CABRIRRSAE

Bollettino degli utilizzatori di CABRI-géomètre

Dicembre 1996 - N. 10

SOMMARIO

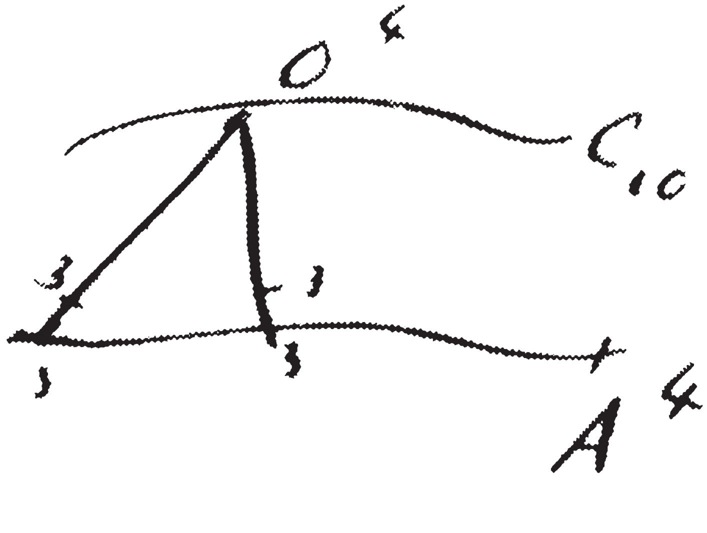
Indirizzo

Bollettino CABRI*RRSAE*
IRRSAE-Emilia Romagna
Via Ugo Bassi, 7
40121 Bologna

Tel. (051)22.76.69
Fax (051)26.92.21

E-mail:cabri@arci01.bo.cnr.it
Web: kidslink.bo.cnr.it/cabri/cabri.html

I.R.R.S.A.E.
Emilia-Romagna



Cabri discusso

Cabri, le affinità e un omaggio ad una insegnante

di Mario Barra
Dipartimento di Matematica,
Università "La Sapienza" Roma

•*Le idee dovrebbero essere generate nella mente dello studente e l'insegnante dovrebbe operare solo come una levatrice. Socrate (469-399 a.C.).*
•*"I am convinced that, in research, one should always combine intuition with axioms."*
F. Klein[1] *(1849-1925).*
•*"…The pupil must, on the one hand, reinvent learnt truths, and on the other hand learn to invent, to be creative." E. Fischbein*[2].
•*"…visual representations are not by themselves intuitive knowledge." E. Fischbein*[3].

Qualche ricordo per introdurre l'argomento

Dopo la laurea sono stato seduto per un anno sui banchi della scuola media di Emma Castelnuovo. Avevo programmato un tempo inferiore ad un anno, anzi avevo iniziato solo per curiosità, perché la borsa di studio che avevo allora, prevedeva come direttore di ricerca Bruno de Finetti[4]. Ma ero stato affascinato da Emma, da questa specie di Mary Poppins ("praticamente perfetta") che ogni giorno tirava fuori dai suoi quattro armadi del materiale didattico nuovo. Ciò che convinceva è che anche i suoi ragazzi erano affascinati, tanto che avrebbero seguito Emma in capo al mondo.
Il suo metodo sembrava una realizzazione concreta e personale dell'"avventura matematica" di cui parlava Lucio Lombardo Radice, condotta con le metodologie intuitive e fortemente geometriche di cui parlava de Finetti con il suo Fusionismo[5]. Così io, che avevo avuto la fortuna di essere allievo di questi grandi maestri, mi 'sentivo a casa' e mi faceva piacere verificare come la teoria funzionasse anche in classe.
Ci sarebbe da parlare molto di questi ed altri pionieri della didattica della matematica e del loro entusiasmo che carburava la fatica per ottenere a poco a poco le loro conquiste. Per ora accontentiamoci di sapere che una di queste conquiste era rappresentata proprio dai quattro armadi pieni di materiale didattico: un presupposto importante della didattica di Emma.
Insomma l'entusiasmo contagia e così io, che, per la carriera universitaria avrei fatto meglio a curare altrimenti i miei interessi, ero rimasto sui suoi banchi a sentire ogni sua lezione, riempiendo un pacco di circa 10 cm di fogli di appunti. Inoltre, intriso di quel fervore sociale, così presente nei giovani negli anni settanta, ero particolarmente contento di poter svolgere una ricerca sulla cui utilità non vi erano dubbi, in particolare per me che a scuola avevo avuto esperienze negative.
Anzi, sfruttavo addirittura la possibilità di sentire due volte ogni argomento. Emma infatti si era rifiutata di insegnare scienze naturali e così aveva due sezioni in cui insegnava matematica. Non so come avesse fatto ad ottenere tale dispensa, ma anche questo rientra pienamente nel quadro che mi sono fatto delle possibilità del suo carattere.

Emma in classe

Ma veniamo al dunque: le affinità. Come molti sanno dai libri di Emma[6], le proprietà delle affinità possono essere scoperte dai ragazzi attraverso esperienze con una tela elastica oppure con una grata di legno, quadrata, quadrettata e articolabile e attraverso le sue ombre proiettate dai raggi del sole. Emma si informava dal 'bollettino meteorologico' per programmare il periodo migliore per svolgere questa esperienza; e se il bollettino sbagliava, tirava fuori, con molta attenzione, una grande lente per trasformare in paralleli, i raggi di luce divergenti provenienti da una lampadina. Io non ho nulla da guadagnare a parlar bene di Emma e quindi sono probabilmente sincero nel dire che io, laureato con lode (scusate), ho capito pienamente le affinità solo con lei. L'università, con il suo purismo, schizofrenico almeno dal punto di vista didattico, aveva evitato accuratamente di fornirci un collegamento fra realtà e teoria, utile per costruirci un'immagine mentale[7].
"La grata e la sua ombra in generale non sono simili nel senso della geometria, ma si somigliano: sono *affini*".
"Che cosa si mantiene ?", "che cosa non si mantiene ?", "bravi, quello che avete scoperto può portare ad altre proprietà".
E i ragazzini 'zompettavano' con il sedere sulla sedia.
A questo modo di presentare le affinità aveva accennato la professoressa Abeasis all'università, dopo aver svolto la teoria, e mi sembra proprio che io le avessi detto qualche cosa del tipo: ma perché non presentate l'argomento anche voi allo stesso modo? Ma forse mi illudo perché mi piacerebbe essere stato fin da studente un fautore della necessità di affiancare ai metodi deduttivi, quelli induttivi e per analogia. Comunque l'esperienza fatta deve aver inciso sul mio modo di pensare, perché ad esempio mi ricordai di tutto questo quando proposi "*in-de*" (decisamente brutto e criptico) che doveva stare appunto per *in*duzione e *de*duzione, come titolo di una rivista che poi sarebbe divenuto "Induzioni: demografia, probabilità e statistica a scuola".
Perché divago ? Perché i ricordi sono piacevoli e perché sono simili al modo in cui mi hanno invitato a scrivere

su questa rivista. Anche in questo caso ho incontrato delle persone in grado di fornire le motivazioni migliori: l'entusiasmo e la fiducia. Bontà loro: speriamo bene. Oltre tutto la mia esperienza della scuola è praticamente solo indiretta.

Emma poi, sempre con il materiale nelle mani, continuava con le 'equazioni delle affinità': "se la tela elastica si è allungata tre volte ed è *raddoppiata* in altezza: - ad esempio così - possiamo dire che le equazioni dell'affinità sono: x'=3x e y'=2y … e le unità di area, e quindi tutte le aree, vengono moltiplicate per 3·2=6". Questo mi ricordava lo stesso significato del determinante delle trasformazioni lineari e poi quello dello Jacobiano, dopo aver espresso con approssimazione lineare delle funzioni più generali. Era così che de Finetti presentava[8] a lezione questi argomenti, sorridendo bonariamente. Poi vi collegava il determinante di Vandermonde, la formula di Newton e di Lagrange e l'integrale di Stiltjes, assieme ad interpretazioni in fisica, nel calcolo delle probabilità e in economia, in una specie di racconto in cui ogni paragrafo approfondiva i precedenti con una idea di base, essenzialmente geometrica.

Certo spesso non era facile capire, ma forse questo accade ad ogni idea nuova.

Evviva Euclide e la geometria delle trasformazioni In modo diverso! Ad esempio con il Cabri!

Cabri ha una filosofia in parte analoga a quella che abbiamo visto e la esprime sviluppando, fra l'altro, le capacità di ragionamento induttivo. Inoltre, anche più che nelle classi di Emma, c'è la possibilità di qualche scoperta personale. Si perde il fascino dei raggi di luce e dell'apprendimento collettivo, ma anche la didattica individuale è importante. Poi con Cabri si limita l'esigenza degli 'armadi', e quindi di chiedere, con un colloquio spesso impossibile con il preside o con dei segretari strapotenti, uno spazio decente almeno per il proprio materiale didattico. La signora delle pulizie possiede questo spazio. Giustamente. Ma si tratta di un discorso più facile da comprendere.

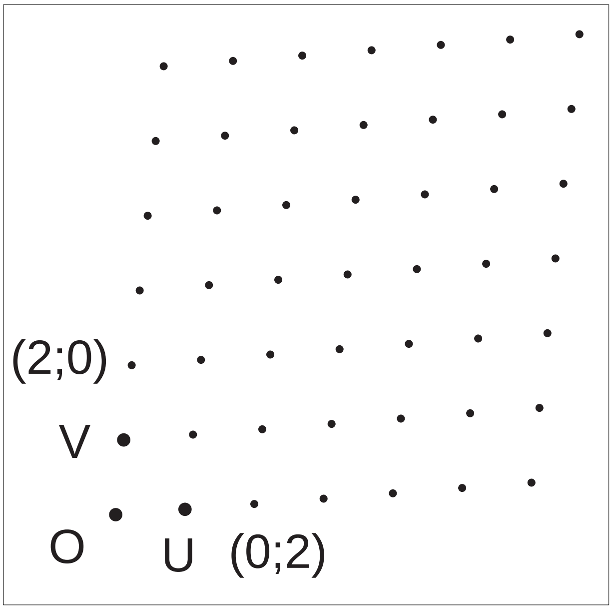
Agevolati da un giusto interesse per il computer, con il Cabri possiamo ridare facilmente un ruolo importante alla geometria riprendendo la tradizione della scuola geometrica italiana. Il riconoscimento del valore scientifico dei matematici di quella scuola, è fuori discussione, perché primeggiava nel mondo, ma penso che vada sottolineata l'importanza dell'eredità che ci hanno lasciato, soprattutto dal punto di vista didattico, per quanto riguarda il loro metodo di ricerca imperniato su uno stretto collegamento fra proprietà ed immagini. La nuova pedagogia, basata sulla preminenza del ruolo svolto dalle immagini mentali nell'apprendimento, potrebbe fornire ulteriori riconoscimenti alla geometria che, almeno con il buon senso, sembra la più indicata per stabilire un collegamento fra il ragionamento naturale e quello scientifico. Si possono diminuire le difficoltà e le ambiguità delle parole, che, per altro, non contengono implicitamente la possibilità di un loro approfondimento, come accade per le immagini, che in questo modo facilitano un apprendimento induttivo. Certo è che sogniamo ancora per immagini e chi può dire se, basandosi su queste, si può anche facilitare quella maturazione inconscia dei concetti di cui parlano Poincaré[9] (1854-1912) ed Hadamard[10] (1865-1963) ?

