CABRIRRSAE

Bollettino degli utilizzatori di CABRI-géomètre e di altri software matematici

Marzo 1999 - N. 19

SOMMARIO

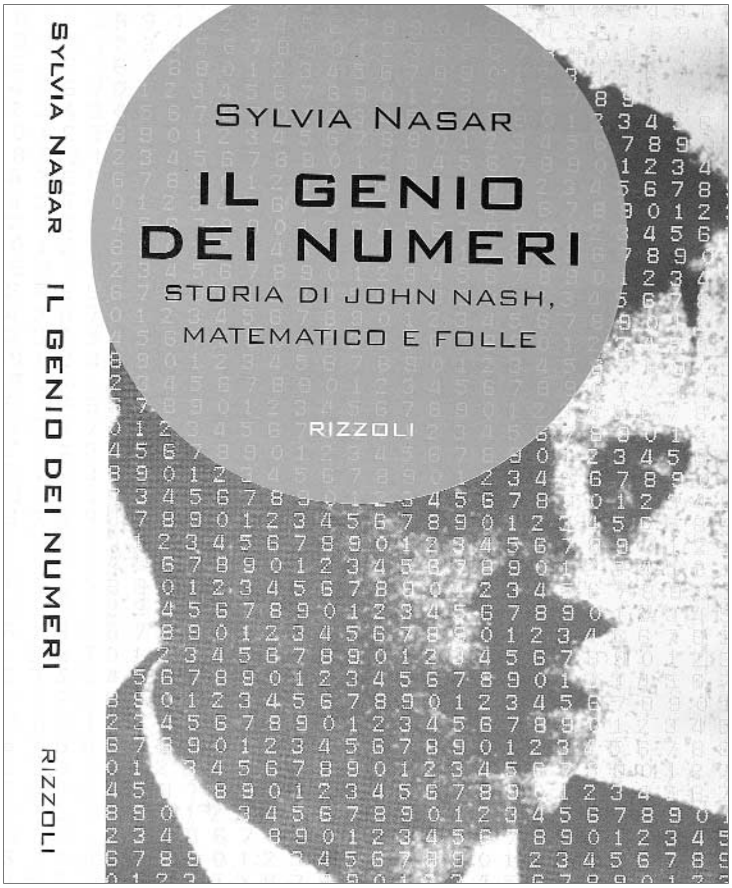
Indirizzo

Bollettino CABRI*RRSAE*
IRRSAE-Emilia Romagna
Via Ugo Bassi, 7 - 40121 Bologna
Tel. (051)22.76.69 - Fax (051)26.92.21
E-mail: cabri@arci01.bo.cnr.it
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/
Gruppo di discussione:
E-mail: cabrinews@arci01.bo.cnr.it

Fardiconto:
http://arci01.bo.cnr.it/fardiconto/
Flatlandia:
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/flatlandia/

La versione elettronica del bollettino è consultabile a questo indirizzo:
http://arci01.bo.cnr.it/cabri/rivista.html

I.R.R.S.A.E.
Emilia-Romagna



Cabri discusso

Un’attività di scoperta con l’aiuto di Cabri e della TI92

di Giovanni Margiotta
IRRSAE Lazio

In questa nota si suggerisce un’attività di scoperta prendendo spunto da due problemi tratti da “Geometry problem of the week”, esercizi proposti in rete agli alunni da “The Math Forum” (*http://forum.swarthmore.edu/geopow/*).

Proposta 1

Un rettangolo è diviso come, ad esempio, in figura 1 in quattro rettangoli con area rispettivamente 45, 25, 15 e X. Determinare il valore di X

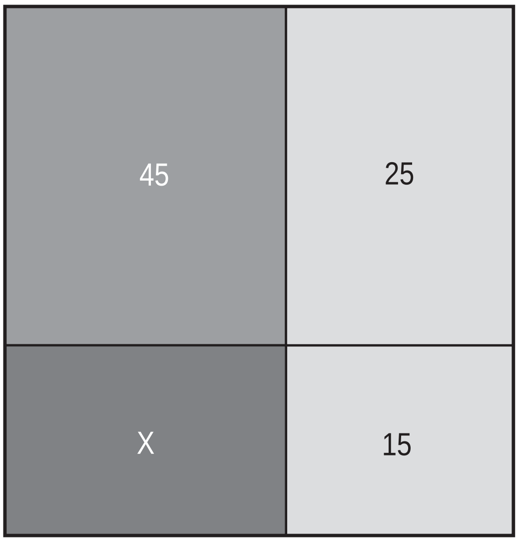


Fig. 1

Spunti di indagine

Si possono suggerire alla classe alcuni spunti di analisi del problema:

Il valore dell’area del rettangolo X dipende dal modo in cui si accostano i rettangoli ?

Fissata una posizione del rettangolo X si possono valutare tutte le possibili disposizioni degli altri tre rettangoli. Si disegnano con il *Cabri* alcune possibili combinazioni (vedere figura 2 e 3): si può osservare che c’è dipendenza tra la posizione dei rettangoli ed il valore dell’area del rettangolo X.

Quanti valori può assumere l’area del rettangolo X? Quali sono? Trovare la soluzione sul piano cartesiano.

Con Cabri si costruisce un punto che ha per coordinate le dimensioni di un rettangolo di area 45, si traccia il luogo di punti che individua; si ripete la costruzione per gli altri due valori e si hanno i grafici di figura 4

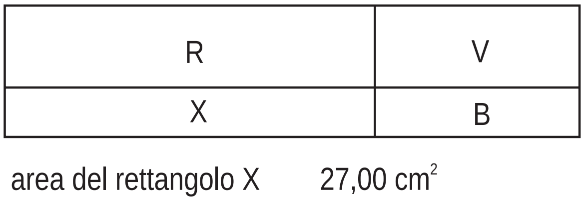


Fig. 2

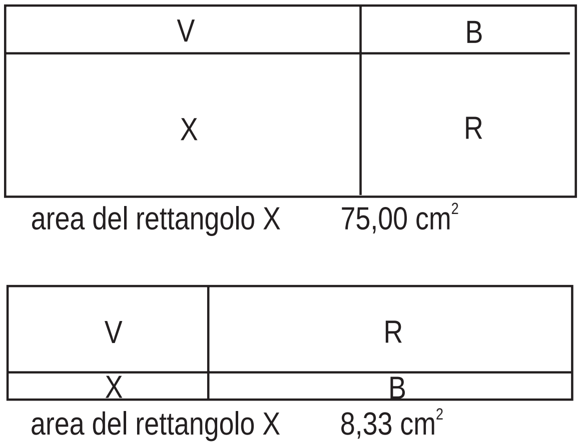


Fig. 3

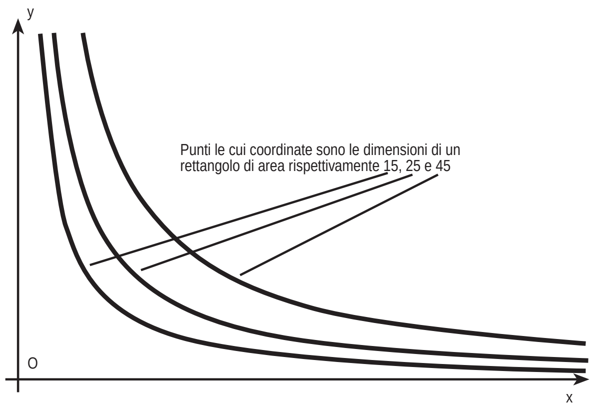


Fig. 4

La soluzione analitica è immediata.

Per ottenere la soluzione grafica si costruisce, ad esempio, la soluzione come in figura 5

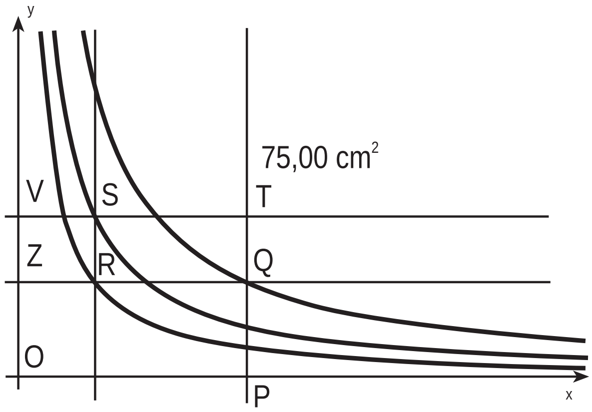


Fig. 5

Fissato uno dei punti S, R, Q, si ottiene come soluzione X il rettangolo OPTV; ribaltando OPQZ e OMSV rispettivamente attorno all'asse delle ascisse e delle ordinate, si costruisce il rettangolo corrispondente alla soluzione individuata.
Quante soluzioni intere esistono?
Generalizzazione: dividere un rettangolo in quattro rettangoli di area rispettivamente a, b, c e x. Determinare i valori di x.
Per realizzare l'attività è necessario applicare nozioni sul calcolo combinatorio, sui rettangoli equivalenti, sull'iperbole equilatera, interpretare analiticamente un grafico, effettuare costruzioni con riga e compasso, applicare le trasformazioni geometriche: traslazioni e simmetrie.

Proposta 2

Un foglio rettangolare di dimensioni 6 x 8 è piegato in modo tale che due vertici opposti si sovrappongano. Determinare la lunghezza della piegatura. Come fai per trovarla?

Spunti di indagine
Si suppone di piegare il foglio ABCD in modo che il vertice A vada in A', appartenente alla retta individuata dai punti A e C. Con l'aiuto di Cabri, si costruisce un modello del problema. In questo modo:
i_ si individua un punto L che ha per ascissa il punto G, intersezione tra la piegatura e l'asse delle ascisse, e per ordinata la lunghezza della piegatura;
ii_ si costruisce il luogo dei punti descritto da L al variare di G tra A e C. (figura 6)

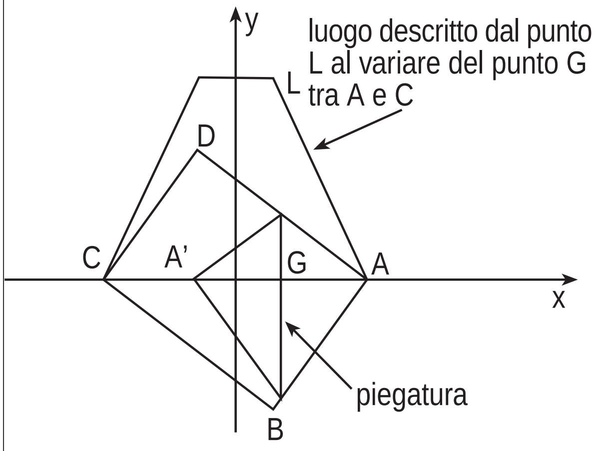


Fig. 6

Si può chiedere di analizzare le proprietà del luogo descritto nella figura 6 e di giustificarle rispetto al problema geometrico utilizzando argomentazioni sintetiche. Si può descrivere il luogo utilizzando, per esempio, la TI92 per controllare la correttezza della rappresentazione analitica individuata: (figura 7 e 8)

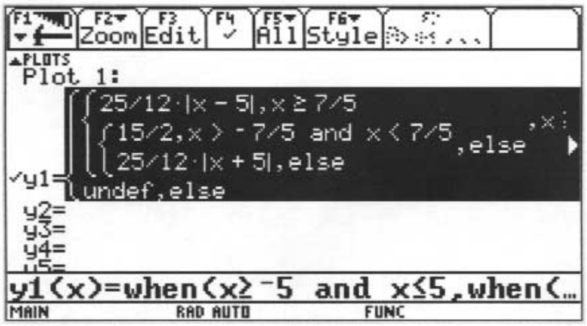


Fig. 7

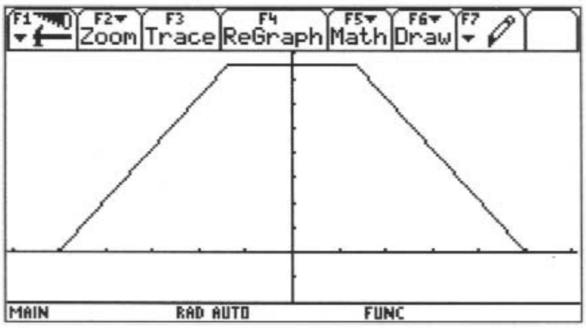


Fig. 8

Per prolungare l'attività si può, utilizzando la costruzione iniziale, individuare, ad esempio, al variare di G tra A e C, il luogo descritto dal punto L che ha per ordinata 1/5 del valore dell'area del poligono ottenuto piegando il foglio (vedere figura 9) ed analizzare per via analitica le proprietà del luogo utilizzando MathView (vedere figura 10) e giustificarle rispetto al problema geometrico.

