezza di un segmento non è più definita nello stesso modo in cui è definita nella geometria euclidea. Dati due punti A e B interni al cerchio si definisce lunghezza del "segmento" AB il seguente numero:

$$lunghezza(AB) = 1n(ABUV) = 1n\left(\frac{AU \cdot BV}{AV \cdot BU}\right)$$

dove i punti U e V sono individuati dalle intersezioni della "retta" AB con la circonferenza ω. $ABUV$ è il birapporto tra i punti A, B, U, V appartenenti ad un diametro oppure ad un arco di circonferenza ortogonale ad ω. Qui occorre definire preliminarmente il birapporto tra quattro punti su una retta e su una circonferenza. I punti U e V appartengono ad ω e quindi non appartengono alla retta per i punti A e B.

La lunghezza (iperbolica) di un segmento AB gode di alcune proprietà:
1. è definita per ogni coppia di punti interni al cerchio Ω;
2. è sempre positiva o nulla;
3. è nulla solo se il punto A coincide con B;
4. possiede la proprietà additiva, ovvero se A,B,C

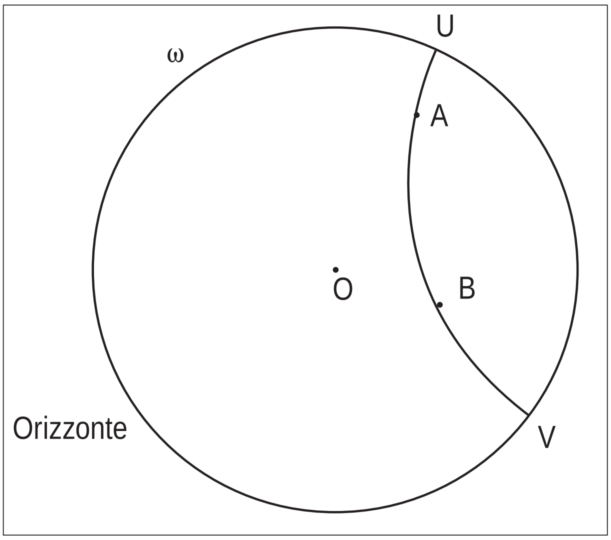


Figura 4. Segmento iperbolico *AB*.

appartengono allo stesso segmento e B sta tra A e C:

5. la lunghezza di un segmento AB tende all'infinito se il punto B tende a V oppure se il punto A tende a U.

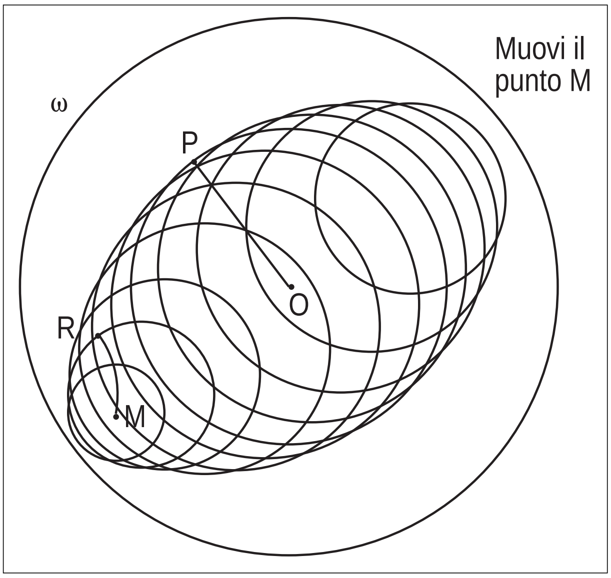


Figura 5. Cerchi isometrici nel piano di Poincaré.

Usando la definizione di lunghezza appena data possiamo definire la congruenza (iperbolica) tra due segmenti dati. Non si tratta più della consueta congruenza! Si noti la figura iniziale che riporta un disegno di Escher: gli "angeli" sono tutti congruenti tra loro (secondo la geometria iperbolica) e lo stesso vale per i "diavoli" del disegno di Escher.