Veniamo ai particolari del nostro tema con degli esempi.

La grata, tassellata con parallelogrammi, articolabile

Disegniamo la grata articolabile di Emma con il Cabri. Facciamolo, per gioco, limitandoci a poche funzioni di questo programma. Ad esempio senza usare il parallelismo.

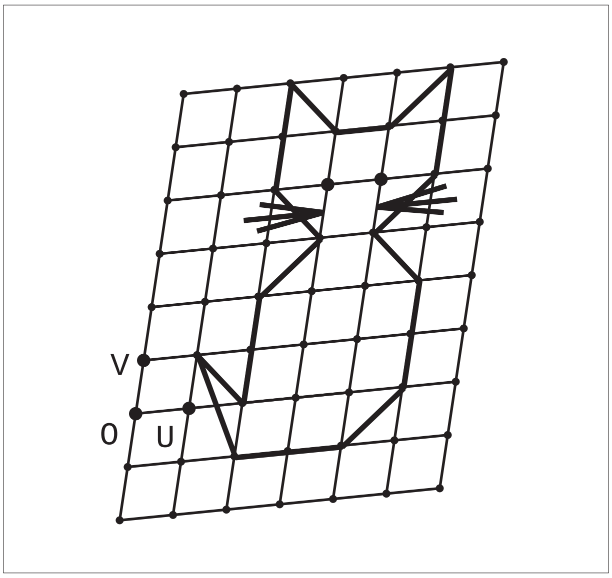
I primi 3 punti base (meglio se più grossi dei successivi) indicano l'origine O e gli estremi U e V dei versori (unitari) di un riferimento cartesiano. Da questi a destra e in alto con il "simmetrico di un punto rispetto ad un punto":

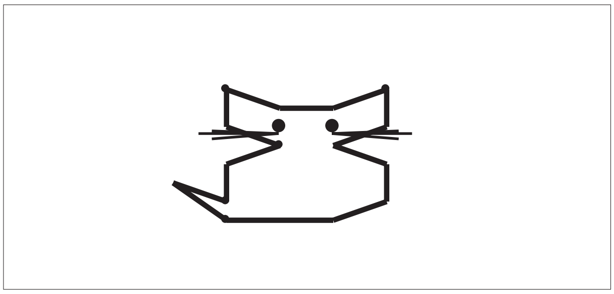


Quindi si ricomincia con il "punto medio" fra quelli di coordinate (0;2) e (2;0) e usando U e V si costruisce la seconda riga e colonna, come prima. Iterando, si costruisce un rettangolo articolabile a puntini che si completa nella grata articolabile, con i segmenti. Ovviamente ci sono molti altri metodi per costruirla, ad esempio utilizzando le rette parallele. Ciò che importa, per una sua trasformazione affine, è far dipendere tutta la costruzione, nel piano o nello spazio, dai punti iniziali, ad esempio senza fissare gli angoli utilizzando la perpendicolarità. Ora basta muovere l'origine O per avere una trasformazione affine nel piano che modifichi sia l'origine che i versori. Il disegno e la trasformazione si perfezionano spostando U e V[11].

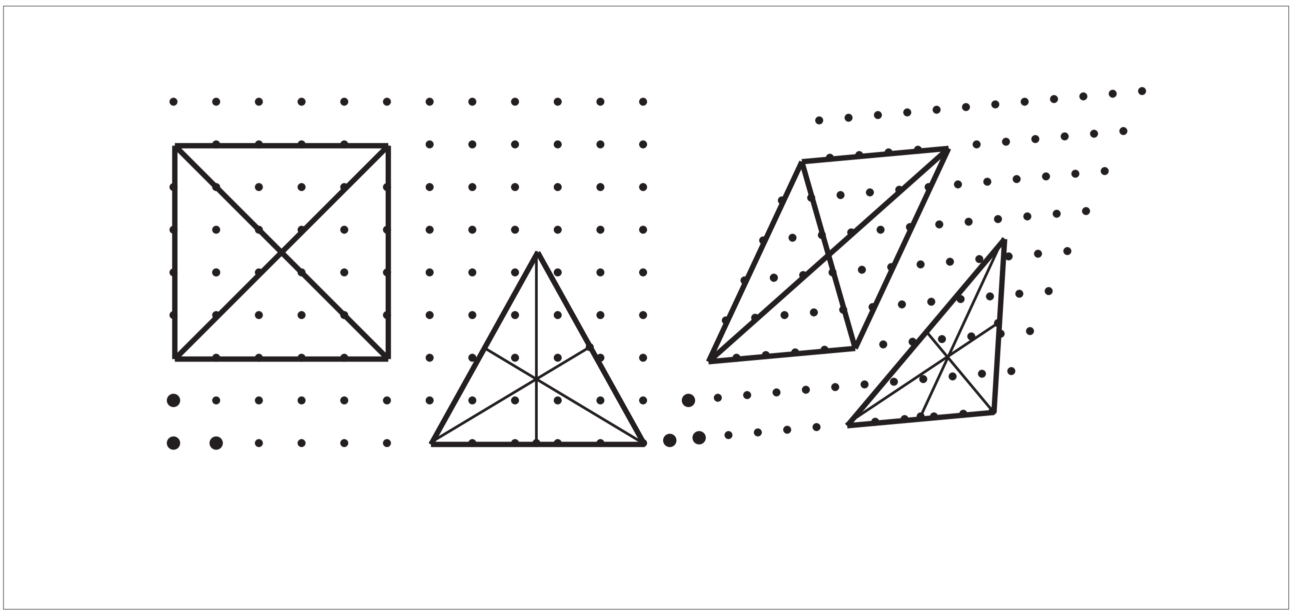
Da gatto a topo

Dopo aver disegnato sulla grata, questa può essere eventualmente resa invisibile. Se poi il disegno non entra nella grata si possono aggiungere delle ulteriori file di quadrati.