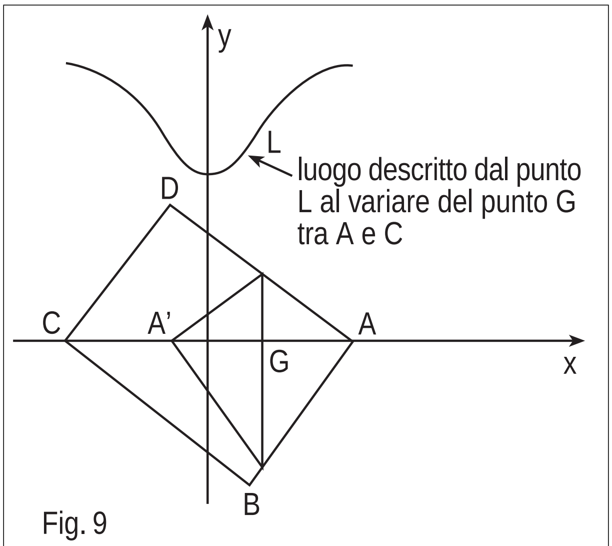


Fig. 9

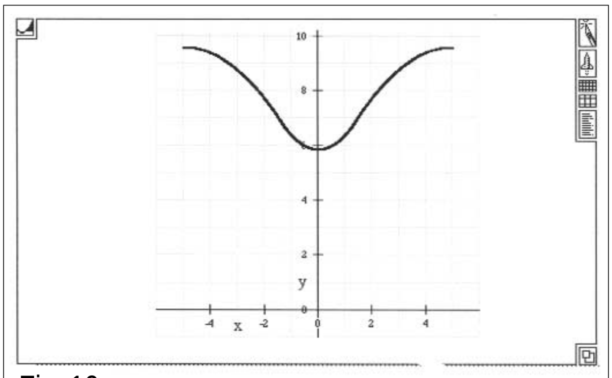


Fig. 10

In questa attività è necessario applicare le proprietà di simmetria del rettangolo, i teoremi di Euclide, rappresentare analiticamente rette, rettangoli, simmetrie centrali, interpretare analiticamente un grafico, effettuare costruzioni con riga e compasso, costruire luoghi di punti, riconoscere proprietà di simmetria nei grafici.

L'articolo pubblicato sul bollettino N°18, "Cabri II oltre la geometria Euclidea" di Michele Impedovo, ha suscitato osservazioni e commenti giunti in parte alla lista di discussione Cabrinews ed in parte alla redazione[(1)].
Riteniamo sia nostro dovere rendere partecipi i lettori del bollettino pubblicando le note pervenute.

Oltre la geometria euclidea? Perché?

Renato Verdiani
Liceo scientifico "Il Pontormo" Empoli (FI)

Ho letto con attenzione l'articolo del prof. M. Impedovo pubblicato nel n. 18 e non posso fare a meno di esternare alcune considerazioni personali.
Queste sono dettate da due motivi: il primo è dettato dal fatto che sono coinvolto direttamente nel riferimento al mio articolo pubblicato nel n. 16, il secondo dal fatto che non posso condividere le affermazioni del collega.
Credo infatti che la costruzione proposta "non tradisca" nessun spirito euclideo dato che ho messo ben in evidenza l'impossibilità di costruire con riga e compasso la terza parte di un angolo quando affermo che occorre "andare per tentativi". Leggendo con attenzione si dovrebbe comprendere senza ombra di dubbio che "l'andar per tentativi" è proprio il succo del mio articolo! E' evidente quindi che la "prova-trascinamento" non deve funzionare, altrimenti si sarebbe trovato il modo di trisecare un angolo usando solo la riga e il compasso!
Esempi di costruzioni realizzate con CABRI che "resistono alla prova-trascinamento" li ho riportati nell'articolo pubblicato nel n. 3 della rivista "Nuova secondaria" di questo anno dove ho precisato che gli snodi e gli scorrimenti utilizzati non sono proprietà elementari e quindi non traducibili con riga e compasso.
Di conseguenza tutte le affermazioni successive, a sostegno che CABRI II è più potente del suo fratello minore, non possono essere accettate dato che il problema di "dividere un angolo in tre parti uguali" **non può** essere sostituito con quello di "dividere *algebricamente* un angolo in tre parti, la cui somma è *circa* l'angolo dato"!
Il problema "è geometrico" e come tale ha una sua valenza didattica indiscutibile; risolverlo con i numeri significa farlo diventare banale perché per dividere "algebricamente" un angolo in tre parti uguali non sarebbe necessario scomodare né un PC né CABRI: basterebbe un goniometro ed una semplice divisione ed il gioco sarebbe fatto!
"La Geometria con i numeri" non è più Geometria ma "applicazioni dell'Algebra alla Geometria" e credo che si debbano sempre tenere distinte le due cose sia concettualmente che didatticamente.
Nella Geometria "senza numeri", la diagonale del quadrato continuerà a rimanere incommesurabile col proprio lato, l'angolo non potrà essere diviso in tre parti uguali, la circonferenza non potrà essere rettificata, un cubo non potrà essere duplicato. E questi problemi non saranno mai dei "tabù".
Grazie dell'attenzione.

Consolato Pellegrino
Università di Modena
Dipartimento di Matematica

Sebbene oberato da impegni gravosi ed improrogabili provo a dire qualcosa in merito agli interrogativi posti da Verdiani con le sue "Osservazioni" del 16 del mese in corso (inviate alla lista di discussione Cabrinews).
E' chiaro che la posizione di Verdiani e di Impedovo sono il frutto di due filosofie diverse ma contrapposte solo se estremizzate. Ed a queste, non avendo molto tempo, intendo riferirmi.
Dico subito che lo "scordamece o passato" di Impedovo, come "l'abbasso Euclide" di Bourbaki, se adottato nell'insegnamento, finisce paradossalmente per trasmettere una idea della geometria, esagero per rendere l'idea, poco distante da quella degli Egizi: un puro elenco, senza alcun quadro teorico, di ricette prive di

qualsiasi giustificazione. Di fatto questa posizione, meglio di quanto possa fare io qui, è esposta nell'articolo, di oltre dieci anni fa, "Salviamo la Geometria" del compianto Francesco Speranza, riproposto nel n. 1 di quest'anno de "La Matematica e la sua Didattica".

Non credo che le costruzioni con riga e compasso siano un tabù. Ma perché liquidare una tematica che ha costituito un potente motore per tutta la matematica e che alla fine ... ha fatto emergere proprio l'importanza degli aspetti numerici che tanto stanno a cuore ad Impedovo?

Certo tutte queste cose, assieme agli aspetti legati al passato possono essere ignorate.

Certo si guadagna in "potenza". Forse in chiarezza.

Ma a che prezzo? Come meravigliarsi poi se, nella migliore delle ipotesi, la matematica è considerata un puro strumento tecnico? qualcosa di codificato una volta per tutte, giunto a noi senza sapere come e quando, priva di legami con la storia dell'uomo, lo sviluppo scientifico, culturale e tecnologico.

Ricordo inoltre che nelle costruzioni con riga e compasso, oltre agli strumenti, ci sono anche delle regole. Queste regole, che resistono alle prove di trascinamento con Cabri, fissano le operazioni da seguire.

Esse di fatto sono gli assiomi della geometria di Euclide che lo stesso Hilbert ha accolto nei suoi "Grundlagen der Geometrie" del 1899.

Le regole si possono cambiare, così pure gli strumenti, ed in questo modo si cambia anche la geometria:

- con riga e squadra (anche se "zoppa") si fa la geometria affine,
- con la piegatura della carta (origami) si duplicano i cubi, si trisecano gli angoli ma non si quadra la circonferenza.

Invece con il solo compasso in buona sostanza si fa ... tutto quello che si riesce a fare con riga e compasso (Mascheroni 1797 e Mohr 1692: come ben illustrato da Luciana Zuccheri e Paola Galoppin, proprio utilizzando Cabri, in un articolo apparso sempre sul n. 1 del 1999 de "La matematica e la sua Didattica").

Infine voglio ricordare che oggi, a mio avviso più di ieri, proprio perché la scienza e la tecnologia ci hanno fornito tanti strumenti non è male, anzi mi sembra doveroso, che i giovani, anziché invogliati a vivere di rendita siano abituati a scegliere gli strumenti da adottare e, perché no, acquistino il gusto di affrontare le sfide consci che il progresso dell'umanità è stato il frutto di chi ci ha preceduto e non si è tirato indietro di fronte alle sfide che via via si sono presentate, anche se, come per il problema della trisezione dell'angolo, sono stati necessari più di due millenni per risolverli.

Enrico Pontorno
Liceo Ginnasio "C. MARCHESI", Oderzo (TV)

Michele Impedovo mi perdonerà se affermo che il suo articolo su CABRI*RRSAE* N. 18 ("*CABRI II oltre la geometria euclidea*") non mi è piaciuto. E' del tutto ovvio, ma desidero rilevarlo, che la critica è rivolta *ad argumentum* e non *ad personam*.

Il gran merito di programmi come **CABRI** e "**The Geometer's Sketchpad**" (GS) è stato quello di avere ridimensionato, molto discretamente, il ruolo che i numeri e l'algebretta avevano assunto nei curricula scolastici di matematica. Lo studio della geometria euclidea, di fatto scomparso dalle scuole italiane all'inizio degli anni '90, è stato rivitalizzato da questi software per la geometria "dinamica". Nelle mani d'insegnanti sapienti, che con grande entusiasmo lavorano nei laboratori d'informatica, la geometria è riuscita ad uscire dal circolo vizioso (e noioso) "definizione-teorema-dimostrazione" dei manuali scolastici, tornando alla sua dimensione primitiva, euristica, di scoperta delle proprietà formali delle figure. Le costruzioni euclidee con riga e compasso hanno trovato il loro posto in questo rinnovamento grazie alla loro natura, quanto mai attuale, di veri e propri algoritmi [1].

A mio avviso CABRI II (e prima di lui la versione *3* di GS) rappresentano una sorta d'involuzione rispetto alle precedenti versioni (la *1.7* di CABRI e la *1.xx* di GS):

- CABRI 1.7, nonostante il suo aspetto spartano, è sicuramente più *user-friendly* di CABRI II, il cui menù non è un modello di chiarezza e maneggevolezza;
- L'introduzione del piano cartesiano, con annesse calcolatrici, tabelle, misure, è un qualcosa di cui non si sentiva la mancanza. Perché fare rientrare "dalla porta" ciò che era stato fatto uscire "dalla finestra"?

Confesso di essere un nostalgico della riga e del compasso; considero le costruzioni - opportunamente dosate - un modo intelligente, nell'accezione letterale del termine, di fare, insegnare e apprendere la geometria. E non amo eccessivamente la geometria analitica – i numeri – perché troppo spesso ho visto come faccia perdere di vista il "bello" – inteso come semplicità ed eleganza risolutiva – che c'è in un problema geometrico (l'esperienza dei quesiti di matematica agli esami di maturità è illuminante in proposito).

Dice Coxeter "*…molti matematici preferiscono il metodo algebrico, correndo tuttavia il rischio di produrre una generazione di studenti per i quali una conica - ad esempio – non è altro che un certo tipo di equazione quadratica*." [2, *p. 111*]

Anche G. Accascina [3, pp. 7-8] ha messo in evidenza le storture che l'insegnamento della geometria analitica produce negli studenti i quali "*…vengono proiettati in un nuovo mondo di simboli e calcoli in cui il legame tra situazione geometrica e modello algebrico crolla e l'interpretazione geometrica dei calcoli numerici viene assolutamente trascurata.*" E ancora "*Gli esercizi di geometria analitica di solito indagano sulla capacità di fare calcoli e non sul pensare geometricamente.*"

Sostengo il detto: "Ad ogni problema il suo strumento". Se devo tracciare una sinusoide o la curva logaritmica preferisco usare *Derive*, *Maple* o *Mathematica*. Se l'obiettivo didattico è chiarire il concetto di funzione, allora va' bene qualsiasi funzione, anche quella che può costruirsi con riga e compasso.

In conclusione, credo che la fatica dei programmatori poteva rivolgersi a migliorare alcuni inconvenienti di CABRI: la grafica, la creazione dei luoghi geometrici e l'esportazione delle figure, l'ambiente operativo, piuttosto che aspetti che, dal punto di vista didattico, non rappresentano un arricchimento.

Quanto all'impietoso giudizio sulla teoria delle grandezze di Euclide, aspetto che l'ottimo Michele faccia piena e pubblica ammenda! Con immutata stima.

Bibliografia

[1.] A. Brigaglia, *"Torniamo ad Euclide"*, in lettera Pristem, n. 10, Dic. 1993
[2.] H.S. M Coxeter, *Projective Geometry*, Springer 1987.
[3.] ICMI Study, *Prospective on the Teaching of Geometry for the 21 st Century*, Univ. Catania 1995.