(Figure a pag. seguente)

Due segmenti congruenti dal punto di vista euclideo non sono più congruenti dal punto di vista iperbolico, e viceversa. Nella figura seguente, ad esempio, è disegnato un triangolo "equilatero" nel piano di Poincaré e la circonferenza circoscritta. Si osservi la posizione del centro O' della circonferenza circoscritta.

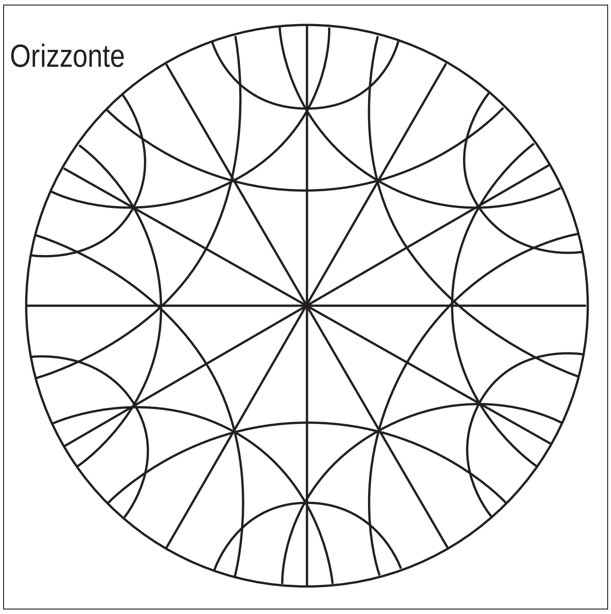


Figura 6. Inizio di tassellazione del piano di Poincaré con esagoni regolari.

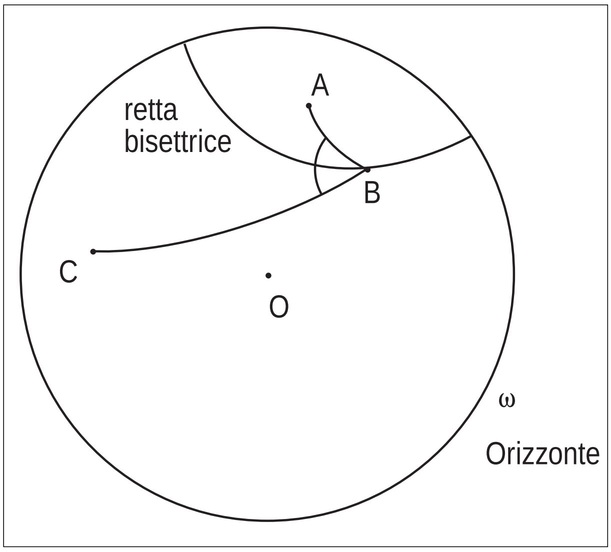


Figura 7. Bisettrice dell'angolo iperbolico *ABC*.

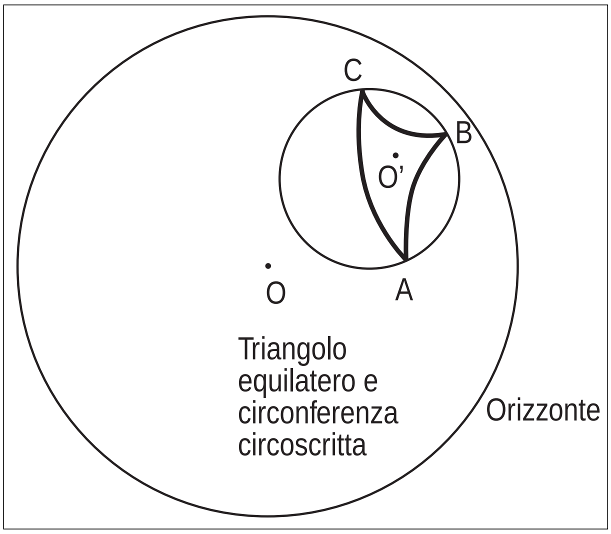


Figura 8. Triangolo equilatero *ABC* nel piano di Poincaré.