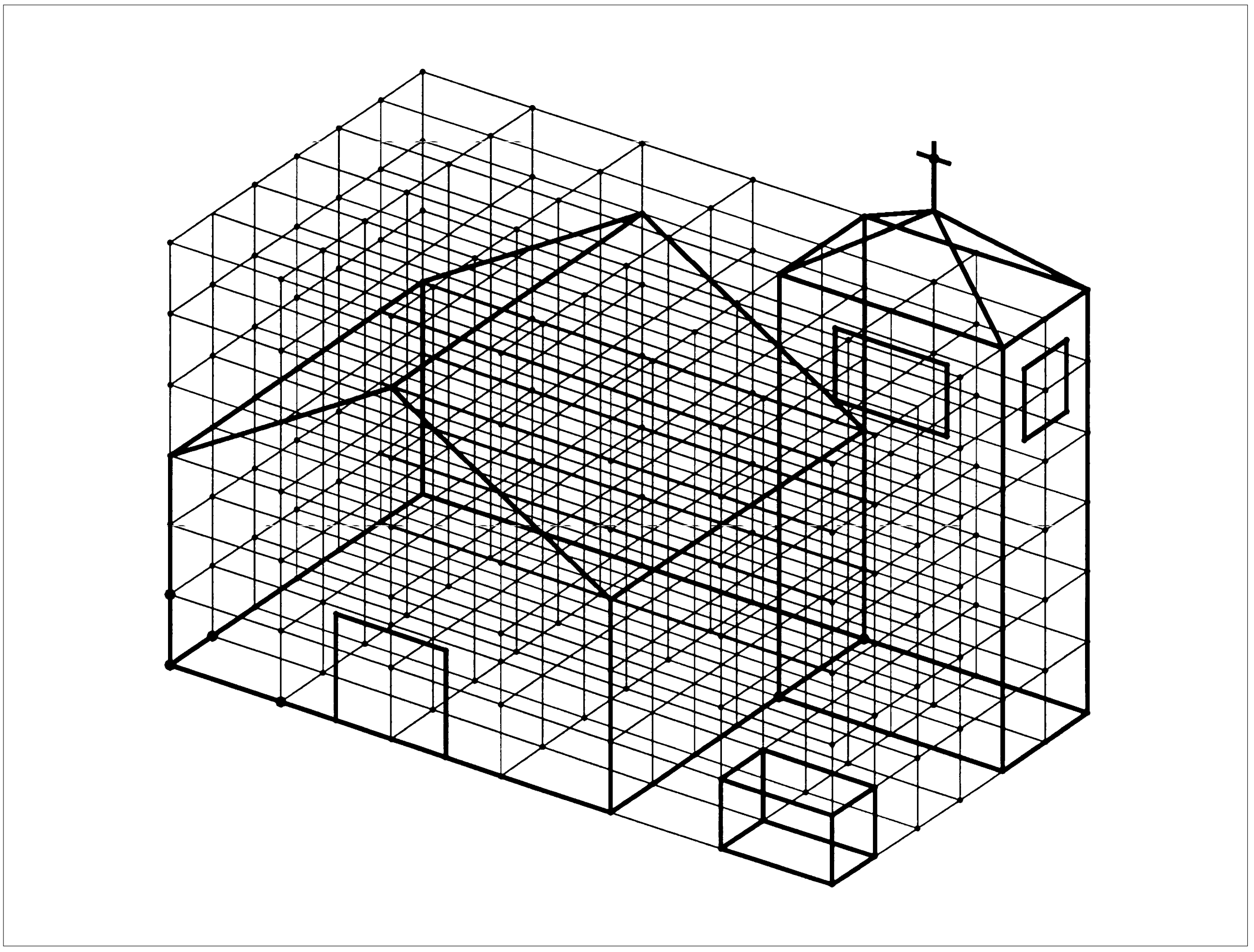


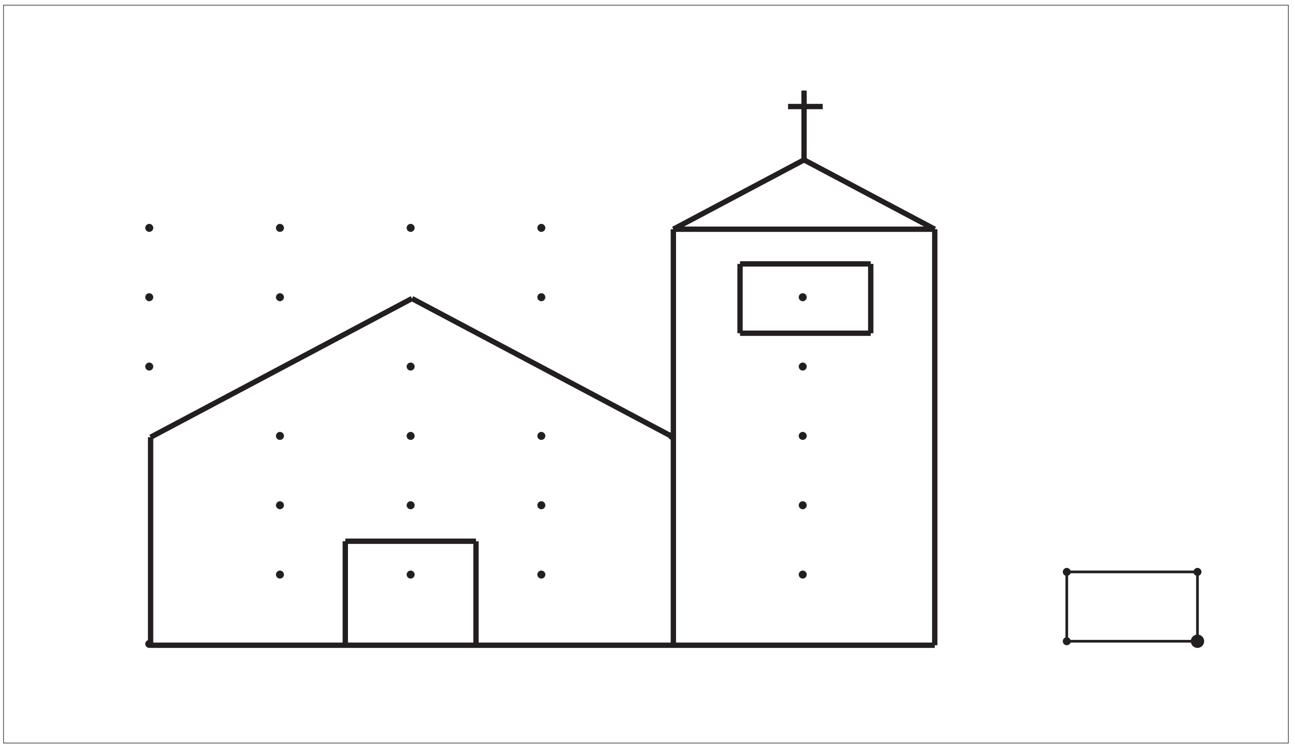


Così con una affinità il **gatto alla finestra** (tipo inglese e storta) diviene un **topone** (quasi! ed eliminando quello che disturba… si va dal calamaio, al dio Giano, bifronte e bibaffi, che ride. Ma!).
Se l'area della testa del gatto è la metà di quella del suo corpo ciò vale anche per il topo. In entrambi la distanza fra gli occhi è 1/3 di quella fra le punte degli orecchi, mentre non è più 1/7 dell'altezza … e ciò che era parallelo rimane tale[12].
Così nel parallelogramma le diagonali continuano a bisecarsi e a dividerlo in quattro parti di uguale area come avviene nel quadrato, ove è vero per simmetria; e così nel triangolo[13] con l'affinità si dimostra l'uguale area, 1/3 della totale, dei 3 triangoli ottenuti proiettando dal baricentro i 3 lati, che quindi hanno altezza e mediana 1/3 della totale. Non ci sono da fare calcoli routinari, ma riconoscere che il punto medio, il rapporto fra le parti di un segmento o, nel piano, i rapporti fra le aree, sono invarianti affini. Ed è istruttivo ritrovare le stesse proprietà in dimensione superiore, modificando ciò che occorre. Oppure ad esempio, accorgersi facilmente, per affinità, che in un tetraedro qualsiasi, presi 2 spigoli non confluenti in un vertice, esistono due piani paralleli che li contengono, verificandolo banalmente su 2 diagonali sghembe di 2 facce opposte di un cubo e quindi nel tetraedro regolare che unisce gli estremi di tali diagonali, per poi accorgersi che la proprietà è la stessa per 2 rette qualsiasi generalizzando, anche nella dimostrazione, quanto avviene per le altre diagonali delle facce considerate inizialmente nel cubo[14].
Tanto più così si può evitare di verificare con il metro le proprietà trovate, come alcuni hanno fatto nel caso delle ombre. Con il Cabri, in particolare, la verifica di molte proprietà può essere effettuata spostando e sovrapponendo le figure con il metodo di Euclide[15].

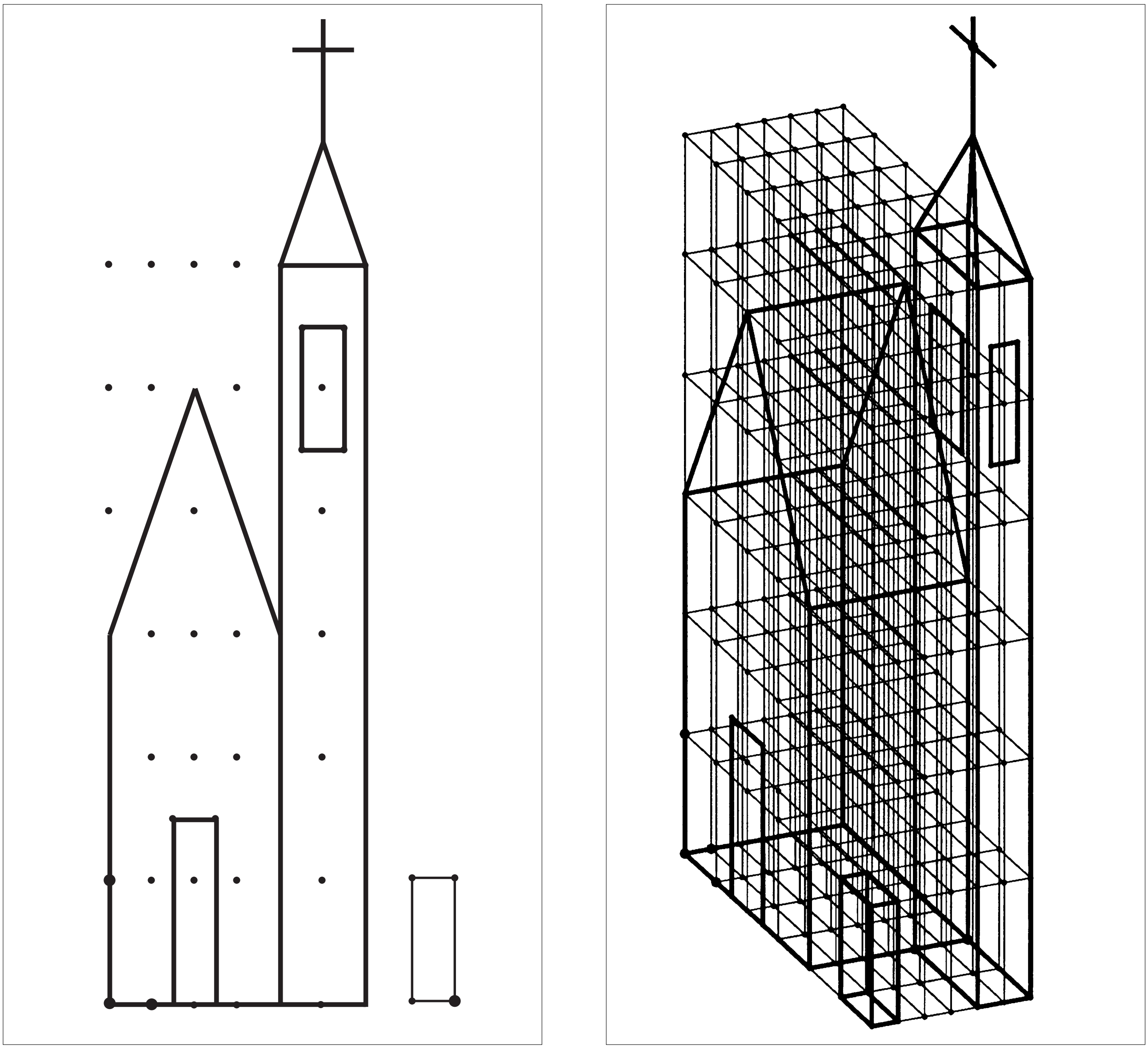


Stili e contesti didattici diversi
Dal Romanico al Gotico nel piano e nello spazio





Chiesa romanica



Chiesa gotica

Qualche ipotesi da discutere

Viene in mente qualche domanda:

- E' possibile accettare, in alcuni casi, come assiomi alcune conseguenze di assiomi più generali, favorendo l'intuizione ed evitando ciò che appare inutile o noioso ?
- E' possibile considerare le affinità[16], nel piano e nello spazio, più come strumento dimostrativo che come argomento in sé?

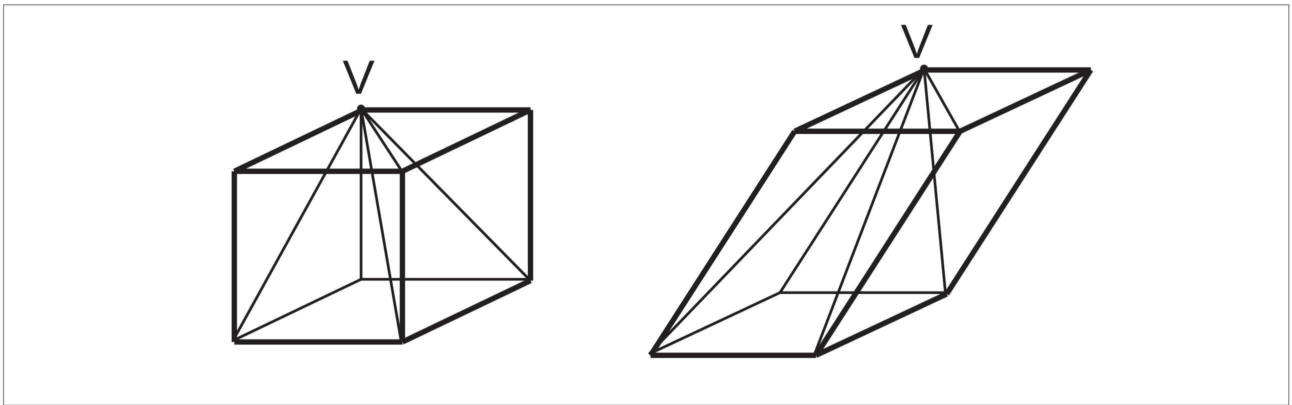
In particolare per i volumi, usando anche il Cabri

potrebbe essere utile:

- considerare centrali le affinità: usare quelle parallele[17] per dire che una barca a vela simile ad un'altra e di dimensioni doppie ha volume 8 volte più grande, perché ciò accade in ogni cubo, con dimensioni raddoppiate rispetto a quello di partenza. Generalizzare la proprietà passando dai cubi ai parallelepipedi rettangoli per affermare che in una 'chiesa gotica o romanica'[18] nello spazio (nel piano) si mantengono i rapporti dei volumi (delle aree) delle varie parti che la compongono, anche perché, numericamente, tutti questi volumi sono moltiplicati per quello del trasformato del cubo (quadrato) unitario iniziale. Proprietà che rimane 'inclinando' la figura nel caso delle affinità generiche[19]
- passare quindi alle figure 'a punta'.