Luigi Monica
ITG "Rondani" Parma

Dopo Pellegrino, voglio a mia volta fare alcune considerazioni a proposito dell'intervento di Verdiani di cui condivido sostanzialmente le osservazioni.
Molto brevemente:
1)L'avvento di Cabri ha portato ad una nuova riscoperta della geometria Euclidea: vedere a proposito anche alcuni articoli comparsi sulla rivista Cabriirsae (La rivincita di Euclide ad esempio). Non dimentichiamo che l'insegnamento della geometria euclidea, con mezzi tradizionali, nel biennio incontra sempre maggior difficoltà al punto che molti colleghi, in particolare negli istituti tecnici e professionali, l'hanno totalmente abbandonata (secondo me commettendo un grave errore). Ne' penso che gli obiettivi formativi, alla base dell'insegnamento della geometria euclidea, possano essere raggiunti attraverso lo studio della geometria cartesiana che ha metodi, ma anche tempi diversi a causa degli strumenti matematici di cui ha bisogno. Le vituperate costruzioni con riga e compasso, nell'ottica di Cabri, sono il primo passo di un percorso che porta al rigore di una dimostrazione completa.
2)Lo strumento 'Trasporto di misura' che compare in Cabri II è senza dubbio una notevole novità rispetto alla precedente versione di Cabri. Tale strumento va comunque visto essenzialmente, anche se non esclusivamente, nell'ottica delle coordinate cartesiane dove le relazioni geometriche vengono tradotte in relazioni numeriche.
Si vedano a proposito i grafici di retta e parabola nel piano cartesiano a partire dalla loro equazione che ho inviato alla lista qualche tempo fa. La realizzazione di tali grafici risulta evidentemente possibile, vista la loro natura, solo con l'utilizzo dello strumento trasporto di misura.
Non si tratta certamente di un mezzo per risolvere gli storici problemi della geometria greca.
Senza arrivare a Cabri II esisteva già la squadra e la riga graduata o altri strumenti.

(1) *Ricordiamo ai lettori del bollettino che ancora non lo sapessero che l'IRRSAE dell'Emilia-Romagna gestisce una lista di discussione in rete denominata Cabrinews.*
Per iscriversi è sufficiente mandarte un messaggio a
listserv@arci01.bo.cnr.it
inserendo nella prima riga del messaggio il comando:
subscrive cabrinews

Come fare

media inferiore

Modelli del Sistema solare con Cabri-géomètre II

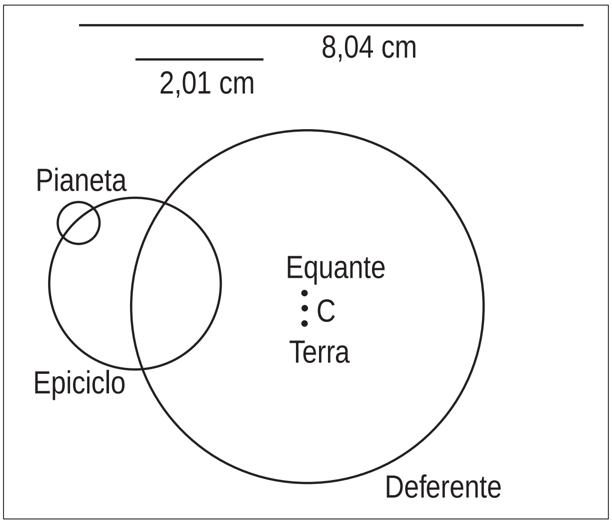
di Gianfranco Giacobino
Scuola Media Statale "G. Castriota",
S. Marzano di S. Giuseppe (TA)

Le caratteristiche dinamiche delle figure generate con il programma Cabri-géomètre II mi hanno consentito di presentare in una classe terza della Scuola Media Statale "G. Castriota" di San Marzano di San Giuseppe (TA) un lavoro sui modelli del Sistema solare di Tolomeo e di Tycho Brahe come introduzione allo studio della storia dell'astronomia.
Claudio Tolomeo, vissuto ad Alessandria d'Egitto nel secondo secolo dell'era cristiana, autore dell'opera "Syntaxis" (più nota come "Almagesto"), propose un modello geometrico del sistema solare per "salvare due fenomeni": il moto retrogrado dei pianeti e le variazioni di luminosità di Venere e di Marte.
Se, infatti, si osserva l'orbita che sembra descrivere un pianeta durante il suo moto apparente sulla volta celeste, si può costatare, come avevano fatto gli astronomi contemporanei di Tolomeo, che il pianeta sembra retrocedere, descrivendo una figura a forma di "cappio". [1]
Il paradigma dominante al tempo di Tolomeo, soppiantato poi dalla rivoluzione copernicana, sosteneva una rigida separazione fra "fisica" terrestre e "fisica" celeste. La Terra, mutevole e imperfetta, era immobile al centro dell'Universo. Il moto dei pianeti, invece, era un moto circolare uniforme, il moto di oggetti perfetti. Il moto circolare dei pianeti della sfera celeste però non spiegava il fenomeno dell'apparente retrocessione del pianeta e le variazioni di luminosità di Venere e di Marte.
Tolomeo allora formulò un modello "eccentrico" del Sistema solare (in contrapposizione al modello "omocentrico" o anche detto "modello a cipolla" di derivazione aristotelica), nel quale il moto dei pianeti intorno alla Terra, immobile e al centro dell'Universo, era la risultante di una combinazione di moti circolari: ogni pianeta ruotava su di una circonferenza, detta "epiciclo", il cui centro ruotava su di un'altra circonferenza, detta "deferente". Il centro della circonferenza intorno alla quale ruotavano i pianeti si trovava in posizione eccentrica

rispetto alla Terra. [2]
Tycho Brahe, astronomo danese nato nel 1546, nella sua opera "De Mundi Aetherei Recentioribus Phaenomenis", propose un altro modello, anch'esso con epicicli, nel quale La Luna e il Sole giravano intorno alla Terra, al centro dell'Universo, mentre Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno ruotavano intorno al Sole. [3]
Le illustrazioni dei modelli del Sistema solare di Tolomeo e di Tycho Brahe riportate nei manuali di scienze non aiutano lo studente a visualizzare i moti dei pianeti nei sistemi proposti dai due astronomi e non consentono di comprendere il carattere di pure costruzioni geometriche, e non fisiche, di tali sistemi, nati dall'esigenza di spiegare fenomeni quali il moto retrogrado e le variazioni di luminosità dei pianeti, osservati dalla Terra.
Attraverso le animazioni del moto dei pianeti realizzate con il software Cabri-géomètre II, invece gli studenti hanno potuto ricostruire ed esplorare i modelli proposti, formulare e verificare ipotesi di lavoro, apprezzare l'importanza della geometria nello studio della natura, familiarizzare con la storia delle scienze.

Scheda di lavoro n. 1:
costruzione del sistema tolemaico

1) Avvia *Cabri-géomètre* e apri un nuovo file
2) Crea nella parte alta della pagina video un segmento (CASELLA RETTE/SEGMENTO)
3) Misura il segmento creato (CASELLA MISURA/DISTANZA E LUNGHEZZA)
4) Modifica il precedente segmento in modo che misuri 8,04 cm (PUNTATORE)
5) Crea un secondo segmento sotto al primo che misuri 2,01 cm, ripetendo i passi 2, 3 e 4(1)
6) Crea un punto verso il centro della pagina video (CASELLA PUNTO/PUNTO)
7) Chiama C questo punto (CASELLA VISUALIZZA/NOMI)
8) Crea un altro punto sotto al punto C sulla verticale passante per C (CASELLA PUNTO/PUNTO)
9) Chiama questo secondo punto Terra (CASELLA VISUALIZZA/NOMI)
10) Costruisci il simmetrico del punto Terra rispetto al punto C (CASELLA TRASFORMAZIONI/SIMMETRIA ASSIALE)
11) Chiama il punto simmetrico di Terra rispetto a C Equante (CASELLA VISUALIZZA/NOMI)
12) Crea una circonferenza di 5,44 cm di diametro con centro in C
(CASELLA CURVE/CIRCONFERENZA)
13) Chiama questa circonferenza Deferente
(CASELLA VISUALIZZA/NOMI)
14) Crea una circonferenza di 2,60 cm di diametro con centro sulla circonferenza Deferente
(CASELLA CURVE /CIRCONFERENZA)
15) Chiama Epiciclo la circonferenza creata
(CASELLA VISUALIZZA/NOMI)
16) Costruisci una piccola circonferenza con centro su Epiciclo
(CASELLA CURVE/CIRCONFERENZA)
17) Chiama questa circonferenza Pianeta
(CASELLA VISUALIZZA/NOMI)
18) Allinea l'estremo sinistro dei due segmenti creati nei passi 2, 3, 4, 5 rispettivamente con il centro della circonferenza Pianeta e con il centro della circonferenza Epiciclo (PUNTATORE)
19) Salva la figura con nome Sistema tolemaico nella cartella Figure di Cabri-géomètre



Scheda di lavoro n. 2:
simulazione del moto di un pianeta intorno alla Terra

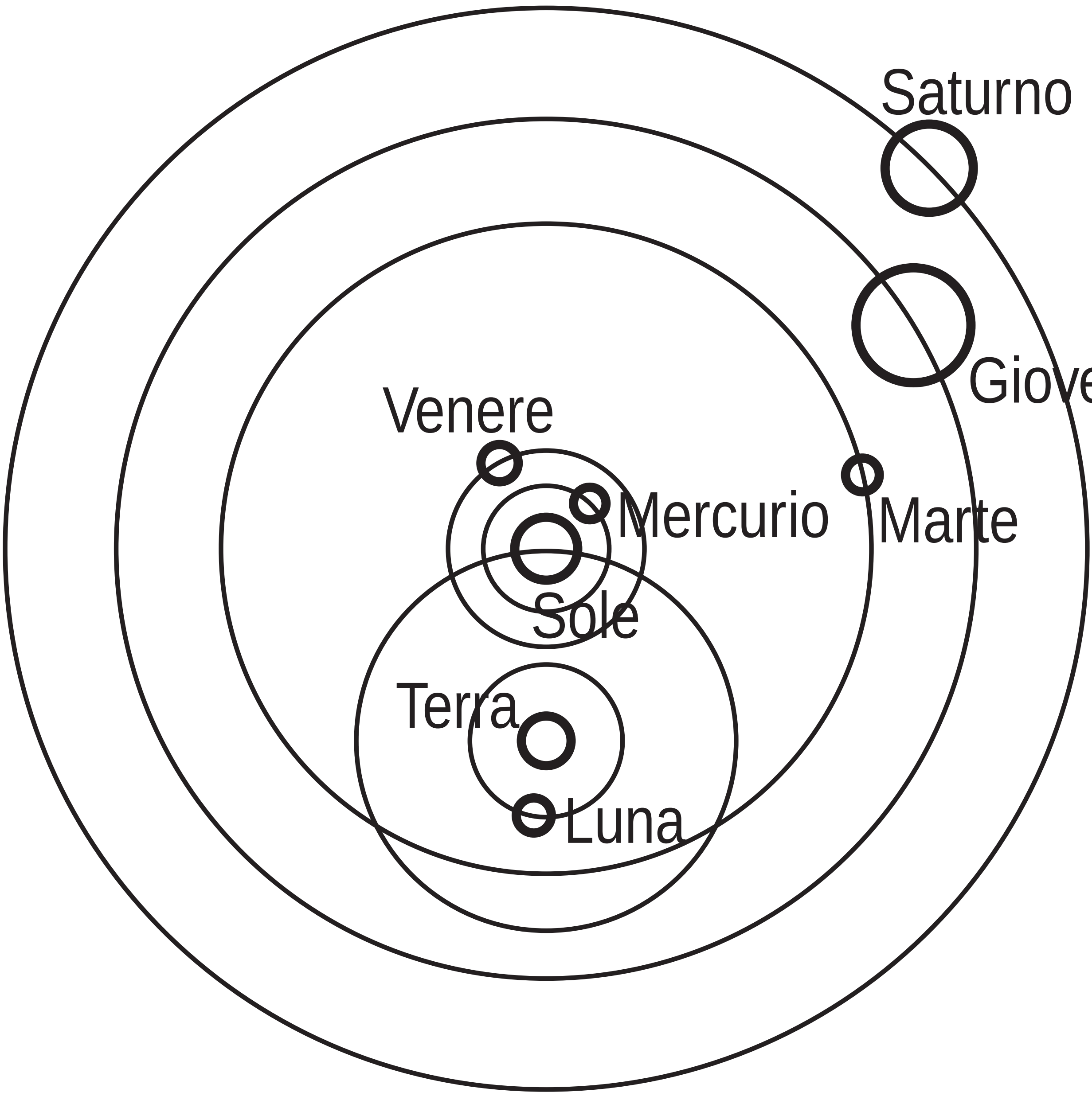
1) Avvia *Cabri-géomètre* e apri la figura Sistema tolemaico.fig creata nella Scheda di lavoro n. 1
2) Clicca sul punto centro della circonferenza Pianeta (CASELLA VISUALIZZA/TRACCIA)
3) Anima il punto precedente e il punto centro della circonferenza Epiciclo (CASELLA VISUALIZZA/ANIMAZIONE MULTIPLA)
4) Allunga le molle partendo dai punti scelti facendo in modo che il moto avvenga in senso orario (le velocità sono proporzionali agli allungamenti delle molle; per la lunghezza di ogni molla conviene far riferimento ai due segmenti disegnati nei passi 2, 3, 4, 5 della Scheda di lavoro n. 1)
5) Premi INVIO
6) Premi ESC per bloccare l'animazione

Scheda di lavoro n. 3:
il moto retrogrado e le variazioni di luminosità dei pianeti

1) Avvia Cabri-géomètre e apri la figura Sistema tole-

maico.fig creata nella scheda di lavoro n. 1

2) Simula il moto del Pianeta come descritto nella Scheda di lavoro n. 2, allungando le due molle in modo uguale
3) Osserva la traccia disegnata dal punto. Cosa noti? La traccia presenta una forma a “cappio”?
4) Ripeti l’animazione multipla dando alle molle allungamenti diversi (puoi considerare come unità di misura il segmento di 2,01 cm creato con la scheda di lavoro n.1). Per quali rapporti fra le lunghezze delle molle usate per l’animazione si ottiene un percorso con “cappio”? Quanti “cappi” si formano per ogni rivoluzione completa di un pianeta intorno alla Terra?
5) Prova ad allungare la molla agganciata al punto centro della circonferenza Pianeta di 8,04 cm e la molla relativa al centro della circonferenza Epiciclo, che ruota sulla circonferenza Deferente, di 2,01 cm (puoi utilizzare come riferimento metrico i segmenti in alto alla figura). Che cosa osservi? Come interpreti questo risultato in termini di movimento del Pianeta intorno alla Terra?
6) Prova a variare il diametro delle circonferenze disegnate nel modello del Sistema tolemaico e il senso di rotazione impresso ai movimenti del Pianeta e del centro dell’Epiciclo. Cosa osservi nella traccia lasciata dal Pianeta? Come interpreti tali risultati?
7) Osserva la posizione del Pianeta durante la rivoluzione intorno alla Terra. Si trova sempre alla stessa distanza dalla Terra? Il risultato osservato potrebbe spiegare la variazione di luminosità dei pianeti osservati dalla Terra?