Analogamente nella figura seguente è disegnato un quadrato e la circonferenza circoscritta:

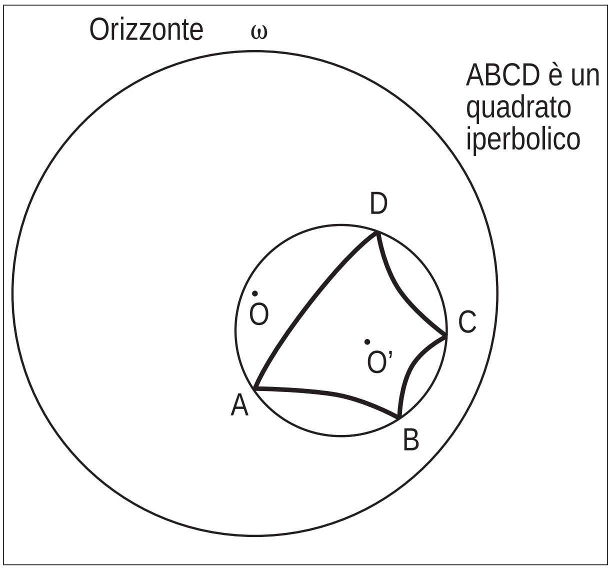


Figura 9. Un quadrato disegnato nel piano di Poincaré.

4. Rette parallele ed iperparallele nel modello di Poincaré

In questo modello della geometria iperbolica si verifica che gli assiomi di Euclide sono validi tranne quello delle parallele.

Nel modello di Poincaré, infatti, se si assegna una "retta" *AB* ed un punto *P* fuori di essa, per questo punto *P* passano infinite rette parallele alla retta data. Riportiamo di seguito la figura n. 10 dove è disegnata la retta *AB*, un punto *P* fuori di essa e le rette *r* ed *s* parallele alla retta *AB*. Nel fascio di rette passanti per il punto *P*, le rette *r* ed *s* separano le rette incidenti alla retta *AB* da quelle che non intersecano la retta *AB*. Le rette *r* ed *s* sono però le prime rette parallele alla retta *AB*. La situazione è analoga a quella che si ha nel fascio di rette passanti per il centro di un'iperbole, dove gli asintoti separano le rette secanti all'iperbole da quelle che non intersecano l'iperbole.

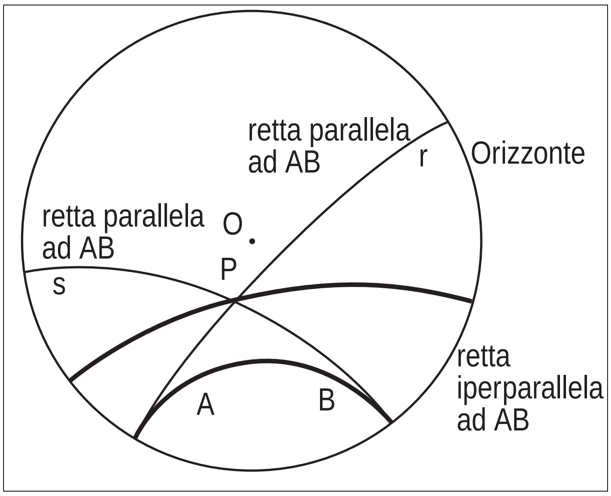


Figura 10. Retta *AB*, rette parallele e iperparallele ad *AB* passanti per il punto *P*.

Tra le rette *r* ed *s* sono comprese infinite rette che non intersecano la retta *AB*. Tali rette si dicono *iperparallele* alla retta *AB*. Quindi per *P* passano due rette parallele ed infinite rette iperparallele alla retta *AB*.
Con il "menu iperbolico" di *Cabri-géomètre* è particolarmente facile fare queste esplorazioni di geometria iperbolica. Si può eventualmente eseguire un'animazione, chiedendo la traccia delle rette iperparallele. Qui sono stati presentati soltanto i fatti più semplici, mantenendoci ad un livello elementare, ma si potrebbe continuare, esplorando in modo interattivo e dinamico le proprietà principali del modello di Poincaré della geometria iperbolica.