Il volume della piramide

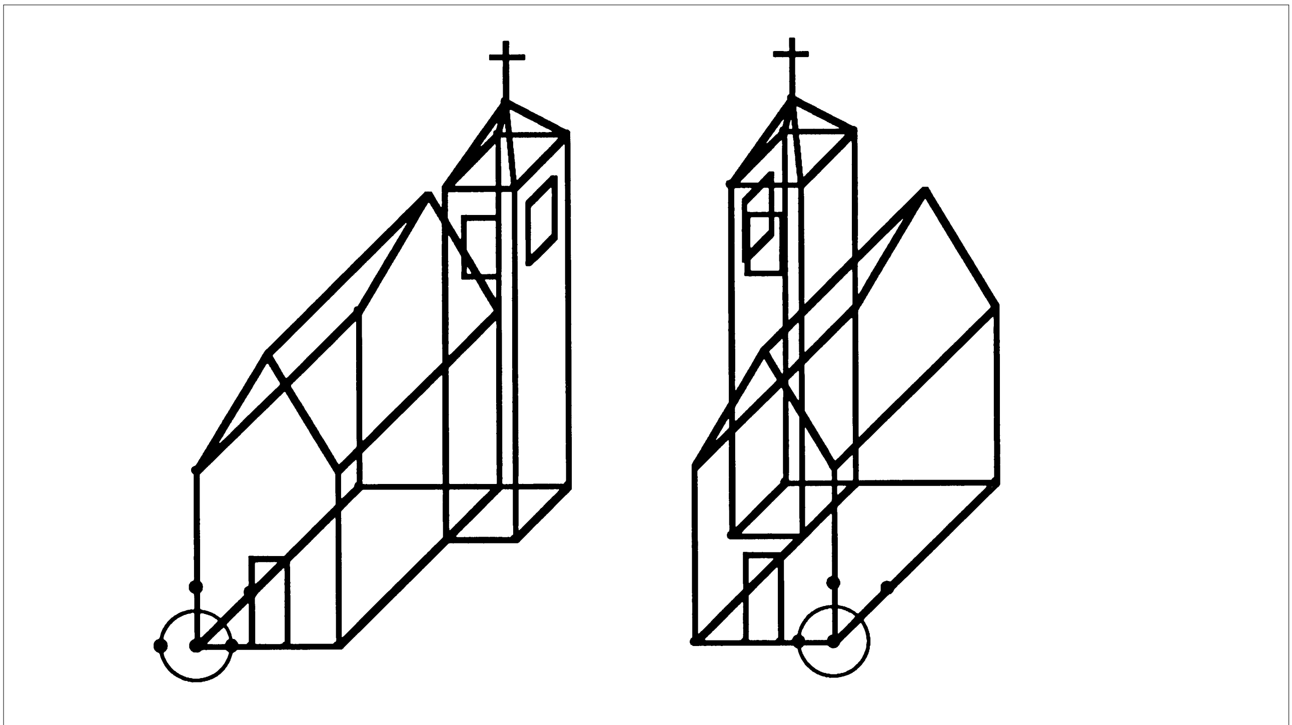
Da un vertice di un cubo proiettiamo i 3 quadrati che hanno in comune il vertice opposto: otteniamo 3 piramidi uguali. Con una affinità che 'allontani' 2 quadrati paralleli del cubo (oppure con un 'allungamento' nella direzione di uno spigolo e poi con uno 'scorrimento'[20] per passare ad un parallelepipedo) le 3 piramidi divengono differenti ma il loro volume è ancora uguale perché tutti i cubetti, aventi per spigolo l'unità di misura o suoi sottomultipli, che componevano la configurazione iniziale, si sono trasformati allo stesso modo. Così dal volume del parallelepipedo si ottiene quello della piramide a base quadrata: area di base per lunghezza dell'altezza diviso tre[21]. La formula resta allora valida per i *coni generalizzati* (quindi anche senza utilizzare il principio di Cavalieri[22]) intendendoli composti dalle piramidi che proiettano da un vertice i quadrati che componevano la base, determinandone l'area.



Alcune riflessioni

Ci sono altri aspetti da considerare nel presentare le affinità con il Cabri:

1) è possibile visualizzare anche lo spazio tridimensionale, a differenza di quanto si possa fare con le 'ombre'
2) si tratta di una trasformazione del piano (dello spazio) su se stesso, e non di una trasformazione fra piani distinti, come avviene per la proiezione di una 'ombra' da un piano ad un piano diverso
3) con il metodo visto con il Cabri, anche se prevale l'attenzione alle singole figure, si può forse capire meglio che tutte le proprietà valgono ampliando quanto si vuole la 'grata', potendo concepire l'insieme, soggetto alla trasformazione, con dimensioni grandi a piacere, senza richiedere di concepirle come un infinito in atto. E' comunque la grata che si trasforma e, con essa, le singole figure che contiene e non soltanto queste ultime
4) si favorisce effettivamente una visione dinamica della geometria, potendo seguire tutto il movimento intermedio, fra la posizione iniziale e quella finale, al contrario di quanto accade nelle trasformazioni geometriche, ove sono presenti solo queste ultime in collegamento statico[23]
5) è possibile ottenere trasformazioni affini di qualsiasi tipo, mentre, sempre ad esempio con le ombre, non si possono ottenere ingrandimenti o, in generale, modifiche di entrambi i versori che ne mantengano l'angolo (già chiamate affinità parallele). Egualmente è impossibile ottenere con le ombre la figura simmetrica di un'altra, che invece con il Cabri si ottiene facilmente, nel piano o nello spa-



zio, spostando il punto estremo di un versore nel suo simmetrico rispetto all'origine. Così le chiese precedenti sono simmetriche rispetto al piano (x;z)

6) il Cabri è un programma ottimo per disegnare geometricamente[24]. ■

NOTE AL TESTO

1) *F. Klein, Conférences sur les mathématiques, Conférence VI, A. Hermann, Librairie Scientifique, 1898, Paris.*

2) *E. Fischbein, The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children, Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1975, p. 5.*

3) *E. Fischbein, Intuition in Science and Mathematics, Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987, p. 103.*

4) *Bruno de Finetti è un famoso probabilista. Vedi anche la nota n.8.*

5) *Klein affermava l'esigenza del collegamento fra analisi e geometria con la parola "fusionismo" che in de Finetti indica anche il collegamento fra settori e linguaggi differenti delle scienze (il tempo, la massa, la probabilità, i prezzi, …).*

6) *Oltre ai notissimi libri di Emma Castelnuovo per la scuola, della casa editrice La Nuova Italia, permettetemi di citare anche E. Castelnuovo, M. Barra, Matematica nella Realtà, Boringhieri, Torino, 1976, perché contiene molte fotografie a proposito delle affinità ed anche perché è uno dei pochi libri di didattica italiani tradotti in francese. Considerando il nazionalismo francese e visto che il secondo autore sono io, lo dico con un certo orgoglio (anche se il merito della pubblicazione è, ovviamente, di Emma).*

7) *Si può vedere sull'argomento: M.A. Mariotti, Immagini e concetti in geometria, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.15, n.5-sez.A e B, 1992, 863-885; M.A. Mariotti, Il ragionamento geometrico nell'ambito dei problemi di insegnamento/apprendimento della matematica, in B. D'Amore (ed.), L'apprendimento della matematica: dalla ricerca teorica alla pratica didattica, Pitagora, 1994, 348-353; M.A. Mariotti, Images and concepts in geometrical reasoning, in "Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education", Edited by R. Sutherland, J. Mason, NATO ASI Series F, Vol.138, Springer, 1995, 97-116.*

8) *Questo modo di esporre l'argomento si trova nel libro (stupendo): B. de Finetti, Matematica logico intuitiva, Cremonese, Roma, 1959.*

9) *H. Poincaré, 'L'invention mathématique', Bulletin de l'Institut Général de Psychologie, n.3, vol.8, 1908, poi in Science et méthode, Flammarion, Paris, 1908, e in 'Mathematical Creation', in The Foundations of Science, The Science Press, New York, 1913. Anche in Oeuvres, Gauthier-Villars, Paris, 1916-1956, vol.VI, tr. it. di C. Milanesi, in Opere epistemologiche, a cura di G. Boniolo, Piovan, Abano Terme, 1989, Vol. II, 35-45.*

10) *J. Hadamard, The Psycology of Invention in The Mathematical Field, Princeton University Press, 1945, tr. it. a cura di B. Sassoli, La psicologia dell'invenzione, R. Cortina Editore, 1993, .*

11) *Si conferma (o si scopre) così sperimentalmente che una affinità nel piano è univocamente determinata quando si conoscano le immagini di tre punti non allineati.*

12) *In altri termini possiamo dire che nel piano si mantengono i rapporti delle aree e quelli su un segmento (una retta) o su segmenti (rette) paralleli.*

13) *Fra matematici, a rigore, bisogna notare che ogni triangolo può essere considerato il trasformato, in una opportuna affinità, di un triangolo equilatero. Per studenti che, con il Cabri, avessero costruito la "grata" proprio per modificare, come si vuole, due lati di un triangolo e l'angolo compreso, la precisazione potrebbe apparire inutile.*

14) *Come per le diagonali di due facce opposte in un cubo, date le rette r ed s, si costruisce per un punto di una delle due rette, sia r, la parallela r' ad s e il piano per r ed r' e, ad esempio, si ripete la costruzione partendo da s.*

15) *Vedremo qualche esempio in tal senso nel prossimo numero di questa rivista, collegandolo al problema dell'equiscomponibilità e a qualche puzzle costruibile sia con il materiale didattico, che con il Cabri.*

16) *In generale sulle trasformazioni, vedi: V. Villani, Didattica della geometria delle trasformazioni, Pubbl. dell'IRRSAE Marche, 1992; V. Villani, L'insegnamento preuniversitario della geometria: molte domande, qualche risposta in Atti del XXIII Seminario Nazionale del CRDM sul tema "Geometria: programmi, insegnamento, strumenti", Possagno (TV), agosto 1994, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.17, n.5, sez.A e B, 1994, 663-674; V. Villani, Il ruolo delle trasformazioni nell'insegnamento della geometria, Notiziario dell'UMI, suppl. al n.8-9, XVII Convegno sull'insegnamento della matematica: "L'insegnamento della geometria", Latina, ottobre 1994, 29-44; V. Villani, Le trasformazioni geometriche nella scuola secondaria superiore, in Atti del XXIV Seminario Nazionale del Centro Morin sul tema "Le trasformazioni geometriche", Paderno del Grappa, agosto 1995, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.18, n.6, sez.A e B, 1995, 669-688.*

17) *Ogni versore è parallelo al suo trasformato mentre può cambiare la sua lunghezza.*

18) *Sono l'una una trasformazione parallela dell'altra.*

19) *Una affinità, dello spazio ordinario in dimensione qualsiasi, é una corrispondenza biunivoca che trasforma 3 punti allineati (qualsiasi) in 3 punti allineati. Così le rette rimangono tali, e si conservano: 1) il parallelismo (2 punti distinti su 2 rette parallele non sarebbero in corr. biun. con l'unico punto di intersezione delle rette non più parallele); 2) i rapporti dei segmenti (e quindi, ad es., il punto medio) su una retta (o su rette parallele); 3) i rapporti delle aree nel piano (o su piani paralleli); 4) il rapporto dei volumi nello spazio e, in generale, delle misure delle estensioni di oggetti che hanno la stessa dimensione di tutto lo spazio soggetto alla trasformazione affine.*

20) *Con gli "scorrimenti" (es.: mazzo di carte da gioco inclinato in 2 modi: il volume è uguale perché le carte sono le stesse (principio di conservazione della quantità)) è possibile costruire un collegamento fra discreto e continuo e fra finito e infinito, considerando un numero "grande quanto si vuole ma finito" di sezioni parallele (contro il pensiero comune, forse* *anche Archimede si limita al finito per poter considerare il peso delle sezioni).*

***21)** La dimostrazione dà anche la "somma delle sezioni" (della piramide): x^2dx, in [0;c], che è valida in dimensione qualsiasi (dividendo il cubo in 3 piramidi in R^3 e in d piramidi uguali in R^d e proiettando da un vertice i d cubi di dimensione d-1, che hanno in comune il vertice opposto, le cui sezioni sono: $x^{d-1}dx$, che dunque hanno "somma": c^d/d = volume cubo/d), e potrebbe affiancare quella per determinare l'integrale definito di un polinomio.*