Scheda di lavoro n. 4:
costruzione del modello di Tycho Brahe

1) Avvia *Cabri-géomètre* e apri un nuovo file
2) Crea una piccola circonferenza (CASELLA CURVE/CIRCONFERENZA)
3) Chiama Terra la circonferenza creata (CASELLA VISUALIZZA/NOMI)
4) Crea un'altra circonferenza concentrica a Terra di diametro doppio della circonferenza Terra (CIRCONFERENZA)
5) Crea una circonferenza di diametro minore della circonferenza Terra con centro su quella creata al passo 4
6) Chiama questa circonferenza Luna (NOMI)
7) Crea una circonferenza concentrica a Terra con diametro due volte e mezzo di quello della circonferenza creata al passo 4 (CIRCONFERENZA)
8) Crea una circonferenza con centro su quella creata al passo 7 (CIRCONFERENZA)
9) Chiama tale circonferenza Sole (NOMI)
10) Crea due circonferenze concentriche alla circonferenza creata al passo 8 con diametro rispettivamente doppio e triplo (CIRCONFERENZA)
11) Crea una circonferenza piccola su ogni circonferenza creata al passo 10 (CIRCONFERENZA)
12) Chiama le due circonferenze create al passo 11 rispettivamente Mercurio e Venere (NOMI)
13) Crea tre circonferenze concentriche alla circonferenza Sole con diametro rispettivamente 11, 14 e 17 volte maggiore della circonferenza Sole (CIRCONFERENZA)(2)
14) Crea una circonferenza su ciascuna delle tre circonferenze create al passo 13; la prima, più interna, delle dimensioni di Mercurio, le altre due più grandi (CIRCONFERENZA)
15) Chiama le circonferenze create al passo 14 rispettivamente Marte, Giove, Saturno (NOMI)
16) Salva la figura nella cartella Figura con il nome Tycho Brahe

Scheda di lavoro n. 5:
simulazione del moto dei pianeti nel modello di Tycho Brahe

1) Avvia Cabri-géomètre
2) Apri la figura Tycho Brahe.fig creata nella Scheda di lavoro n. 4
3) Anima i centri delle circonferenze che rappresentano la Luna, il Sole, Mercurio, Venere, Marte, Giove, Saturno contemporaneamente (CASELLA VISUALIZZA/ANIMAZIONE MULTIPLA)
4) Studia le tracce lasciate dai diversi pianeti rispetto alla Terra (anima ciascun pianeta e il Sole contemporaneamente). Si formano orbite con "cappi"?
5) Confronta i modelli di Tolomeo e di Tycho Brahe. Quali analogie e quali differenze ci sono tra i due modelli? Quale spiega meglio il moto retrogrado e le variazioni di luminosità dei pianeti?

Bibliografia

[1.] Caforio Antonio, Ferilli Aldo, *Physica/1. Corso di fisica ad uso dei licei scientifici*, Firenze, Le Monnier, 19822;

[2.] Albanese Luciano, "L'Astronomia" in *La scienza antica: assiomatica, osservazione, inizi della formalizzazione matematica*, Unità 2 dei materiali del corso di perfezionamento post lauream in "Epistemologia: teoria, storia e prassi della scienza. Elementi di didattica", Università degli studi di Roma, "Tor Vergata", anno accademico 1996/97;

[3.] Bellone Enrico, *Galileo: le opere e i giorni di una mente inquieta*, "I grandi della scienza", *Le Scienze* edizione italiana di *Scientific American*, Milano, n.1 febbraio 1998, anno I.

Note

(1) La scelta delle misure indicate nei punti 4 e 5 della Scheda 1 è funzionale al punto 5 della Scheda 3 e rappresenta un facilitatore nell'esplorazione del modello costruito: si potrà infatti notare che per un rapporto di allungamento 1:4 fra la molla ancorata al centro dell'Epiciclo e la molla ancorata al centro della circonferenza Pianeta, si ottengono due inversioni di moto mentre il centro dell'epiciclo compie un ciclo completo. Nel testo *Physica/1* (vedi bibliografia), pag.126, viene utilizzato un rapportodi 1:4 fra la velocità angolare del centro dell'Epiciclo intorno al centro della circonferenza Deferente e la velocità angolare del pianeta intorno al centro dell'Epiciclo, ottenendo come risultato quattro inversioni per ogni ciclo completo. Con studenti delle scuole superiori è possibile ricercare il motivo di tali differenze fra le due costruzioni. Le misure indicate nei punti 12 e 14 della Scheda 1 sono anch'esse dei facilitatori nella individuazione dei moti retrogradi. A rigore le traiettorie descritte dai pianeti nei modelli costruiti dipendono, oltre che dai rapporti fra le velocità angolari dei centri dell'Epiciclo e della circonferenza Deferente, anche dal rapporto dei rispettivi raggi. Ho preferito comunque facilitare il lavoro degli studenti suggerendo le misure indicate per i diametri.

(2) Le misure sono state scelte per ragioni di fedeltà all'immagine originale riportata in *Galileo: le opere e i giorni di una mente inquieta*, (vedi bibliografia), pag.10; ogni piccola variazione delle indicazioni suggerite nella costruzione del modello, che non altera i rapporti reciproci fra i pianeti del modello, non comporta sostanziali differenze qualitative dello stesso.

Il moto dei satelliti

di Francesco Curti
Istituto Statale d'Arte "G. Chierici" Reggio Emilia

L'applicazione che segue riguarda un problema ti tipo fisico: la traiettoria di un satellite che ruota attorno ad un pianeta, sotto l'azione dell'attrazione gravitazionale. Dal punto di vista fisico si possono fare alcune ipotesi che ne semplificano lo studio:

a) il pianeta sia fisso (ipotesi ragionevole quando la massa del pianeta è molto maggiore di quella del satellite)
b) non vi siano altre forze oltre a quella gravitazionale agente tra pianeta e satellite.

Le traiettorie che si ricavano come soluzione del 'problema dei due corpi, sono delle coniche. Con le ipotesi suddette è possibile determinare il tipo di conica, dal valore dell'eccentricità, parametro calcolabile come

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{(GmM)^2 m}}$$

dove E è l'energia del sistema, L il momento angolare, G la costante di gravitazione universale, m ed M le masse del satellite e del pianeta.

Si supponga inoltre che il satellite venga lanciato da una distanza iniziale R dal pianeta, perpendicolarmente alla retta congiungente i due corpi. Fissata la distanza di lancio, e tenendo conto dei parametri fisici in questione si conclude che il parametro 'e' dipende esclusivamente dalla velocità fornita inizialmente al satellite.

Per tracciare tali curve con CABRI si può fare uso delle macro che consentono di fare Algebra con CABRI. Occorre allora costruire una funzione che contenga il parametro eccentricità (e), al variare del quale, tenendo fissi il pianeta ed il punto di lancio del satellite, si possano ottenere le traiettorie corrispondenti.

Al fine di agevolare i calcoli con CABRI, senza tuttavia alterare il problema fisico, si può porre R=1, G=1, M=1 (m non importa in quanto la traiettoria non dipende dalla massa del satellite); con i valori appena assegnati si ricava che (1)

$$e = \left| v^2 - 1 \right|$$

Dal valore della velocità al momento del lancio è allora possibile determinare agevolmente il valore del parametro 'e'.

La funzione costruita per le traiettorie è una conica che passa per l'origine (punto di lancio del satellite) di un sistema di assi cartesiani, simmetrica rispetto l'asse delle ascisse, con il pianeta che sta in un fuoco fisso di coordinate (-1,0). In questo modo la distanza iniziale tra i due corpi è proprio R=1.

Dopo opportuni passaggi si perviene alla funzione (2)

$$y = \pm\sqrt{\left(e^2 - 1\right)x^2 - 2(1+e)x}$$

Da un'ulteriore analisi del problema si deduce che:

a) se 0 < v < vc (vc è la velocità che porta ad un'orbita circolare

$$vc = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

che per i valori assegnati alle costanti diventa vc = 1) si ha un'orbita ellittica con il pianeta che sta nel fuoco più distante dal punto di lancio (l'origine); a questo intervallo per v corrisponde l'intervallo per 'e': -1 < e <0

b) se v = vc si ha un'orbita circolare di raggio R e centro il pianeta; e = 0

c) se

$$vc < v < vc\sqrt{2}$$

si ha ancora un'orbita ellittica, ma con il pianeta nel fuoco più vicino al punto di lancio; 0 < e < 1

d) se

$$v = vc\sqrt{2}$$

l'orbita è una parabola; e = 1

e) se

$$v > vc\sqrt{2}$$

si ha una traiettoria iperbolica, e tanto più aumenta v, tanto più i bracci dell'iperbole si avvicinano alla direzione perpendicolare all'asse di simmetria; e > 1.

Per ottenere un valore dell'eccentricità negativo ,-1 < e < 0, che permetta di ottenere tutte le curve desiderate, si può calcolare il valore del parametro 'e' come dalla (1) senza però tenere conto del valore assoluto, cioè

$$e = v^2 - 1$$

Se -1 < e < 0 un fuoco resta fisso nel punto di ascissa x=-1, mentre l'altro al variare di 'e' da -1 a 0 si sposta da 0 a -1. Per 0 < e < 1 un fuoco resta sempre fisso in x=-1, mentre l'altro al tendere di 'e' a 1, diverge a meno infinito.

Dunque con CABRI non resta che sfruttare le macro del calcolo algebrico (somma, elevamento al quadrato, radice quadrata, prodotto).

Elenco ora i passi in sintesi:

1) retta (asse x) e due punti M ed m su essa (m assunto come origine O)
2) simmetrico di M rispetto ad m (punto 1 dell'asse x)
3) retta perpendicolare all'asse x e punto V su di essa (OV è il vettore velocità iniziale)
4) circonferenza centro O e raggio V, e sue intersezioni con asse x (marco V' il punto a destra di O)

5) calcolo con le macro

$$e = v^2 - 1$$

(con i punti 0, 1, V')

6) punto x su asse delle ascisse
7) calcolo con macro del valore della funzione

$$y = \pm\sqrt{(e^2-1)x^2 - 2(1+e)x}$$

8) retta per x perpendicolare all'asse delle ascisse
9) circonferenza con centro O e raggio y
10) intersezioni circonferenza 9) con retta 3)$\mapsto$punti Q, Q'
11) rette per Q e per Q' parallele all'asse delle ascisse
12) intersezioni rette 11) con retta 8)$\mapsto$ punti P, P'(punti della traiettoria cercata).

A questo punto sulla retta 3) si possono riportare i valori della velocità per l'orbita circolare vc (che vale 1) e per l'orbita parabolica

$$vc\sqrt{2}$$

Posizionato il punto V che definisce la velocità di lancio, muovendo il punto x sulla retta Mm (asse delle x), i punti P e P' descrivono il luogo della traiettoria del satellite.