Riferimenti bibliografici

[1] Euclide, *Gli Elementi*, Utet, Torino 1970;

[2] H.M.S. Coxeter, *Non Euclidean Geometry*, Dover, New York;

[3] H.M.S. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Whiley, New York 1969;

[4] R.J. Trudeau, *La rivoluzione non euclidea*, Bollati Boringhieri, Torino 1991;

[5] G. Margiotta, *Introduzione alla geometria non euclidea con Cabri*, Quaderno n. 10 di CABRI*RRSAE*, Bologna 1996;

[6] M. Dedò, *Le trasformazioni geometriche*, Decibel-Zanichelli, Padova 1996;

[7] E. Agazzi, D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare*, La Scuola, Brescia 1998.

Antenne, parabole, geometria

di Enrico Pontorno
LG Concetto Marchesi - Oderzo - TV

L'aumentata richiesta di installazione di antenne paraboliche per la ricezione di trasmissioni digitali pone agli installatori, per curiosità culturale o per necessità, dei quesiti di natura geometrica. Questa lezione nasce come risposta alle domande di uno studente che, nel tempo libero, lavora nel settore. Le antenne riceventi sono, dal punto di vista geometrico, dei segmenti di paraboloide. In questo lavoro rappresenteremo con un segmento di parabola il profilo dell'antenna, potendosi facilmente estendere le considerazioni allo spazio. Le antenne non simmetriche rispetto all'asse sono definite "offset".

Alcune proposizioni di geometria proiettiva utilizzate in questo lavoro.

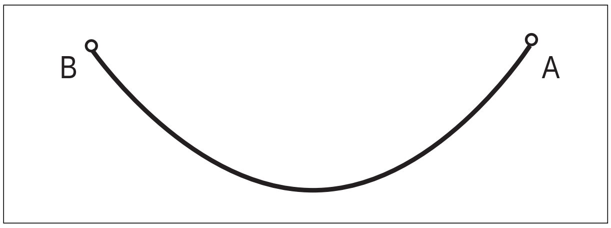
- Si definisce **polarità** la corrispondenza tra i punti e le rette del piano che sono rispettivamente **polo** e **polare** rispetto ad una medesima conica fondamentale. Polo e polare sono rispettivamente centro e asse di un'omologia armonica[(1)] che trasforma in sé la conica.
- Se HKLM è un quadrangolo inscritto in una conica, il relativo triangolo diagonale ABC (i cui vertici sono le intersezioni delle coppie di lati opposte del quadrangolo) è un triangolo autopolare.
- Se *a*, polare del punto A, passa per B, allora *b*, polare del punto B, passa per A (*Legge di reciprocità di Plucker*). Le polari dei punti della conica sono le tangenti alla conica in detti punti.
- Dato un triangolo HKL inscritto in una conica, una retta *r* coniugata di uno dei lati, HK, sega gli altri due, HL e KL, in due punti A e A', fra loro coniugati (*Teorema di Staudt*).
- Si definisce **diametro** di una conica la polare di un punto improprio.
- Per la parabola il centro appartiene alla conica ed è collocato sulla retta impropria; tutti i diametri sono paralleli poiché passano per detto centro.
- In una parabola ciascun diametro *a* dimezza le corde HK parallele alla direzione coniugata al diametro.
- Nella parabola i diametri sono tutti paralleli tra loro, passando per il punto improprio (centro della parabola). Esiste un particolare diametro *a*, polare del punto all'infinito, che rappresenta la direzione ortogonale alla direzione del centro; questo diametro biseca le corde parallele alla direzione U_∞ e quindi perpendicolari al diametro stesso. Tale diametro si chiama **asse** della parabola. Il punto d'intersezione dell'asse con la parabola è il vertice della parabola.
- In una parabola la tangente *t* in un punto T biseca l'angolo formato dal raggio focale FT e dalla parallela all'asse condotta per T.

Dato un segmento di parabola simmetrico rispetto all'asse, come determinare il fuoco e la direttrice?

Chiamiamo A e B gli estremi del segmento parabolico. Ovviamente l'asse di AB è asse della parabola e la incontra in V. Per determinare il fuoco eseguiamo la seguente costruzione.