***22)** Il principio di Cavalieri (due solidi hanno lo stesso volume se si possono disporre rispetto ad un piano in modo che quelli paralleli a questo li intersechino in sezioni con la stessa area) è molto intuitivo e utile per uno dei modi per determinare il volume della sfera. E' collegato al concetto non formalizzato degli integrali. In varie forme, più o meno precise, si può considerare presente forse negli egiziani …e già in Leonardo da Vinci che lo sfrutta in una sua forma più generalizzata che traduce nel rapporto delle aree di cerchio ed ellisse, quello delle loro sezioni.*

***23)** Vedi nota n.16.*

***24)** Vedi nota n.15.*

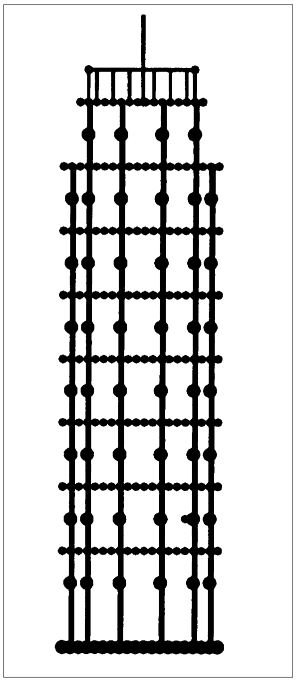
Come fare

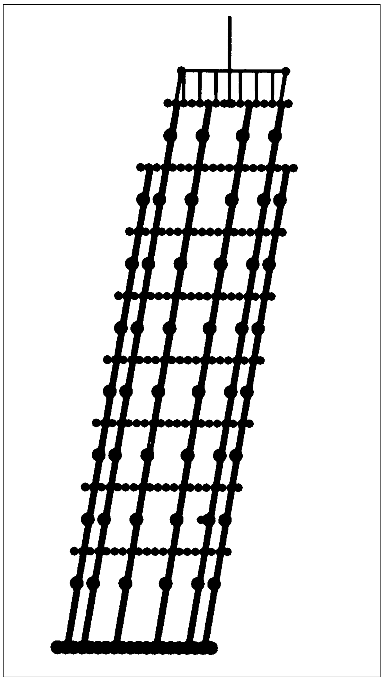
elementare

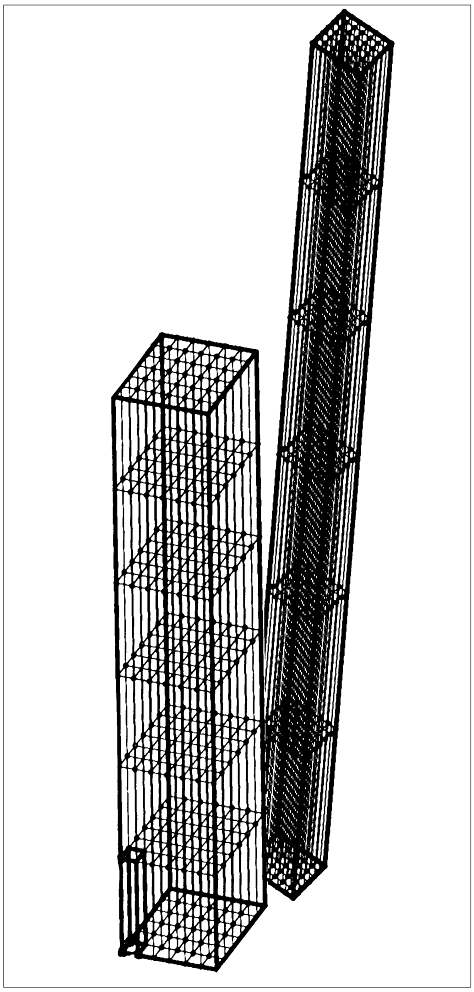
Cabri per giocare e disegnare
nella scuola elementare
e iniziare a quell'età
a capir l'affinità
con un gioco creativo
molto semplice e giulivo

Cabri[1] per la scuola elementare: una proposta

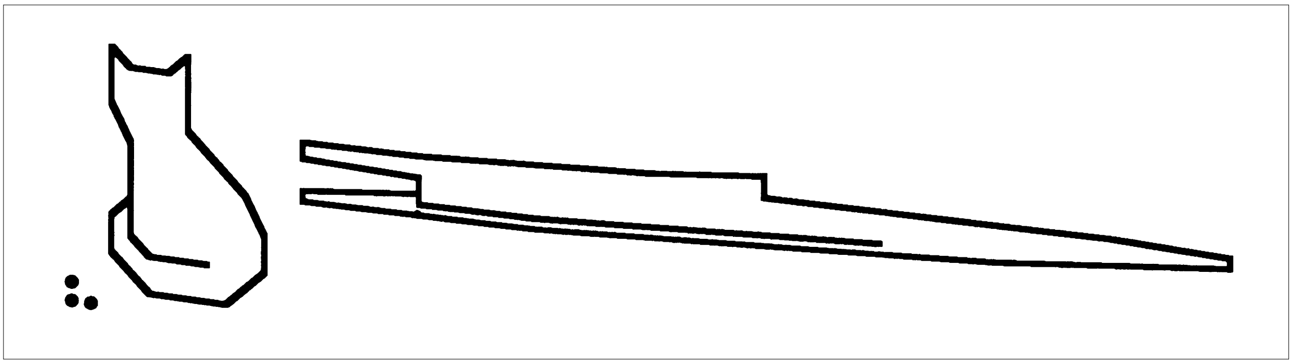
di Mario Barra
Dipartimento di Matematica
Università "La Sapienza" Roma

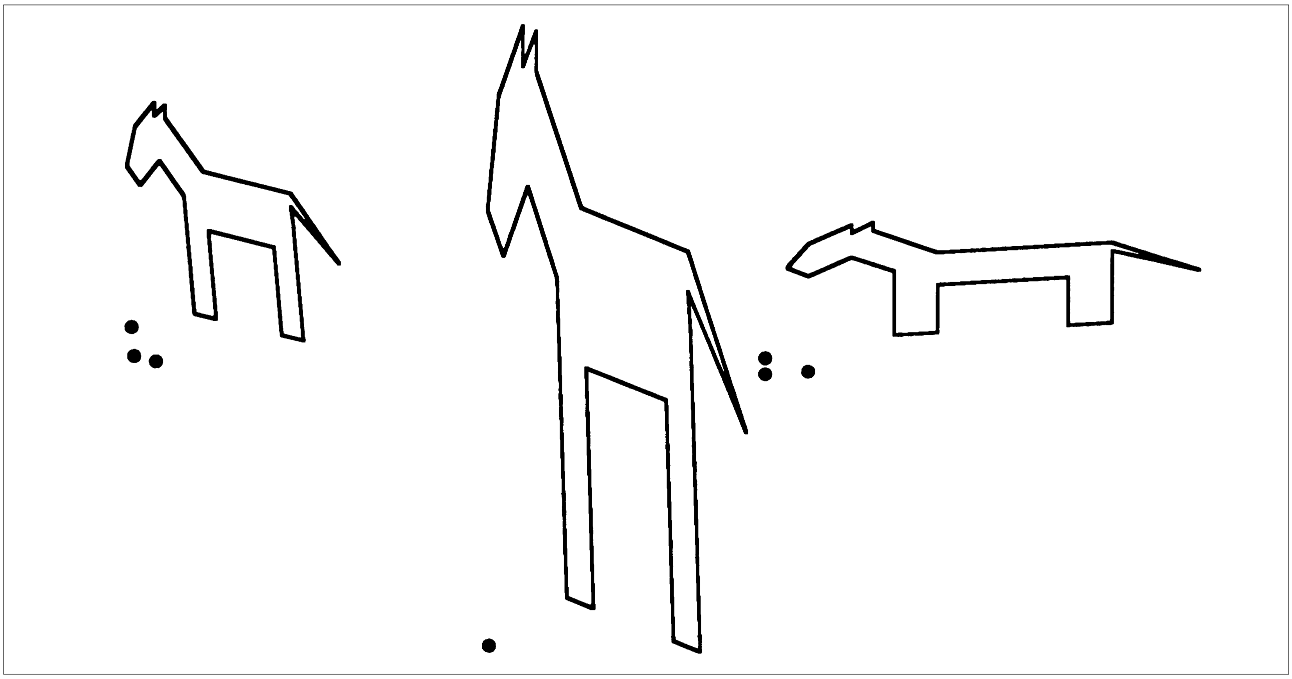


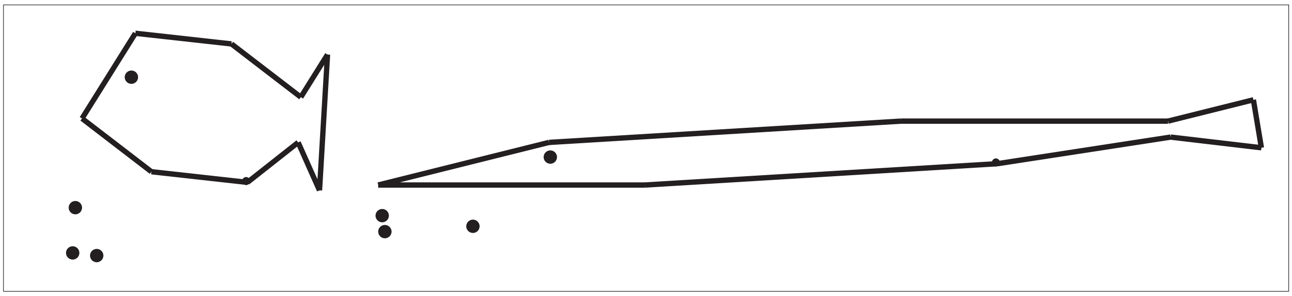


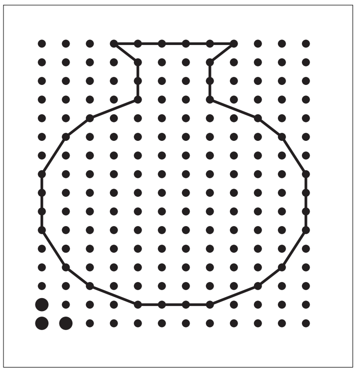


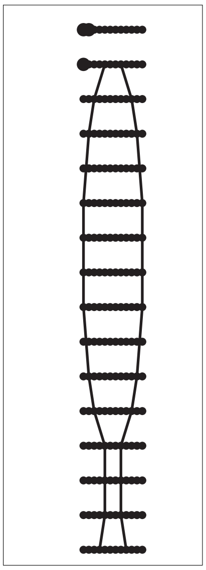
***1)** Ogni immagine che segue è una trasformazione affine di un'altra immagine posta orizzontalmente. Fanno eccezione alcuni segmenti in alto (pennone e balaustra) dei primi due disegni. In ciascun raggruppamento le immagini sono disegnate su una stessa 'grata' a punti o a quadretti, che, in alcuni casi, è stata resa invisibile. Negli ultimi tre disegni la grata è la stessa, ma sono stati evidenziati o nascosti alcuni particolari. Ciascuna delle due torri iniziali costituisce anche uno 'scorrimento' dell'altra. Punti molto vicini appaiono come un segmento.*