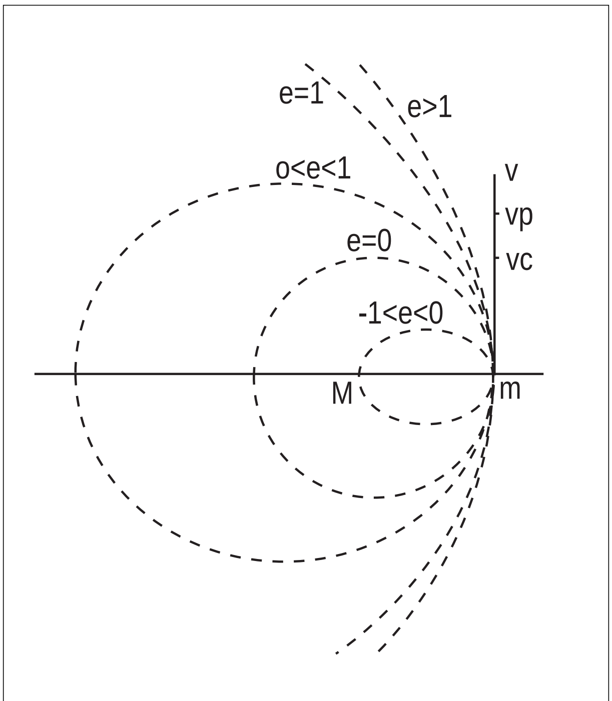
Bibliografia:

P. Bakulin E. Kononovic, *Astronomia generale*, Editori Riuniti

La Fisica di Berkeley 1, *Meccanica*, Zanichelli Bologna

Steve C. Frautschi, Richard P. Olenick, *L'universo meccanico e il calore*, Zanichelli Bologna

Roberto Ricci, *Algebra con Cabri*, Quaderni di CABRIRRSAE (N.5)

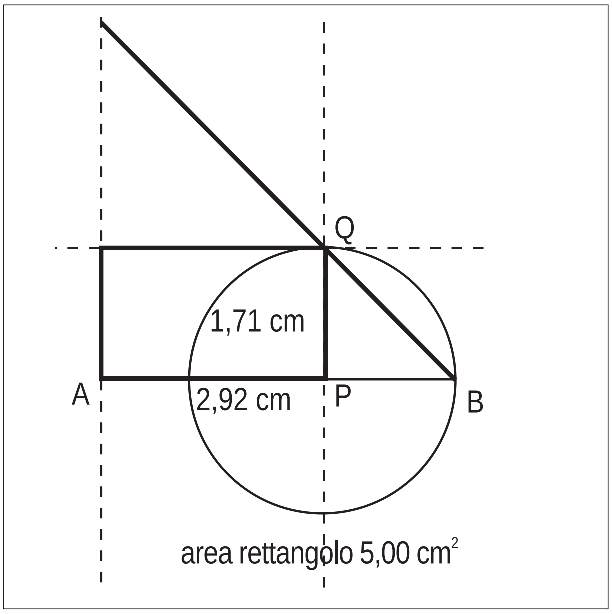


media superiore

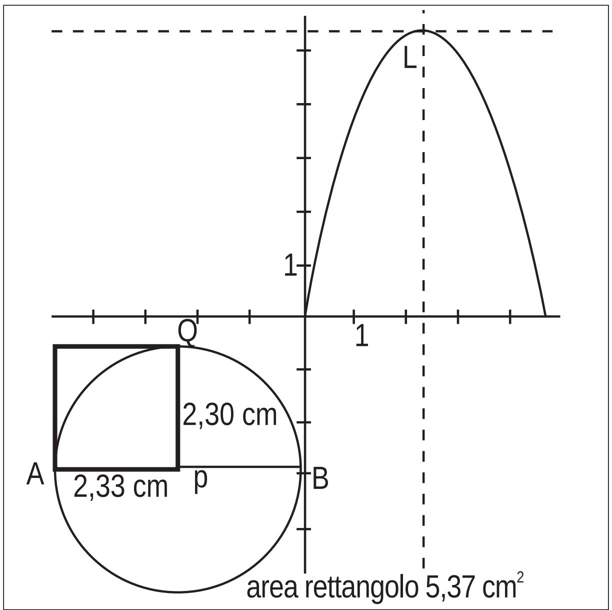
Un classico problema di massimo

di Cristiano Danè
Liceo Majorana di Torino ind. scientifico

I problemi di massimo e minimo sono generalmente affrontati in quinta liceo scientifico tradizionale, anche in vista dell'esame di maturità. Credo che l'utilizzo di Cabri aiuti ad affrontare tali problemi perché permette uno studio qualitativo della situazione geometrica, consentendo di avanzare ipotesi sulla soluzione finale, facilita considerevolmente la comprensione dei casi limite e riporta in primo piano gli aspetti di geometria euclidea spesso trascurati nelle classi terminali di liceo. E' in quest'ottica che propongo il seguente problema, già più volte formulato nelle prove di maturità:
Tra i rettangoli di dato perimetro, determina quello di area massima.
Il problema è abbastanza semplice, ma il metodo per risolverlo si può estendere ad altri esempi più complessi. Il lavoro si articola in due fasi: la prima riguarda la costruzione geometrica e l'interpretazione del problema, la seconda la traduzione analitica e la verifica delle ipotesi avanzate. La costruzione non è difficile: consideriamo un segmento AB come semiperimetro e su questo un punto P, costruiamo quindi il rettangolo di lati AP e PQ=PB. Al variare di P su AB si determinano tutti i rettangoli di semiperimetro AB. Per interpretare la figura ai fini della soluzione del problema, può essere utile muovere P con l'animazione e far lasciare la traccia



di Q (figura 1), così facendo si forma un segmento contenuto nella retta che avrebbe equazione x+y=p (usando le notazioni x=AP, y=PQ e p=semiperimetro). Si osserva che quando P si avvicina ad A e a B si formano rettangoli con area tendente a zero, e per la simmetria del problema viene naturale ipotizzare che l'area sia massima quando il rettangolo è un quadrato. A questo punto si può introdurre la misura (del segmento AP, del segmento PQ e dell'area del rettangolo, facendo il calcolo con la calcolatrice o direttamente con la misura dell'area se il quadrilatero è stato definito come poligono) e le considerazione intuitive possono essere ulteriormente avvalorate quantitativamente. Infine si passa al piano cartesiano (figura 2): dopo aver introdotto gli assi, si utilizza il comando trasporto di misura in modo da inserire sull'asse x la misura di AP e sull'asse y la misura dell'area del rettangolo. Tracciando le perpendicolari agli assi per i punti così individuati si ottiene il punto L che al variare di P su AB descrive, come luogo di punti, una parabola (la cui equazione è y=x(p-x)).



Si osserva anche in questo caso che il massimo si ha quando P è il punto medio di AB, notando in particolare che la circonferenza, con centro in P e passante per B, passa anche per A. Non rimane altro che dimostrare quanto sopra, calcolando l'ascissa del vertice della parabola, o in altri casi utilizzando il calcolo differenziale.

Bibliografia:

Alcune interessanti considerazioni su questo problema si trovano in due libri per il biennio, che credo abbiano fatto scuola:

V. Villani, B. Spotorno - *Matematica. Idee e metodi* - La Nuova Italia, Firenze, 1979.

G. Prodi - *Matematica come scoperta* - Casa editrice G. D'Anna, Messina-Firenze, 1977.

media superiore

Un problema di Flatlandia in classe

di Luigi Monica
ITG "Rondani" Parma

Dato un quadrato ABCD, dal vertice A escono due segmenti che lo congiungono con i punti medi M e N rispettivamente dei lati BC e CD.
Questi segmenti dividono una diagonale del quadrato in tre parti congruenti.

a) Riesci a motivare questa asserzione?
b) Questa proprietà vale anche in altri quadrilateri? Quali? Perché?

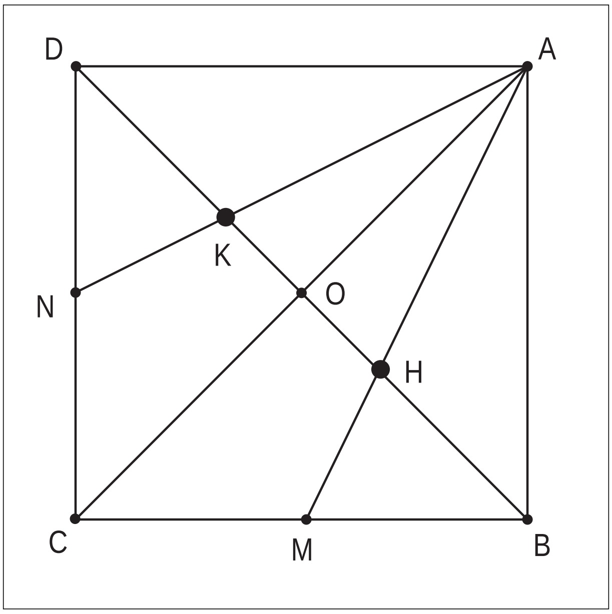
Introduzione

Ho realizzato quattro dimostrazioni sostanzialmente diverse del problema che mi sembra presenti alcuni spunti interessanti dal punto di vista didattico.
La prima dimostrazione utilizza solamente i criteri di congruenza e la proprietà del baricentro che in questo contesto potrebbe anche essere presentata senza alcuna dimostrazione.
Le altre dimostrazioni si basano tutte su teorema di Talete e conseguenze. Il problema trova allora la sua collocazione alla fine del primo anno di scuola o all'inizio del secondo, oppure nel corso del secondo anno di scuola superiore a seconda dell'approccio.
Vengono proposte alcune schede per un lavoro in classe, eventualmente a piccoli gruppi sulle tre dimostrazioni didatticamente più valide.
Ritengo che questo modo di procedere, riducendo la complessità del problema con l'indicazione di un itinerario, possa abituare anche i ragazzi degli Istituti Tecnici alla formulazione di dimostrazioni rigorose e logicamente corrette.
Una quarta dimostrazione è accennata nel file di Cabri allegato.
Per la cronaca: nonostante le schede guidate i miei studenti di seconda, che se si tratta di fare costruzioni con Cabri sono spesso di una intuizione sorprendente, non sono riusciti a formulare una dimostrazione sufficientemente rigorosa.

Prima dimostrazione guidata

Sia *ABCD* il quadrato dato, *M*, *N* i punti medi dei lati

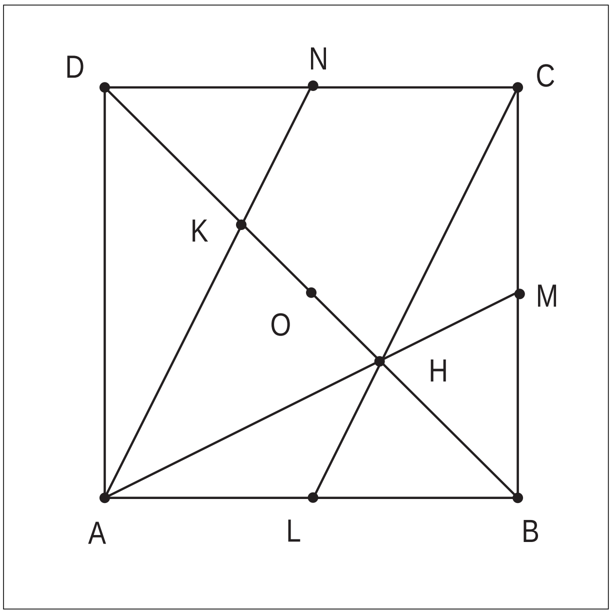
CB e *CD*. Indichiamo con *H*, *K* le intersezioni dei due segmenti *AM* e *AN* con la diagonale *BD*.
Dobbiamo dimostrare che *DK=HK=HB*.
Segui il ragionamento e spiega i vari passaggi in particolare le proposizioni in corsivo, facendo riferimento alla figura allegata.



Il punto K è il baricentro del triangolo *ADC*.
In base a quali ipotesi? Spiega………………
Ma il baricentro di un triangolo gode della proprietà ....
Quindi *DK=2KO*.
Un discorso analogo vale per il triangolo *ABC*.
I due triangoli ABC, ACD sono congruenti quindi lo sono anche le loro mediane.
Di conseguenza *KO=HO* e la tesi.
È effettivamente necessaria l'ipotesi che il quadrilatero *ABCD* sia un quadrato oppure ci possiamo accontentare di una ipotesi meno restrittiva?...... Spiega.
Completa e generalizza la dimostrazione

Seconda dimostrazione guidata

Il quadrato è una figura simmetrica rispetto ad una sua diagonale. Considera allora la simmetria di asse *DB*.
In questa simmetria AM, e CL si corrispondono, ed H appartenendo all'asse è un punto unito nella trasformazione.
Allora anche *CL* passa per *H*.
Il quadrilatero *ANCL* è un parallelogramma perché….
Quindi *CL* e *AN* sono paralleli…….
È facile a questo punto dedurre che *BH=HK*.
Sai fare la dimostrazione in modo rigoroso?
Su quale teorema della geometria dobbiamo basarci?
In modo analogo si dimostra che *DK=KH* per cui per transitività la tesi.
In questa dimostrazione abbiamo utilizzato all'inizio l'ipotesi che il quadrilatero sia un quadrato. Secondo te questa dimostrazione è valida solo per il quadrato,

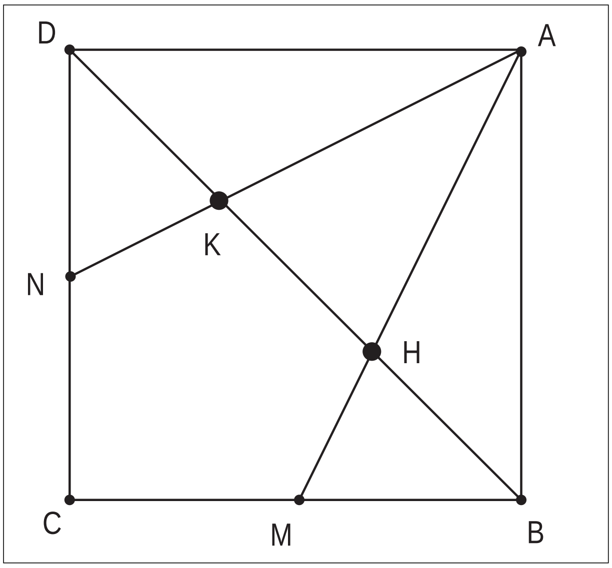


oppure si può trasferire ad altri quadrilateri particolari? Se la risposta è affermativa quali sono?