- Si conduca la perpendicolare *u* all'asse per il vertice del segmento parabolico.
- Si conduca la parallela per A alla tangente nel vertice e sia *r* tale retta.
- Si effettui la simmetria della retta *r* rispetto ad *u*. Il punto R d'intersezione della *r'* con l'asse è il punto d'intersezione delle tangenti in A e B; esso è il polo di

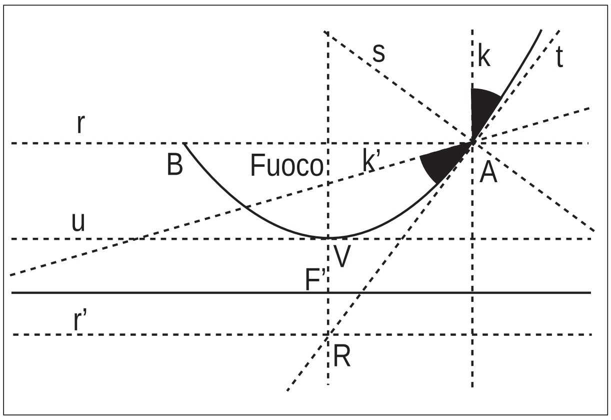
(1) Una omologia si dice armonica se il birapporto di quattro elementi coniugati è uguale a -1.



AB nella polarità determinata dalla conica.

- Si traccino:
  - a) la tangente RA,
  - b) la perpendicolare *s* ad essa per A,
  - c) la parallela per A all'asse della parabola.

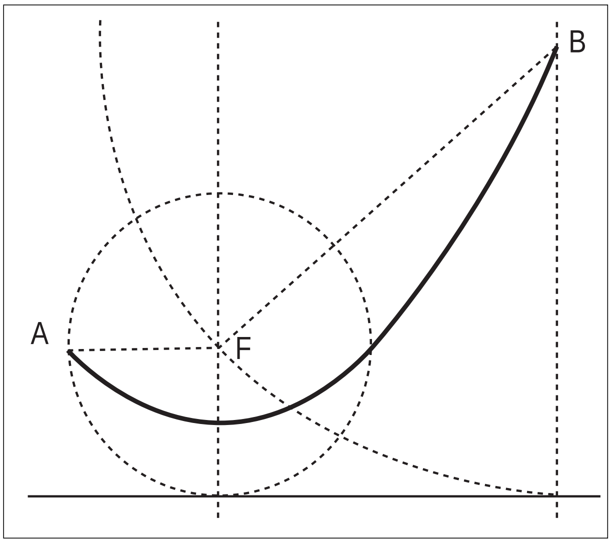
Per una nota proprietà di riflessione della parabola, l'angolo convesso $t\hat{A}k$ deve essere eguale all'angolo avente per lati la congiungente il punto A con il fuoco della parabola. Pertanto si effettui la simmetria di asse *s* della retta *k*. Il punto d'intersezione di *k'* con l'asse della parabola è il fuoco cercato. La direttrice è la polare del fuoco; se F' è simmetrico del fuoco rispetto a V, la direttrice sarà la perpendicolare all'asse condotta da F'.



Dato un segmento non simmetrico (offset) di parabola, di cui si conosce il fuoco, determinare la direttrice.

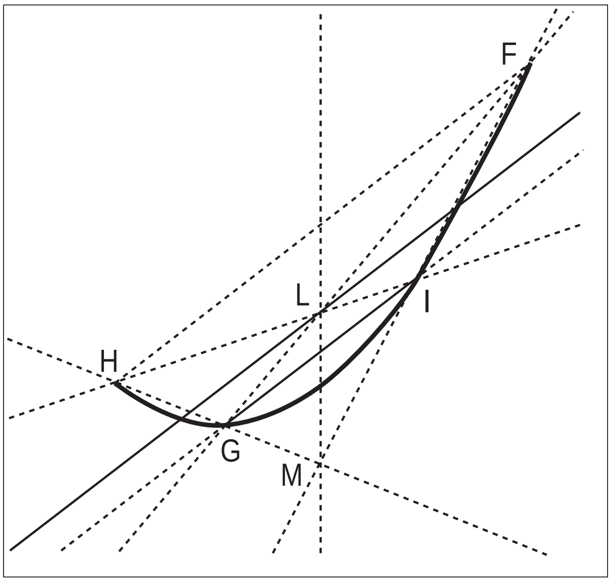
Siano A e B gli estremi del segmento parabolico e F il fuoco. I punti A e B devono, per definizione, avere la stessa distanza dal fuoco e dalla direttrice, cosa che giustifica la seguente costruzione.