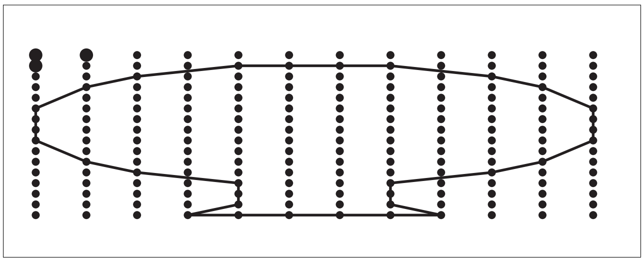


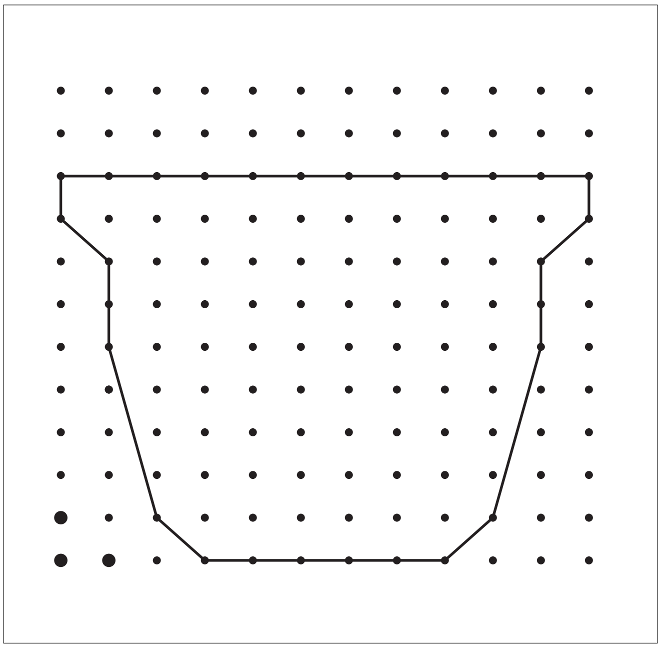


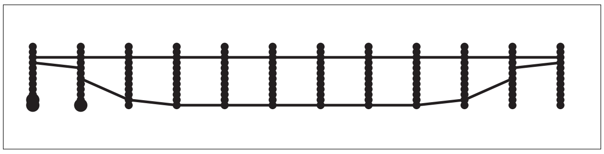


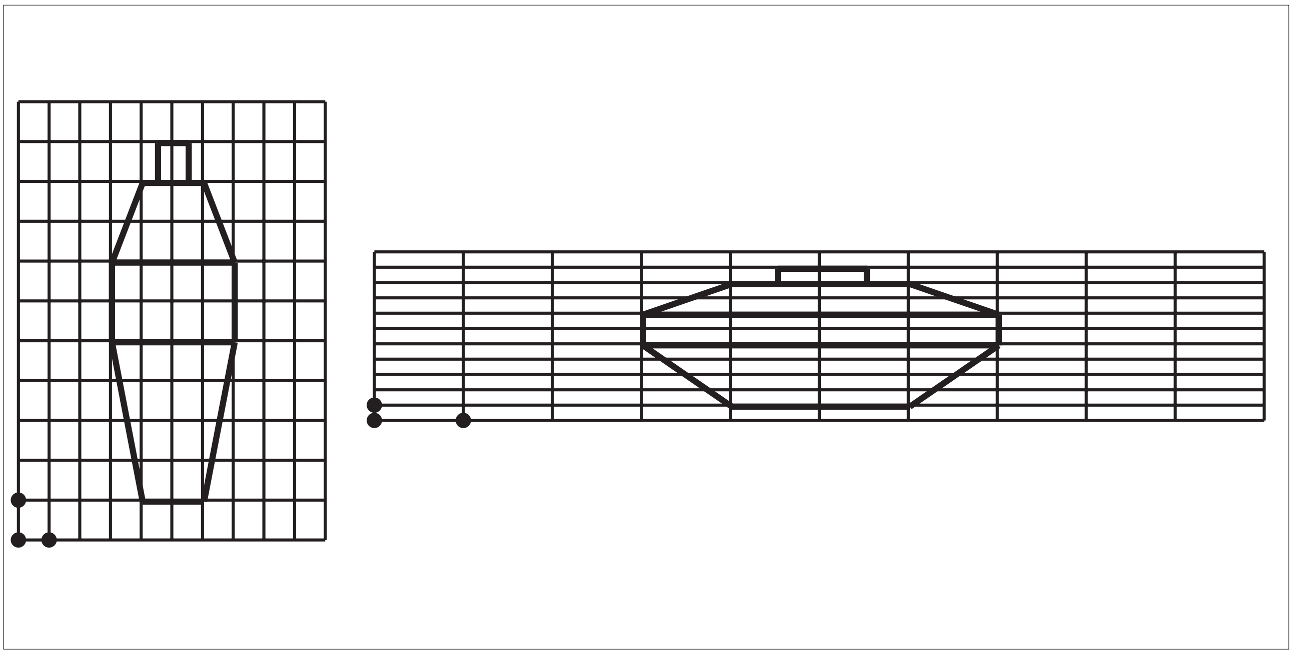


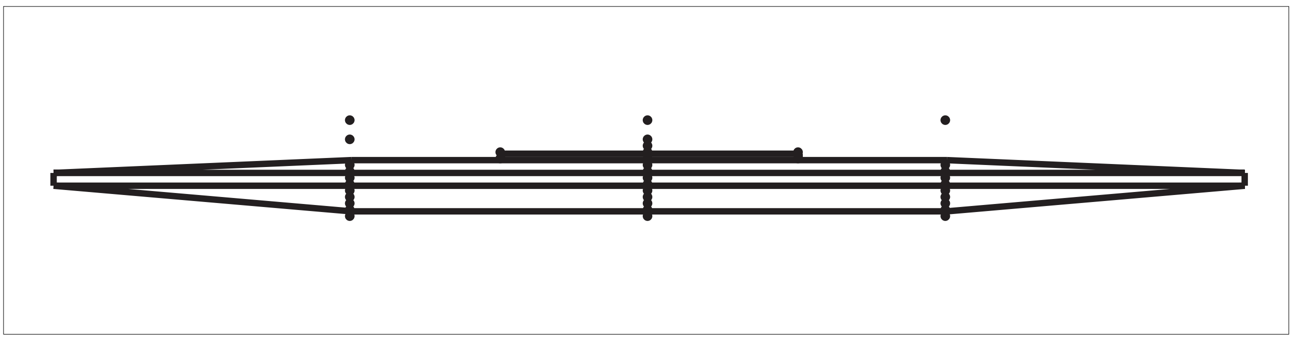












media superiore

Tutte le parabole sono simili: una proprietà notevole "svelata" con Cabri-géomètre.

di Sandra Bernecoli
Liceo Scientifico Statale "P. Paleocapa" Rovigo
di Luigi Tomasi
Liceo Scientifico Statale "Galileo Galilei" Adria-Rovigo

Se in una classe, diciamo una terza di Liceo Scientifico, chiediamo se due circonferenze sono simili tra loro, la risposta sarà immediata. Tutti sanno che due circonferenze sono tra loro simili (qualcuno, più acuto, osserverà anche che due qualunque circonferenze del piano sono omotetiche rispetto a due omotetie (omotetia diretta e omotetia inversa) aventi i centri sulla congiungente i centri *O* e *O'* e che dividono il segmento *OO'* nel rapporto *r:r')*.
E' altrettanto intuitivo vedere che, al contrario, due ellissi o due iperboli non sono, almeno in generale, simili tra loro. Intuitivamente è facile capire che esistono ellissi molto eccentriche e poco eccentriche, che pertanto non saranno simili.
Cosa succede per le parabole? (vedi figura 1)
Qui la risposta è più difficile. Si può fare un controllo in classe per constatare che la proprietà di cui si vuole parlare è poco evidente.

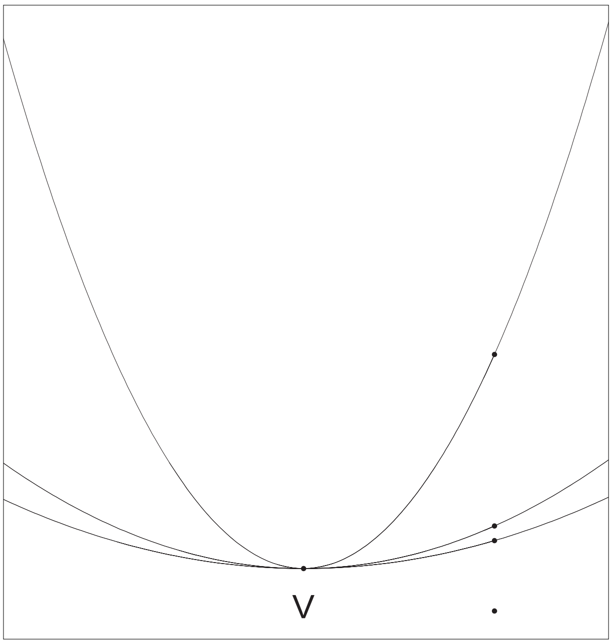


Figura 1. ***Parabole con "apertura" diversa***

Nella figura 2 si possono vedere due parabole con lo stesso vertice e i corrispondenti cerchi osculatori nel vertice (con Coxeter, lo si può definire come "the circle of closest fit").

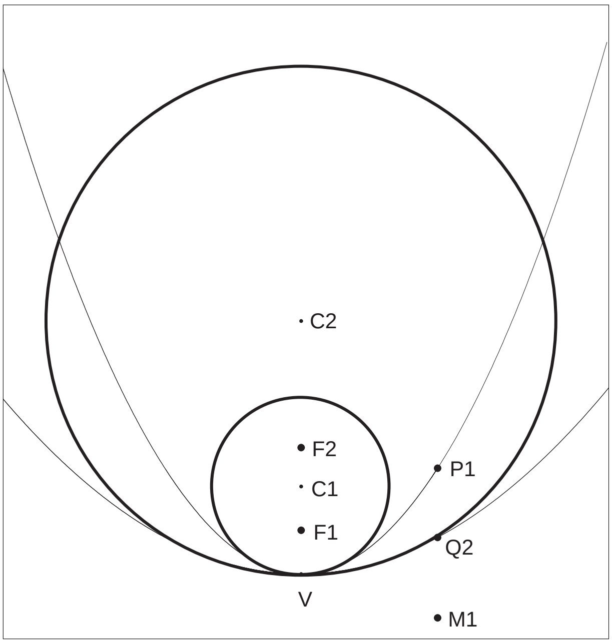


Figura 2. ***Parabole con "apertura" diversa e cerchi osculatori nel vertice***

Ci proponiamo di visualizzare, con Cabri-géomètre che, analogamente a quanto succede per due circonferenze, *due qualunque parabole sono simili tra loro.*
Questo inizialmente sembra agli allievi strano perché osservando figure quali la Figura 1 la proprietà non risulta evidente.
Dopo aver osservato che non è restrittivo considerare che le due parabole abbiano entrambe lo stesso vertice, procedendo analiticamente è facile dimostrare che tutte le parabole sono simili : si considera la parabola Γ_1 di equazione $y=ax^2$ e la parabola Γ_2 di equazione $y=bx^2$, allora l'immagine di Γ_1 nell'omotetia con centro l'origine e rapporto a/b é la parabola Γ_2.
Accanto alla dimostrazione analitica ci si può convincere di tale proprietà con una semplice costruzione fatta con Cabri-géomètre.
Dopo aver costruito (come luogo di punti) due parabole Γ_1 e Γ_2 con lo stesso vertice V e medesimo asse a, utilizziamo l'omotetia di centro V che trasforma F_1 in F_2 per vedere, con Cabri-géomètre, che l'immagine di Γ_1 è Γ_2.
Partendo da una retta a si scelgono su di essa ordinatamente tre punti V, F_1, F_2 .
Si costruiscono poi i simmetrici H_1 e H_2 di F_1 e F_2 rispetto a V e le perpendicolari d_1 e d_2 ad a in H_1 e H_2.
Scelto un punto M_1 su d_1 sia M_2 la sua proiezione su d_2.
Siano P_1 e Q_2 le intersezioni della retta $M_1 M_2$ con gli assi dei segmenti $F_1 M_1$ e $F_2 M_2$.
I luoghi descritti dai punti P_1 e Q_2 al variare di M sono le due parabole Γ_1 e Γ_2 della figura 1.
Si costruisce ora l'immagine P_2 di P_1 nell'omotetia di centro V che porta F_1 in F_2, (l'omotetia può essere defi-

nita come macro costruzione o mediante una costruzione diretta del punto P_2). Tracciando, al variare di M, i luoghi descritti da P_1, Q_2, P_2, si può osservare come la parabola descritta da P_2, immagine di P_1, si sovrapponga alla parabola descritta da Q_2 (figura 2).