Ora una dimostrazione che si basa sulla similitudine dei triangoli

Terza dimostrazione

Fai sempre riferimento alla figura a lato.
I triangoli ADH e *MBH sono simili.*
Spiega tu il perché............
Essendo simili i lati sono............



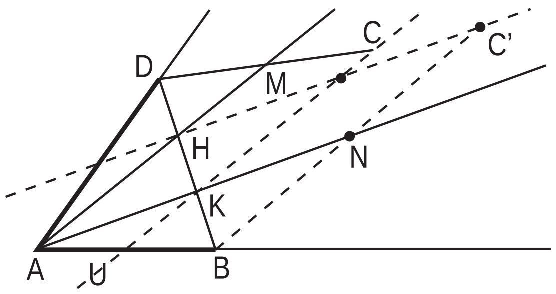
Ma i lati *AD* e *MB* sono nel rapporto 1:2. Allora è *HD=2HB.*
Allo stesso modo sono simili i triangoli DNK ed AKB............
Concludi tu la dimostrazione.
È possibile fare la stessa dimostrazione a partire da un parallelogramma?
Se la risposta è affermativa ripeti il ragionamento fatto per questa situazione.

Seconda parte: il problema rovesciato

Esercitazione con Cabri II

Parte prima

Disegna un angolo *DAB*.
Traccia ora il segmento *DB* e dividilo in tre parti uguali *DH, HK, KB*.
(se l'operazione di dividere il segmento in tre parti uguali fosse eccessivamente complessa, si può partire direttamente dal segmento *DB* poi costruire l'angolo)
Ora dal punto A traccia due semirette *AH, AK*.
Vogliamo trovare un punto *C* opposto ad *A* rispetto al segmento *DB* tale che i lati *BC* e *DC* del quadrilatero *ABCD* siano divisi rispettivamente in due parti uguali dalle semirette *AK* e *AH*.
Prendi ora un punto qualsiasi *M* sulla semiretta *AH*, sia *C* il simmetrico di *D* rispetto ad *M*.
Allo stesso modo prendi un punto N sulla semiretta AK e sia *C'* il simmetrico di *B* rispetto a tale Punto.
Modificando la posizione dei punti *M*, *N* è possibbile far coincidere *C* con *C'*.
Quand'è che questo succede?
Sei in grado di spiegare i risultati ottenuti?



Parte seconda

Quale è il luogo dei punti *C* al variare di *M* sulla semiretta *AK*?
Prova a rispondere poi disegnalo con Costruzione Luogo del Cabri; fai la stessa cosa con *C'*.
Dove si intersecano le due rette trovate?
Otterrai la dimostrazione che il quadrilatero *ABCD* è un parallelogramma.

Pubblichiamo le soluzioni di alcuni problemi presentati nel bollettino n° 16 nella sezione ***Proposte di lavoro***

Problema n° 21

di Aldo Boiti
I.S.A. “E. e U. Nordio” Trieste

Seminario “Matematica e software didattici”
Bellaria, 22-24 aprile 1998

Siano A e B due punti situati esternamente e da parti opposte della striscia individuata da due rette parallele d1 e d2. Costruire il minimo percorso AMNB che unisca i punti A e B, con M appartenente a d1, N appartenente a d2 ed MN perpendicolare alle due rette.

Cabri permette di discutere tutti gli aspetti di questo semplice problema di geometria. L'esistenza della soluzione può essere inferita dall'esame di un appropriato luogo di punti. La dimostrazione rigorosa deve però essere fatta per via sintetica.
I prerequisiti necessari per affrontare il problema sono semplici nozioni di geometria elementare, certamente possedute dagli studenti già al termine del primo anno del biennio.
Nonostante la sua semplicità, il problema rappresenta una valida introduzione allo studio dei problemi di minimo risolubili per via sintetica e offre inoltre lo spunto per interessanti anticipazioni sui concetti di funzione e di continuità. L'uso dello strumento informatico può favorire la partecipazione al dialogo educativo anche da parte degli studenti di solito meno motivati.
La chiave della soluzione è il riconoscimento di un elemento invariante, la cui eliminazione, per mezzo di una trasformazione geometrica, riduce il problema all'applicazione di un postulato fondamentale. Gli studenti sono così posti di fronte, in un caso semplice, a uno dei principi di base delle strategie di soluzione dei problemi, il principio d'invarianza.
L'argomento suggerisce l'approfondimento dei concetti di funzione e di continuità. I luoghi tracciati sono esempi di grafici di funzioni che esprimono le variazioni di grandezze geometriche.

Costruzione della figura con *Cabri*

Passi della costruzione (per brevità non sono indicati i comandi di **Cabri**):
1) tracciare due rette parallele d1 e d2;
2) all'esterno della striscia delle due rette parallele e da parti opposte segnare i punti A e B (è indifferente che A stia a destra o a sinistra di B, escludendo il caso banale che la retta per A e B sia perpendicolare alle due rette parallele);
3) per un punto M della retta d1 tracciare la retta perpendicolare alle due rette parallele;
4) indicare con N l'intersezione della retta perpendicolare con la retta d2;
5) tracciare i segmenti AM e BN.

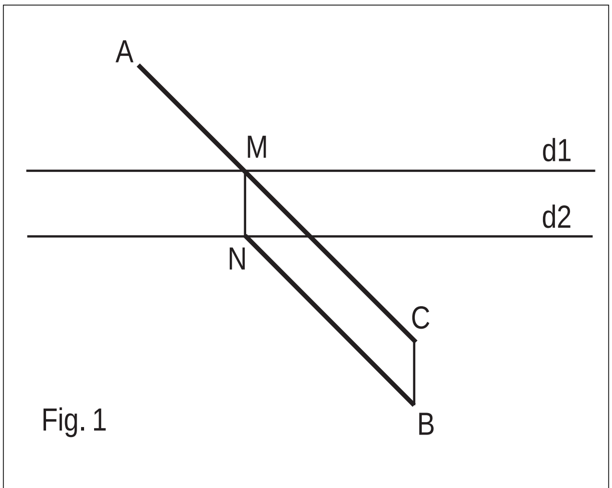


Fig. 1

Il punto A può stare dalla parte della retta d_1 (Fig. 1) oppure dalla parte della retta d_2 (Fig. 2).

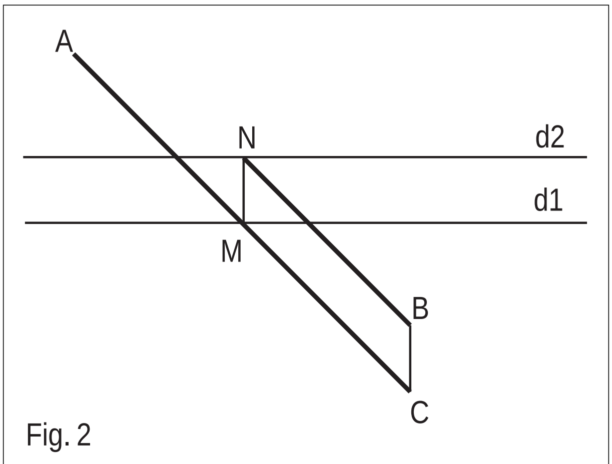


Fig. 2

Le figure possono essere modificate dinamicamente spostando il punto M sulla retta d_1. Si ottengono così con continuità tutti i possibili percorsi AMNB.

Senza perdita di generalità, si può supporre che il punto A si trovi dalla parte della retta d_1, a sinistra di B, come nella Fig. 3. Sulla retta MN sono segnati i segmenti MA' ed NB', congruenti rispettivamente ad MA e ad NB. Indicato con A" il punto simmetrico di M rispetto al punto medio Q di NA', il segmento NA" risulta essere congruente ad MA. Si assuma la retta d_2 come asse delle ascisse e si considerino i luoghi descritti dai punti A" e B' al variare di M sulla retta d_1 . Essi rappresentano, in unità arbitrarie, i grafici delle funzioni f_a ed f_b i cui valori sono le distanze dei punti A e B rispettivamente da M e da N. Indicato con P il punto simmetrico di N rispetto al punto medio O di A'B', il segmento NP è congruente alla somma dei segmenti che costituiscono il percorso AMNB. Il luogo descritto dal punto P è dunque il grafico della funzione f_p che esprime la misura del percorso AMNB. La funzione f_p è la somma a punto a punto delle funzioni f_a ed f_b e della distanza costante tra le due rette parallele. Indicate con r_a ed r_b le rette perpendicolari a d_1 passanti rispettivamente per A e B (Fig. 3), le funzioni f_a ed f_b sono entrambe decrescenti a sinistra di r_a e crescenti a destra di r_b. La funzione f_p ha un andamento analogo e deve dunque presentare almeno un punto di minimo tra r_a ed r_b . La Fig. 3 suggerisce infatti la presenza di un minimo nel grafico di f_p ma la sua posizione non è tanto evidente perché per un tratto abbastanza lungo la curva appare quasi stazionaria. Per scoprire dove si trova esattamente il minimo si deve ricorrere a un ragionamento sintetico.

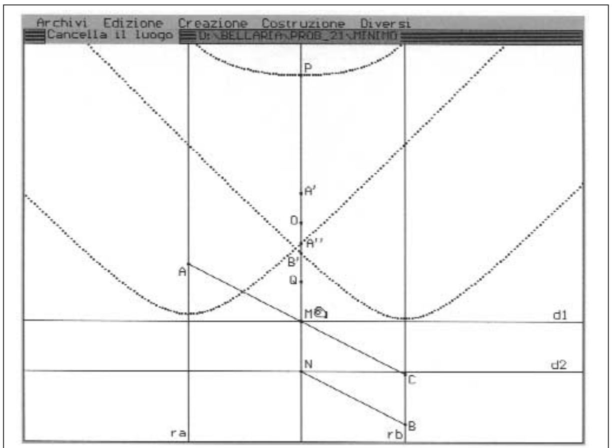


Fig. 3

Soluzione sintetica del problema

Per qualunque percorso AMNB il segmento MN è invariante e dunque non influisce sulla condizione di minimo. Per depurare il problema da MN si può pensare ad una opportuna traslazione in direzione perpendicolare alle due rette parallele, che porti una delle due rette a coincidere con l'altra e sostituisca il punto B con un opportuno punto C. Tenuto conto di tutti i casi possibili, illustrati nelle Fig. 1 e 2, il modo più semplice di descrivere l'operazione è di indicare con C il quarto vertice del parallelogramma i cui primi tre vertici sono i punti MNB. Come B, il punto C è un punto fisso. La lunghezza del percorso AMNB è uguale a quella del percorso AMCB, in cui l'ultimo segmento CB è fisso e costante. Il percorso AMNB minimo si trova per quella posizione del punto M che rende minimo il percorso AMC. Il problema si riduce così a trovare il cammino più breve che congiunge i punti A e C, incontrando in un punto M la retta d_1 . La soluzione è il segmento AC, perché i due punti A e C si trovano in semipiani opposti rispetto a d_1. L'intersezione del segmento AC con la retta d1 è il punto M che corrisponde al percorso AMNB minimo.

È richiesta una certa cautela nella discussione della continuità: in prima battuta le considerazioni saranno lasciate a livello intuitivo, rinviando le riflessioni razionali e gli approfondimenti critici al momento curricolare più appropriato.
Probabilmente gli allievi scopriranno da soli che la forma dei luoghi cambia quando si variano le distanze dei punti A e B dalle rette parallele. Questa osservazione porta inevitabilmente allo studio dei casi limite, quando si accettano distanze nulle. È particolarmente istruttivo il caso in cui A appartiene a d_1 e B a d_2 . Le funzioni f_a , f_b ed f_P si esprimono allora per mezzo di valori assoluti di funzioni lineari, i cui grafici possono essere visualizzati con Cabri come luoghi di punti. Le infinite soluzioni ammesse dal problema in questo caso si riconoscono nel particolare grafico di f_P (per motivi di spazio i dettagli sono lasciati al gentile lettore).