Si traccino due circonferenze, una di centro B e raggio BF, l'altra di centro A e raggio AF. La retta che ha distanza BF da B e AF da A sarà la tangente comune alle due circonferenze che non interseca la parabola. Una volta effettuata la costruzione di tale tangente, costruzione nota anche nei corsi di scuola media inferiore, essa sarà la direttrice della parabola. Tracciata la direttrice è facile determinare l'asse e il vertice.



Dato un segmento di parabola non simmetrico (offset), determinarne il fuoco.

Siano H e F gli estremi del segmento parabolico. Per costruire fuoco e direttrice è necessario ricorrere alla geometria proiettiva.



Tracciata la corda HF si conduca da un altro punto G, preso a caso sul segmento parabolico, la parallela ad HF che incontra il segmento in un quarto punto I.

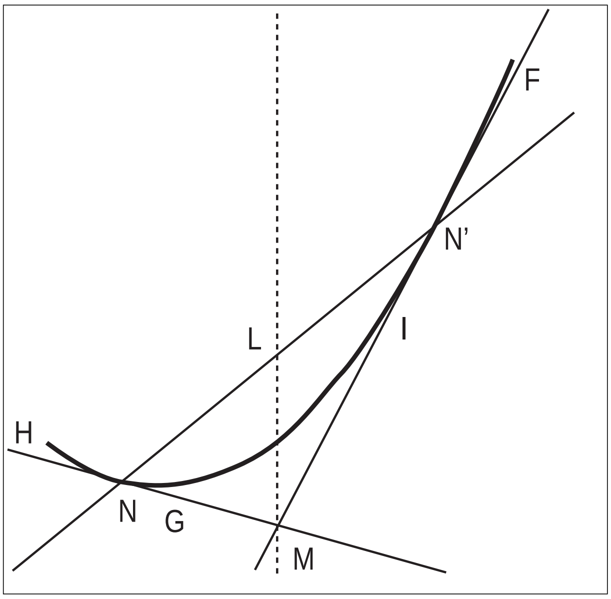
Si costruisca il quadrangolo completo HFGI. Sia L il punto d'intersezione di HI e FG, M quello di HG e FI, P_∞ quello di HF e GI; quest'ultimo, ovviamente, è un punto all'infinito.

Da L si conduca la parallela a HF. Tale retta è la polare del punto M e incontra il segmento di parabola nei punti N e N'; il quarto armonico della terna NLN' è il punto all'infinito della stessa retta per cui si ha $P_\infty LNN'=-1$; ciò implica che L sia il punto medio del segmento NN'.

Le rette MN, MN' sono le tangenti alla parabola condotte dal punto M. La retta ML è la polare del punto P_∞ e il suo punto all'infinito è il centro della parabola.

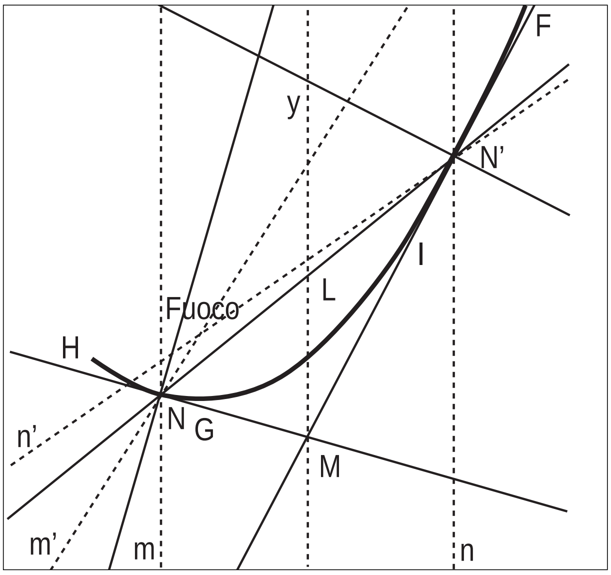
Ciò significa che la retta ML è parallela all'asse della parabola e ciò permette di determinarne il fuoco. Infatti, come già detto, data la tangente in un punto, l'angolo tra la congiungente il fuoco con detto punto e la tangente è uguale all'angolo tra la tangente e la parallela all'asse passante per il punto. Quindi:

- Si traccino le parallele *m*, *n* alla retta ML dai punti N e N';
- Si traccino le perpendicolari alle tangenti dagli stessi punti;



- Si effettui la simmetria delle retta *m* rispetto alla normale per N e sia *m'* la retta riflessa;
- Si effettui la simmetria della retta *n* rispetto alla normale per N' e sia *n'* la retta riflessa.

Il punto d'intersezione tra le rette *m'*, *n'* è il fuoco cercato.



Conclusioni.

E' stato estremamente stimolante riprendere in mano vecchi testi di geometria "analitica e proiettiva". In essi, frasi come "...riunendo i punti così trovati con tratto continuo si viene a disegnare una conica...", "...ripetendo la costruzione un conveniente numero di volte...", e ancora "...immaginando di far muovere con continuità, sul piano, il punto soggetto a tali condizioni...", fanno riflettere sul progresso fatto dalle tecnologie didattiche nel giro di pochi decenni. Le figure di questo lavoro sono state fatte utilizzando "The Geometer's Sketchpad" della Key Curriculum Press di Berkeley, California. Tale software, come il più noto CABRI, permette di effettuare costruzioni geometriche, costruire corrispondenze proiettive e modificarne in modo continuo gli elementi fondamentali. E', forse, il sogno di tutti i geometri che si realizza. Gli scettici obietteranno che Euclide, Cartesio, Monge, Poncelet, Desargues non hanno avuto bisogno di un computer per i loro studi. Questo è un segno del loro genio e della potenza, e bellezza, della matematica. Ma il compito di noi insegnanti è, fra l'altro, quello di sintetizzare, in poche ore di lezione, il lavoro di intere generazioni di matematici. Allora perché non utilizzare strumenti che sono di enorme aiuto nella visualizzazione dei concetti e nella manipolazione degli enti matematici? Naturalmente il processo di conoscenza non si esaurisce con il "vedere". Tuttavia chi, tra i colleghi, ha provato a far costruire in laboratorio le coniche come luoghi di punti, può testimoniare dell'impatto positivo, e talora dell'entusiasmo, che provoca "vedere" apparire sul monitor l'ellisse o la parabola. E il primo passo verso l'apprendimento è certamente un atteggiamento positivo nei confronti dell'"oggetto" da apprendere.
A metà degli anni '60, i docenti, all'università, ci esortavano a guardare agli enti matematici "con gli occhi della mente". Chi di noi, oggi, rischierebbe il ridicolo dando ai propri allievi tale consiglio?

Bibliografia

[1] G. Castelnuovo, *Geometria analitica e proiettiva*, Dante Alighieri, Roma
[2)] G. Campedelli, *Esercizi di geometria analitica e proiettiva*, CEDAM, Padova
[3] O. Chisini, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Zanichelli, Bologna
[4] O. Chisini, *Esercizi di geometria analitica e proiettiva*, Zanichelli, Bologna

Corsi e Seminari

Venerdì 22 Ottobre 1999, presso il Centro Congressi Cariplo, via Romagnosi 6 - Milano, si terrà il Convegno "LA DISCALCULIA EVOLUTIVA, i disturbi specifici delle operazioni di processamento dei numeri in età di sviluppo". Il Convegno è promosso dalla Azienda Ospedaliera San Paolo e dalla Associazione Italiana Dislessia, con il patrocinio della Regione Lombardia e dell'IRRSAE-Lombardia.
Il Convegno è aperto a tutti gli interessati ai problemi dei disturbi specifici dell'apprendimento: Medici, Psicologi, Terapisti della Riabilitazione, Pedagogisti, Insegnanti. La mattina sarà dedicata ai modelli neuropsicologici di processamento dei numeri, per inquadrare la discalculia evolutiva. Nel pomeriggio saranno approfondite singole aree e singoli aspetti del disturbo, attraverso contributi provenienti sia dalla ricerca scientifica, che dall'esperienza clinica.