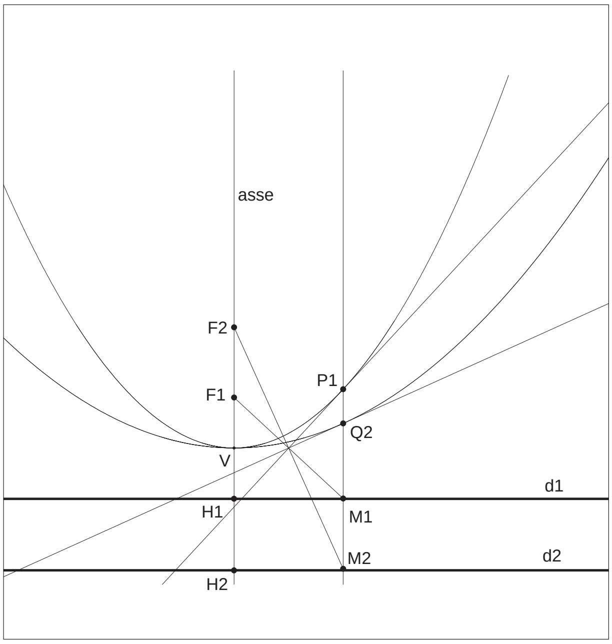


Figura 3. ***Costruzione di due parabole di fuochi F_1 e F_2***

Per rendere più evidente la similitudine si costruiscono i triangoli isosceli e tra loro omotetici, con vertice in V, *$V P_1 P'_1$ e $V P_2 P'_2$* (P'_1 simmetrico di P_1 e P'_2 simmetrico di P_2 rispetto all'asse a) risulta evidente che i due archi di parabola inscritti in tali triangoli, comunque si scelga P_1, sono archi omotetici (figura 6).

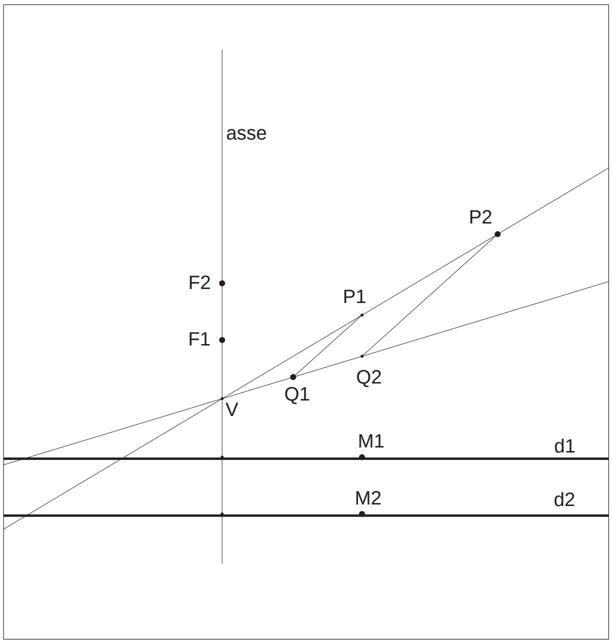


Figura 4. ***Omotetia di centro V***

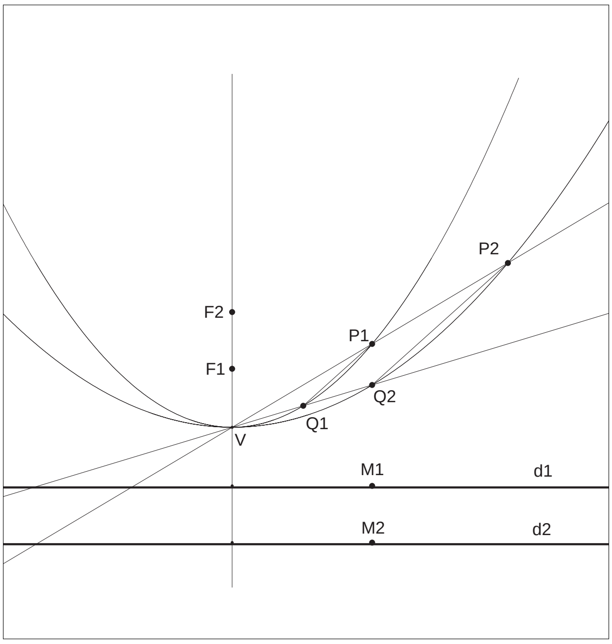


Figura 5. ***La parabola descritta dall'immagine di P_1 coincide con la parabola descritta da Q_2***

Vale la stessa osservazione se si costruiscono i triangoli isosceli con vertice sulla direttrice e avente per base la corda parallela alla direttrice e passante per i fuochi *(latus rectum)*,(figura 7).

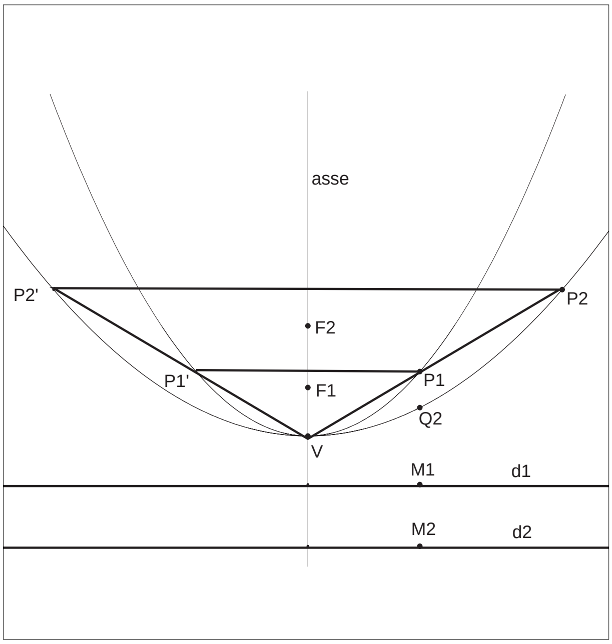


Figura 6. ***Triangoli e archi di parabola corrispondenti nell'omotetia***

Questi triangoli rettangoli (la direttrice è il luogo geometrico dei punti dai quali si vede la parabola sotto un angolo retto) visualizzano, a nostro avviso in modo particolarmente suggestivo, la similitudine tra i due archi di parabola e quindi anche tra le parabole stesse.

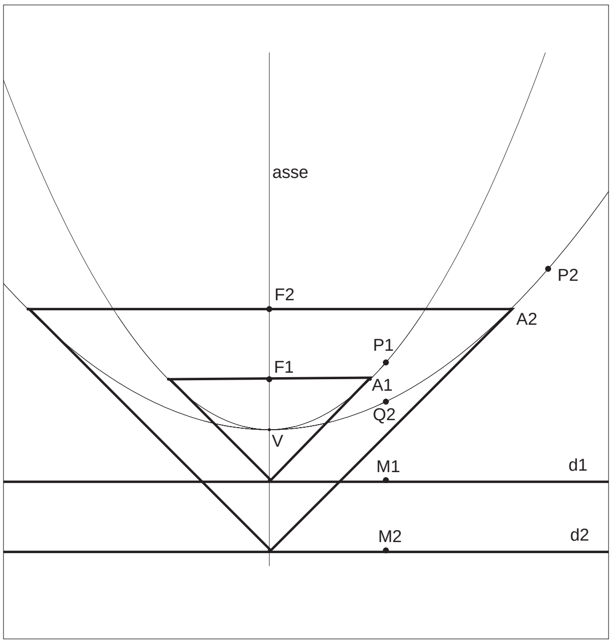


Figura 7. ***Triangoli e archi di parabola corrispondenti nell'omotetia***

Bibliografia

[1] AA. VV., *School Mathematics Project*, volume 4°, (trad. curata dall'Unione Matematica Italiana), Zanichelli, Bologna 1973;
[2] H. M. S. Coxeter, *Introduction to Geometry*, J. Whiley & Sons, New York 1962. ■

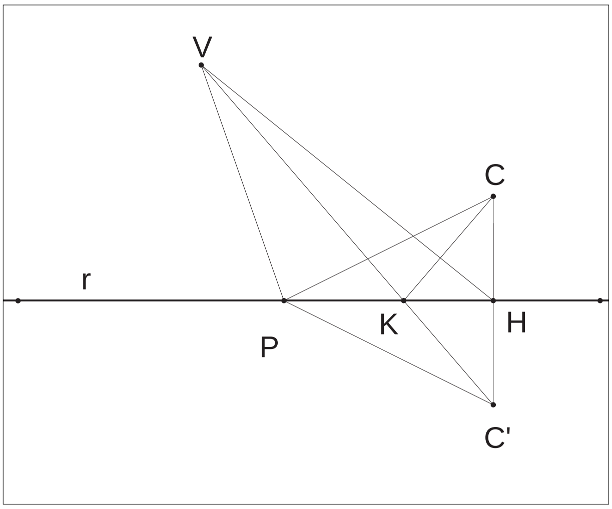
media superiore

Itinerario su introduzione ed utilizzazione della simmetria assiale nel biennio di scuola media superiore

di Alfio Grasso
Liceo Scientifico "Leonardo" Giarre (CT)

In questa proposta didattica la simmetria assiale (s.a.) viene introdotta rendendo più precisa ed efficace l'esperienza del piegamento del foglio che i giovani hanno attuato nel corso della scuola primaria. Attivata poi la voce "simmetrico di un punto" del menù costruzione si può procedere utilizzando "cabri" direttamente in modo da suggerire le prime fondamentali proprietà della s.a. e delle altre isometrie e stimolarne la acquisizione razionale. Dopo avere fatto familiarizzare i giovani con le proprietà delle isometrie fondamentali, anche facendo loro manipolare "cabri", è interessante porre problemi di minimo o massimo, inseriti opportunamente nel progetto didattico.

1)
Obiettivo:
dati due punti generici in uno dei semipiani aperti individuati da una retta, trovare il cammino minimo che li congiunge dovendo toccare la retta. (Problema di Erone).
Prerequisiti:
simmetria assiale, isometria, proprietà triangolare, proprietà di partizione.