Problema n° 10 e n° 21

di Renato Verdiani
Liceo Scientifico “Il Pontorno” Empoli - FI

Seminario “ Matematica e software didattici”
Bellaria 22 - 24 Aprile 1998

PROBLEMA N. 10

Una corda di lunghezza costante scivola in un cerchio dato. Gli estremi della corda vengono proiettati ortogonalmente su un diametro fissato. Le proiezioni ottenute e il punto medio della corda sono i vertici di un triangolo. Si dimostri che il triangolo è isoscele e che non cambia mai la sua forma allo spostarsi della corda nel cerchio.
La figura 1 è il risultato della costruzione geometrica

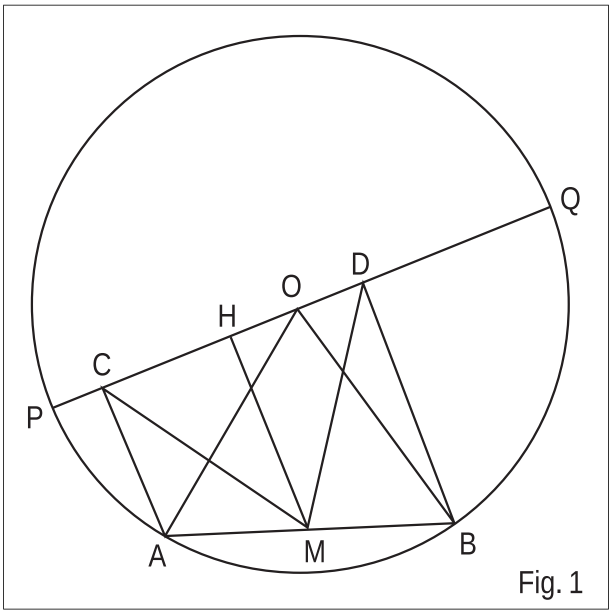


Fig. 1

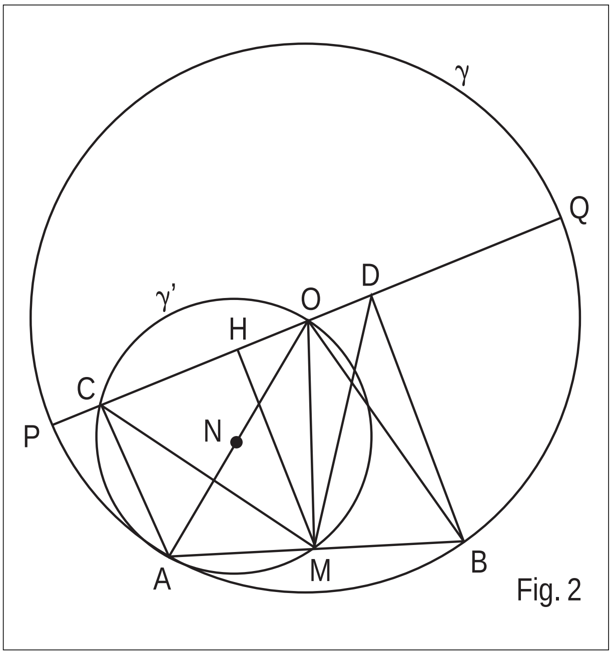


Fig. 2

eseguita con CABRI.
Sempre con CABRI, facendo scorrere l'estremo A della corda AB (di lunghezza costante) sulla circonferenza di centro O e raggio arbitrario, possiamo verificare le due asserzioni del quesito.
La dimostrazione può procedere in questi termini, dopo aver disegnato sul diametro PQ anche la proiezione H del punto M.
Per il teorema di Talete, poiché i segmenti AC, MH e BD sono paralleli e poiché M è punto medio del segmento AB, anche H è punto medio del segmento CD.
Dato che MH è perpendicolare al diametro PQ, il triangolo CMD è isoscele rispetto alla base CD.
La figura 2 ci aiuta a dimostrare la seconda parte del problema.
Poiché anche il triangolo ABO è isoscele rispetto alla base AB (OA e OB sono raggi della circonferenza data), il segmento OM è perpendicolare alla corda AB.
Il triangolo ACO è rettangolo in C (per costruzione) e il triangolo AMO è rettangolo in M per quanto detto in precedenza. I due triangoli hanno l'ipotenusa AO in comune e quindi sono inscrittibili in una medesima cir-

conferenza g'.
Gli angoli OCM e OAM sono uguali perché angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda OM.
Poiché il triangolo isoscele AOB rimane uguale a se stesso durante lo spostamento della corda AB nel cerchio, anche il triangolo CMD rimane della stessa forma.

PROBLEMA N. 21

Siano A e B due punti situati esternamente e da parti opposte della striscia individuata da due rette parallele d_1 e d_2. Costruire il minimo percorso AMNB che unisce i punti A e B con M d_1, N d_2 e MN perpendicolare alle rette.

Si consideri il punto A' situato sulla retta r passante per il punto A e perpendicolare alle due rette d_1 e d_2 in modo che: AA' = MN .
Il minimo percorso tra i punti A' e B è dato dal segmento A'B (figura 1).
Sia N il punto d'intersezione tra tale segmento e la retta d_2 ; sia M il punto di d_1 tale che MN sia perpendicolare alle rette d_1 e d_2 .
Poiché NMAA' è un parallelogramma, (e quindi anche AM = A'N), AM + MN + NB è il percorso minimo che soddisfa alle condizioni del testo del problema.
La figura 2 ci aiuta a convalidare tale conclusione.
Sia M' un punto generico di d_1 distinto da M e sia N' il punto di d_2 tale che M'N' sia perpendicolare alle rette d_1 e d_2 .
Dimostriamo che il percorso AM' + M'N' + N'B è maggiore del percorso precedente:
AM' + M'N' + N'B > AM + MN + NB (1)
Poiché M'N' = MN, AM' = A'N' e AM = A'N, la (1) diventa: A'N' + N'B > A'N + NB e quindi

A'N' + N'B > A'B.

Quest'ultima disuguaglianza è vera per le note relazioni tra i lati di un triangolo.

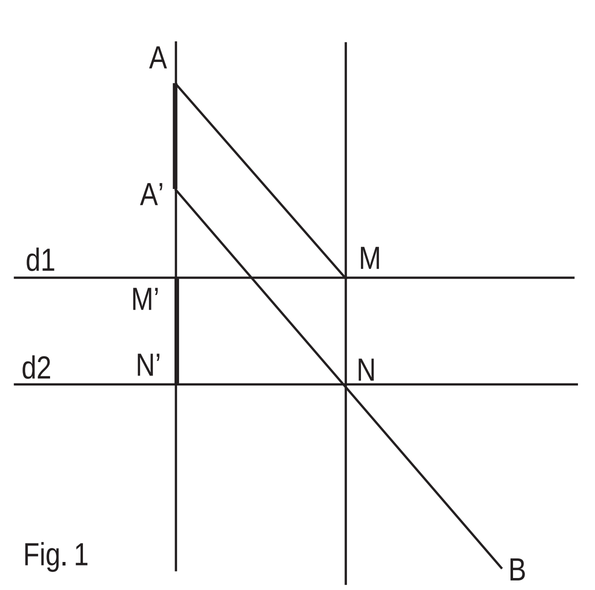


Fig. 1

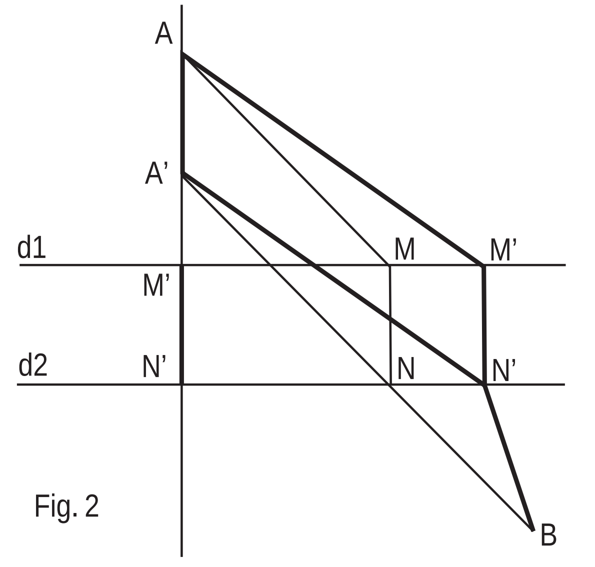


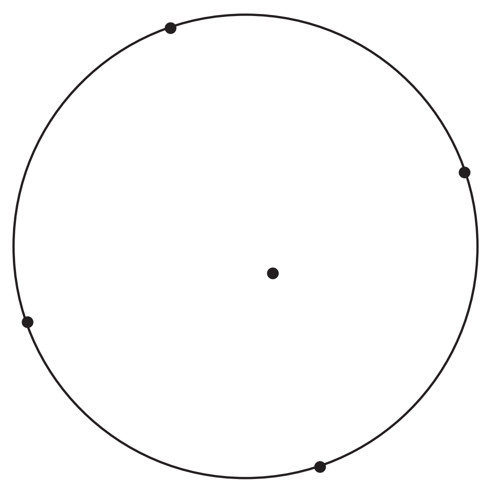
Fig. 2

Proposte di lavoro

Il semicerchio senza riga

Da "Giocando alla matematica"
di Pierre Berloquin Ed. A. Vallardi

La geometria del compasso consiste nel realizzare costruzioni geometriche con il solo compasso, senza riga né altri strumenti. Ecco un problema da risolvere in questo modo:
è data una circonferenza con il suo centro, come si può dividerla in quattro parti uguali con il solo uso del compasso?

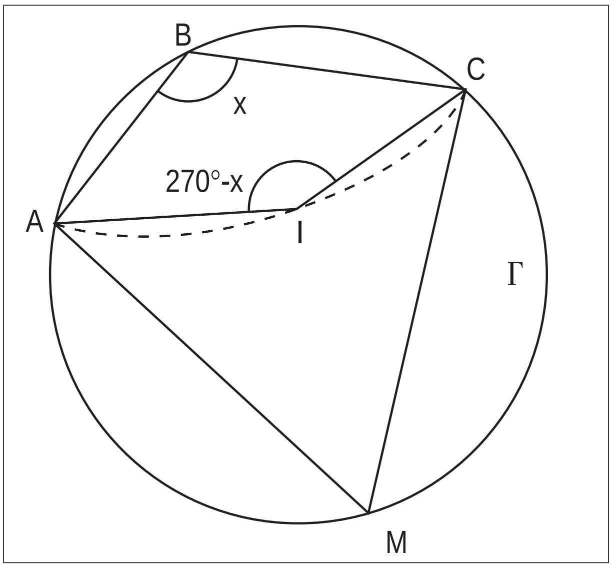


Da Abracadabri

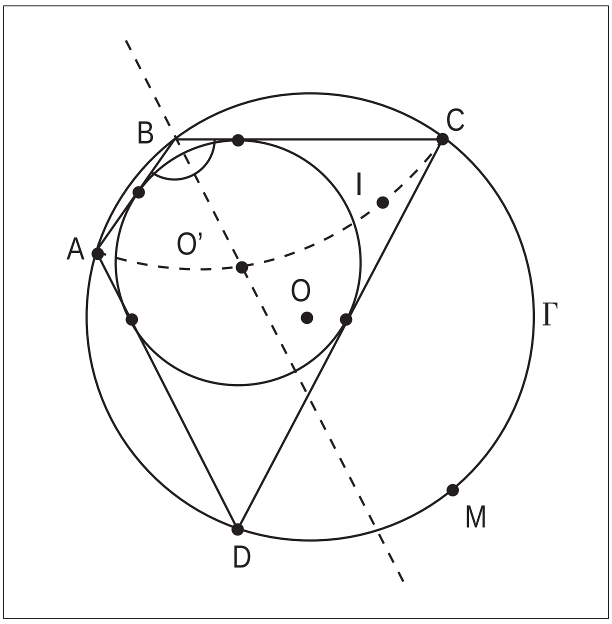
Il quadrilatero bicentrico

da abraCAdaBRI n.9 (‘95) - a cura di C. Camalon
traduzione di Giuliana Bettini
I.R.R.S.A.E. Emilia-Romagna

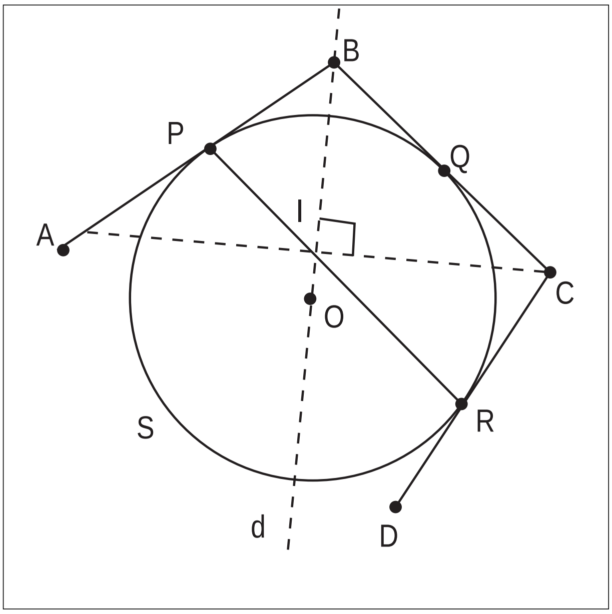
Il problema è il seguente: *costruire, con riga e compasso, un quadrilatero bicentrico; cioè un quadrilatero che sia contemporaneamente inscrittibile e circoscrittibile*.
Ecco la soluzione di un alunno del liceo Pablo Neruda, di Saint-Martin D’Hères (Isère), inviataci da B. Vartanian, animatore di un “atelier de géométrie”. Dato un triangolo ABC e il suo cerchio circoscritto Γ, il problema si riconduce alla costruzione di un punto D del cerchio Γ tale che ABCD sia circoscrittibile.