E' prevista una quota di iscrizione. Per informazioni:
Lunedi' e Mercoledi' ore 14 - 16; Venerdi' ore 9 - 12
Tel. 02 81844532 - Fax 02 8910875

In questo numero

Nella sezione ***Cabri discusso*** presentiamo alcune riflessione sulla valenza didattica di un CAS, in particolare il Derive.
Nella sezione ***Come fare*** abbiamo quattro lavori dedicati tutti alla scuola superiore. Una esperienza interdisciplinare condotta da una insegnante di Matematica, in collaborazione con una insegnante di Disegno Tecnico, per introdurre le trasformazioni geometriche attraverso l'omologia con l'aiuto del software Cabri. Un lavoro, realizzato con Cabri, sulla costruzione dell'ettagono regolare inscritto in una circonferenza tramite la trisezione dell'angolo. Tale lavoro conclude un percorso didattico dedicato alle costruzioni euclidee in un corso universitario. Segue la sintesi di una esperienza didattica svolta in una classe quinta liceo sulla geometria secondo il modello di Poincaré, utilizzando il menu iperbolico all'interno del programma Cabri-géomètre II per Windows. Chiude il bollettino la presentazione di una lezione di geometria scaturita dalla esigenza pratica di come installare antenne paraboliche.

L'immagine

L'immagine di questo numero è tratta dalla copertina del volume "Intelligenza matematica. Vincere la paura dei numeri scoprendo le doti innate della mente", di Brian Butterworth, pubblicato dall'editore Rizzoli.
Utilizzando contributi provenienti da varie discipline, l'autore, professore di neuropsicologia cognitiva all'University College di Londra, esamina le caratteristiche delle facoltà che ci consentono di comprendere i concetti matematici.
Il volume è corredato da una ricca bibliografia e da letture consigliate per approfondire i temi trattati.

Inviateci i vostri articoli

CABRI*RRSAE* pubblica contributi relativi all'utilizzo del pacchetto Cabri-géomètre e di altri software matematici, con particolare attenzione alla valenza didattica e all'inserimento nel curricolo scolastico.
Ogni articolo (non più di 4 cartelle) deve pervenire, su supporto magnetico e cartaceo, ad uno degli indirizzi indicati in copertina, rispettando le seguenti modalità:

• *SUPPORTO CARTACEO*

- testo e figure devono essere impaginate secondo le intenzioni dell'autore (anche in bassa qualità di stampa)
- una stampata delle sole figure ***in alta qualità di stampa***
- una stampata dei grafici ***in alta qualità di stampa***
- anche le immagini catturate dallo schermo devono essere accompagnate da una stampata ***in alta qualità***

• *SUPPORTO MAGNETICO*

- il file di *testo* in ***formato Word*** (estensione .doc, meglio sarebbe se fosse .mcw) non deve contenere le figure che invece devono essere collocate in un file a parte.
- altri materiali (tabelle, grafici, ecc.) devono pervenire in formato originale, con indicazione dell'applicativo che le ha generate, comunque sempre accompagnate da una stampata di alta qualità.
- altre immagini (tipo quelle tridimensionali) generate da qualunque programma, devono essere esportate come prodotti vettoriali, cioè con estensione A.I.

Il materiale inviato non sarà restituito.

Siamo ugualmente interessati a ricevere materiali più articolati sull'utilizzo di Cabri; tali materiali possono essere diffusi mediante la collana "Quaderni di CABRI*RRSAE* ". ■

CABRI*RRSAE*

Videoimpaginazione GRAPHICART - Via Fondazza, 37 - Tel. Fax (051) 30.70.73 - 40125 Bologna

Supplemento al n.4 Luglio-Agosto 1999, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento educativi dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Giancarlo Cerini, proprietà IRRSAE/ER.