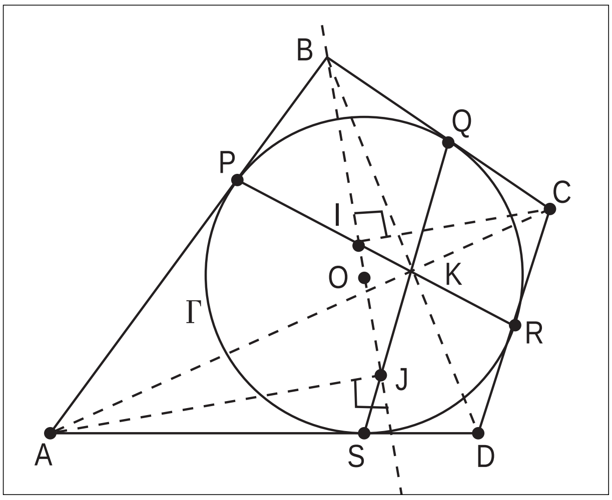
Sia Π il semipiano aperto di frontiera AC non contenente B. Sia M un punto dell’arco di circonferenza AC contenuto in Π, tale che le bisettrici interne di BAM e BCM si intersechino in un punto I interno al quadrilatero (convesso) ABCM. Poiché A e C sono da parti opposte della retta BM, gli angoli BAM e BCM sono supplementari. Se ne deduce che AIC=270°-ABC (rispettivamente AIC=90°+ABC) se l’angolo ABC è ottuso (risp. acuto), la misura a dell’angolo AIC non dipende dal punto M.



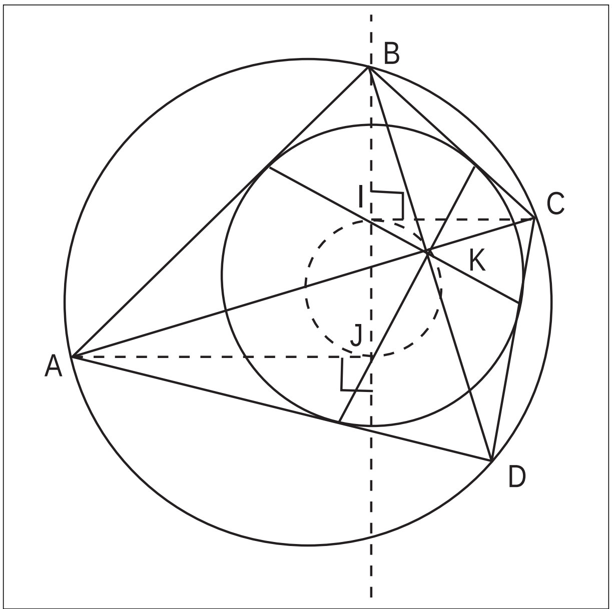
In altri termini il punto I appartiene all’arco capace Σ di estremi A e C, e di angolo *a*, situato nel semipiano Π.
Un punto D del cerchio Γ è soluzione del problema se e solo se le bisettrici degli angoli DAB, ABC, BCD sono concorrenti; questo significa che il quadrilatero ABCD è circoscrittibile, il centro O’ del cerchio inscritto ad ABCD è l’intersezione della bisettrice di ABC e dell’arco capace Σ.



Ciò assicura l’esistenza e l’unicità della soluzione. [Costruire il punto di intersezione O’ (che è contenuto nel semipiano Π) della bisettrice di ABC con il cerchio circoscritto a AIC, poi il cerchio Γ’ tangente ai lati AB, BC e CD e finalmente il punto D del cerchio Γ tale che



il cerchio Γ' sia inscritto in ABCD]
Vi proponiamo ora un'altra strada di ricerca, illustrando soprattutto il posto insostituibile che può prendere Cabri nella fase euristica (non si è mai senza armi con Cabri!).
Sia ABCD un quadrilatero (convesso); S il cerchio tangente alle rette AB, BC e CD; P, Q e R i rispettivi punti di contatto con queste rette.
Spostiamo il punto D e osserviamo: il segmento PR incontra la bisettrice interna d di ABC in un punto fisso I, il quale non è altro che la proiezione ortogonale di C sulla retta d. Si ottiene un risultato analogo per il cerchio tangente alle rette AD, AB e BC. Questo ci porta a interessarci alle corde congiungenti i punti di contatto



dei lati opposti di un quadrilatero circoscrittibile.
Siano P, Q, R e S quattro punti (punti su un oggetto) di un cerchio Γ (cerchio di base), le tangenti al cerchio in questi punti si incontrano in A, B, C e D. Si può osservare che le diagonali AC e BD così come le corde PR e QS sono concorrenti. E' facile verificare che se il quadrilatero ABCD è inoltre inscrittibile queste due corde sono perpendicolari. Ne deriva la costruzione [Sia ABC un triangolo, I e J le proiezioni ortogonali di C e di A sulla bisettrice interna di ABC, K il punto di intersezione della diagonale AC e del cerchio di diametro IJ, la retta BK incontra il cerchio circoscritto ad ABC in un altro punto D. Il quadrilatero ABCD così ottenuto è bicentrico].

Cabri in biblioteca

E' uscito il volume "Matematica e software didattici" pubblicato dall'IRRSAE Emilia Romagna e curato da Giovanni Margiotta. Tale volume raccoglie i problemi risolti e discussi da gruppi di insegnanti nel corso di un seminario residenziale tenutosi a Bellaria (RN) nell'Aprile 1998 e rivolto a docenti della Scuola Secondaria di 2° grado.
Chi fosse interessato a ricevere il volume può farne richiesta scritta, tramite la scuola di appartenenza, all'IRRSAE-ER.

Corsi e seminari

A Latina nei giorni 22, 23, 24 Aprile 1999 avrà luogo un seminario residenziale organizzato dall'IRRSAE Lazio in collaborazione con l'IRRSAE Emilia Romagna.
A tale seminario parteciperanno 40 docenti di Scuola Secondaria di 2° grado invitati dai tecnici referenti del progetto per la loro comprovata esperienza sull'uso di software didattici nel campo della matematica.
Lo scopo del progetto è di produrre materiale che coinvolga l'uso di diversi software.
Il seminario si svolgerà secondo un modulo già sperimentato lo scorso Aprile a Bellaria (RN): risoluzione individuale (e sperimentazione nelle classi) di problemi proposti dal comitato organizzatore mediante uno o più software, discussione dei lavori in incontri di gruppo, presentazione delle soluzioni finali ai convenuti e loro successiva pubblicazione. Si veda, in proposito, nella sezione *Cabri in biblioteca*, l'annuncio della pubblicazione dei lavori di Bellaria.

Nei giorni 28, 29 e 30 Aprile 1999 si terrà a Villa Franchetti, Preganziol (TV) il 1° Convegno Internazionale sul tema "L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Sperimentali con le Calcolatrici Grafiche e Simboliche". Il Convegno è organizzato dalla *ADT* (Associazione per la Didattica con le Tecnologie) ed avrà inizio alle ore 9 di Mercoledì e si concluderà alle ore 19 di Venerdì. Sono previsti interventi sia di docenti universitari sia di docenti di Scuola Secondaria e la partecipazione ad una Tavola rotonda di rappresentanti del Ministero della Pubblica Istruzione.
Per le iscrizioni (gratuite) rivolgersi al Prof. Rossetto Silvano, ITT "Mazzotti", fax: 0422-431875,
e-mail: *rossetto@alpha.science.unitn.it*

Nei giorni 14 e 15 Settembre a Bologna, presso La Facoltà di Ingegneria si terrà il Convegno dell'A.I.I.A. (Associazione Italiana Intelligenza Artificiale).
Nell'ambito di un workshop verrà trattato il problema del "Ruolo degli Strumenti e dei Metodi dell'Intelligenza Artificiale nei Processi Educativi".
Per maggiori informazioni rivolgersi a Prof. Giorgio Casadei (e-mail: casadei@cs.unibo.it).
La partecipazione al Convegno ha validità come attività di aggiornamento.

In questo numero

Nella sezione ***Cabri discusso*** presentiamo anche in questo bollettino due articoli: nel primo la proposta di un'attività in classe nella quale è possibile ricorrere a diversi software; nel secondo riportiamo commenti e osservazioni ad un articolo comparso nel numero precedente.

In ***Come fare*** abbiamo inizialmente due lavori di argomento fisico: uno, realizzato in una scuola media inferiore, utilizza Cabri II per rappresentare il sistema solare secondo Tolomeo e secondo Tycho Brahe; l'altro è rivolto invece alla scuola superiore e si occupa delle traiettorie dei satelliti.
Seguono: un lavoro che utilizza il piano cartesiano di Cabri II per risolvere un problema di massimo; un'attività in classe che trae lo spunto da un problema di Flatlandia; le soluzioni di altri problemi pubblicati nelle proposte di lavoro del bollettino N.16.

Nella sezione Proposte di lavoro, proponiamo un altro problema di costruzione col solo compasso (si veda il **Cabri***rrsae* n° 17)

Nella sezione Da ***abraCAdaBRI*** presentiamo la costruzione di un particolare quadrilatero.

L'immagine

Il volume che presentiamo in copertina è il racconto, per alcuni aspetti anche tragico, della vita privata e professionale di un importante matematico del ventesimo secolo (premio Nobel per l'economia nel 1994) e un'affascinante e documentata ricostruzione dello sviluppo della matematica americana nel primo dopoguerra.

Sylvia Nasar, "Il genio dei numeri. Storia di John Nash, matematico e folle", Rizzoli 1999

Inviateci i vostri articoli

CABRI*RRSAE* pubblica contributi relativi all'utilizzo del pacchetto Cabri-géomètre e di altri software matematici, con particolare attenzione alla valenza didattica e all'inserimento nel curricolo scolastico.
Ogni articolo (non più di 4 cartelle) deve pervenire, su supporto magnetico e cartaceo, ad uno degli indirizzi indicati in copertina, rispettando le seguenti modalità:

• *SUPPORTO CARTACEO*

- testo e figure devono essere impaginate secondo le intenzioni dell'autore (anche in bassa qualità di stampa)
- una stampata delle sole figure ***in alta qualità di stampa***
- una stampata dei grafici ***in alta qualità di stampa***
- anche le immagini catturate dallo schermo devono essere accompagnate da una stampata ***in alta qualità***

• *SUPPORTO MAGNETICO*

- il file di *testo* in ***formato Word*** (estensione .doc, meglio sarebbe se fosse .mcw) non deve contenere le figure che invece devono essere collocate in un file a parte.
- altri materiali (tabelle, grafici, ecc.) devono pervenire in formato originale, con indicazione dell'applicativo che le ha generate, comunque sempre accompagnate da una stampata di alta qualità.
- altre immagini (tipo quelle tridimensionali) generate da qualunque programma, devono essere esportate come prodotti vettoriali, cioè con estensione A.I.

Il materiale inviato non sarà restituito.

Siamo ugualmente interessati a ricevere materiali più articolati sull'utilizzo di Cabri; tali materiali possono essere diffusi mediante la collana "Quaderni di CABRI*RRSAE*". ■

CABRI*RRSAE*

COMITATO SCIENTIFICO
Giulio Cesare Barozzi (Università di Bologna)
Mario Barra (Università La Sapienza - Roma)
Paolo Boieri (Politecnico di Torino)
Colette Laborde (IMAG Grenoble)
Gianni Zanarini (Università di Bologna)

COMITATO DI REDAZIONE
Anna Maria Arpinati, Giuliana Bettini, Sebastiano Cappuccio, Michele Impedovo, , Maria Grazia Masi, Valerio Mezzogori, Paola Nanetti, Franca Noè, Cristina Silla, Daniele Tasso

Videoimpaginazione GRAPHICART - Via Fondazza, 37 - Tel. Fax (051) 30.70.73 - 40125 Bologna

Supplemento al n.6 Novembre - Dicembre 1998, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento educativi dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Giancarlo Cerini, proprietà IRRSAE/ER.