Svolgimento

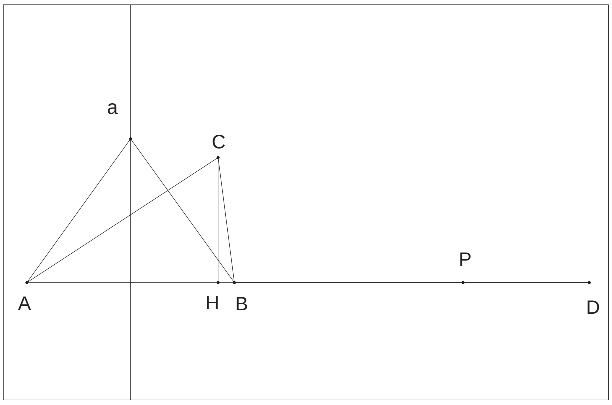
Indicati rispettivamente con *r*, *C* e *V* la retta ed i due punti (*creazione/retta per 2 punti, creazione/punto*), la prima risposta dei giovani è che il cammino più breve risulta *CH+HV*, con *H* proiezione ortogonale di *C* su *r* (*costruzione/retta perpendicolare, costruzione/intersezione di 2 oggetti*), la cui inesattezza però si evidenzia spostando opportunamente *C*. Preso allora un generico punto *P* di *r* (*costruzione/punto su un oggetto*) muoviamolo sulla retta dopo avere tracciati e misurati i segmenti *CP* e *PV* (*creazione/segmento, diversi/misura*): al variare di *P* cambiano le misure di *CP* e *PV* ed anche la loro somma che sembra risultare minima per una posizione di *P* "intermedia" fra *H* e la proiezione di *V* su *r*. Cerchiamo di determinarla.

Sappiamo che il percorso più breve tra due punti è quello del segmento che li congiunge, quindi vediamo di ricondurci a questa situazione: creiamo il segmento *CV*; muovendo *C*, se esso si porta nell'altro semipiano aperto, risulta, per la proprietà triangolare, $CV<CP+PV$, per ogni posizione di *P* su *r* diversa da quella in cui *CV* incontra *r*. Ciò suggerisce di utilizzare la simmetria assiale per ottenere il nostro obiettivo. Consideriamo infatti il simmetrico *C'* di *C* (o *V'* di *V*)

rispetto ad *r* (*costruzione/simmetrico di un punto*). Il segmento *CC'* incontra *r* in *H* ed il segmento *C'V* interseca *r* in *K* (proprietà di partizione, *costruzione/intersezione di 2 oggetti*); si ha: *C'H=CH*, *C'K=CK* e *C'P=CP* perché simmetrici. Risulta dunque *C'V=C'K+KV=CK+KV*, e per una posizione generica di *P*, dalla proprietà triangolare, otteniamo:
C'V< C'P+PV, ovvero *C'V<CP+PV*,
cioè *CK+KV< CP+PV*.

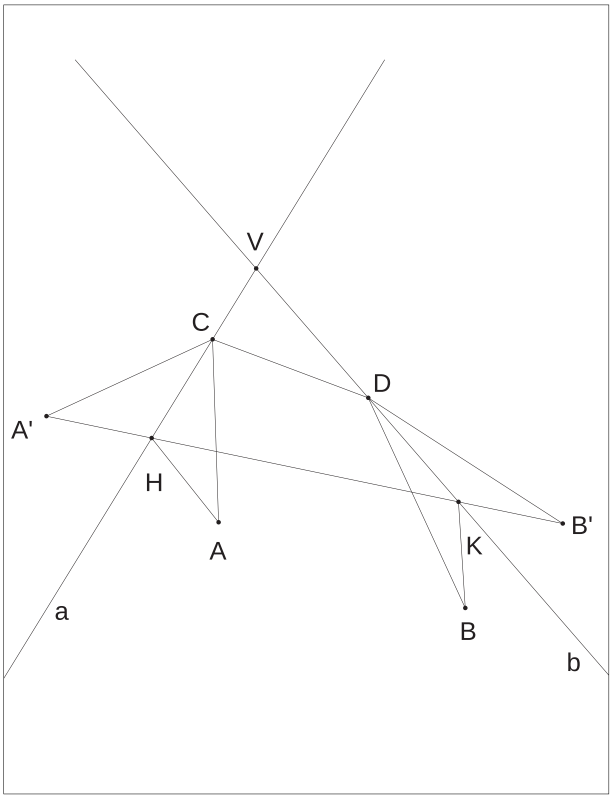
Osservazione
Finito lo svolgimento si può fare osservare ai giovani che la luce, quando si riflette, segue lo stesso percorso minimo e ciò può costituire ulteriore spunto per mettere in rilievo l'importanza della s.a. anche nelle scienze applicate, nella natura e nell'arte.

2)
Obiettivo:
trovare il triangolo di area massima fra quelli che hanno un lato ed il perimetro p assegnati.
Prerequisiti:
simmetria assiale, proprietà triangolare, altezza, perimetro ed area di un triangolo.



Svolgimento
Siano AD un segmento (*creazione/segmento*) di lunghezza *p* e *B* su *AD* (*costruzione/punto su un oggetto*) tale che *AB<BD* (basta prendere *B* sul segmento *AM*, con *M* punto medio di *AD* (*costruzione/punto medio*)); scegliamo *AB* come lato assegnato. Per vedere quali posizioni può assumere il terzo vertice *C* di uno dei nostri triangoli *ABC*, dobbiamo trovare i punti tali che la somma delle loro distanze da *A* e *B* sia uguale a *BD*; perciò consideriamo un punto *P* sul segmento *BD* (*costruzione/punto su un oggetto*) e determiniamo le circonferenze c_1 e c_2 di centri *A* e *B* e raggi rispettivamente uguali a *BP* e *PD*, cosicché le loro intersezioni hanno dai punti *A* e *B* distanze la cui somma è uguale a *BD*. Procediamo come segue. Costruiamo il punto medio M_1 di *PA* (*costruzione/punto medio*) e quindi il simmetrico *B'* di *B* rispetto ad M_1 (*costruzione/simmetrico di un punto*): *AB'=BP* perché simmetrici rispetto ad M_1; analogamente, detti M_2 il punto medio di *PB* e *D'* il simmetrico di *D* rispetto ad M_2, *BD'=PD* in quanto simmetrici. Le circonferenze di centri *A* e *B* e raggi ordinatamente *AB'* e *BD'* (*creazione/circonf.* (*centro/punto*)) sono c_1 e c_2. Indicata allora con *C* una delle loro intersezioni (*costruzione/intersezione di 2 oggetti*) al variare del punto *P* su *BD*, i triangoli *ABC* ottenuti soddisfano le condizioni richieste. Cerchiamo quello di altezza, cioè di area, massima. Tracciamo l'altezza *CH* (*costruzione/retta perpendicolare, costruzione/intersezione di 2 oggetti*), e creiamo il segmento *CH*. Muoviamo ora *P* su *BD*; l'osservazione delle diverse posizioni di *C* suggerisce che l'altezza, sia leggendone la misura (*diversi/misura*) che per la simmetria della situazione rispetto all'asse a del segmento *AB*, è massima se *CA=CB*.
Osservazione: la costruzione consente di costruire un'ellisse noti asse maggiore (*BD*) e distanza focale (*AB*).

3)
Obiettivo:
percorso minimo tra due punti interni ad un angolo acuto dovendo toccare i lati dell'angolo.
Prerequisiti:
angolo, simmetria assiale, spezzata (proprietà triangolare).



Svolgimento
Dato un angolo $a\hat{}b$ acuto di vertice *V* (*creazione/retta per 2 punti, costruzione/intersezione di 2 oggetti*) denotiamo con *A* e *B* due suoi punti interni. Detti *C* e *D* due punti generici rispettivamente su *a* e *b* (*costruzione/punto su un oggetto*), uniamo *C* con *A*, *D*

con *B* e *C* con *D* (*creazione/segmento*); al variare di *C* e *D* cambia la lunghezza *l* della spezzata *ACDB*: ci sono due posizioni di *C* e *D* per cui *l* è minima? La simmetria assiale ci può aiutare come nel problema di Erone. Indichiamo con *A'* e *B'* nell'ordine i simmetrici di *A* e *B* rispetto ad *a* e *b* (*costruzione/simmetrico di un punto*), uniamo *A'* e *B'*, chiamiamo rispettivamente *H* e *K* i punti d'intersezione del segmento *A'B'* con *a* e *b* (*costruzione/intersezione di 2 oggetti*): *H* e *K* sono i punti cercati. Invero congiungiamo *D* con *B'* e *C* con *A'*, *H* con *A* e *K* con *B*; variando *C* e *D*, *A'B'<A'C+CD+DB'* poiché *A'CDB'* è una spezzata di estremi *A'* e *B'*, ed essendo *CA'=CA, DB'=DB* , *A'H=AH* e *B'K= BK*, perchè simmetrici, segue: *A'B'=AH+HK+KB< AC+CD+DB.*

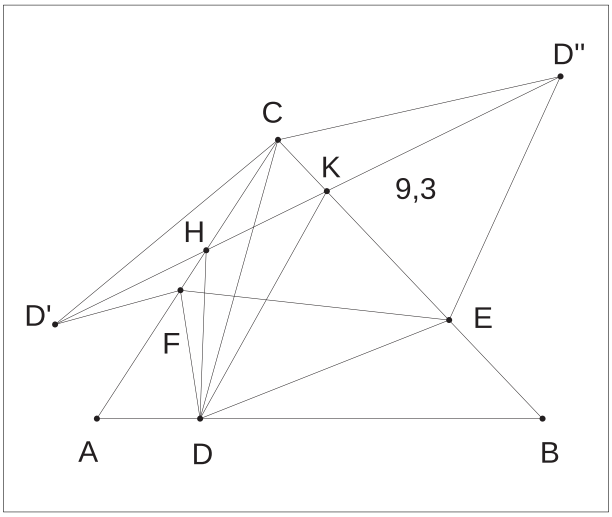
4)

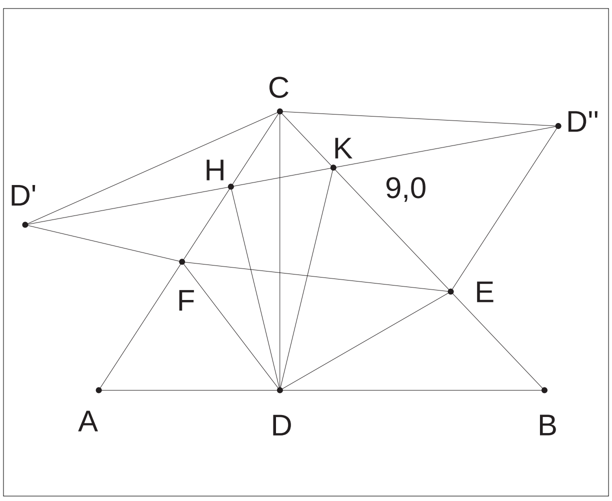
Obiettivo:

determinare il triangolo di perimetro minimo fra quelli inscritti in un triangolo acutangolo.

Prerequisiti:

simmetria assiale, spezzata (proprietà triangolare), altezza e perimetro di un triangolo.





Svolgimento

Siano *ABC* un triangolo acutangolo (*creazione/segmento*) e *D*, *E*, ed *F* tre punti generici rispettivamente su *AB*, *BC e CA* (*costruzione/punto su un oggetto*). Al variare dei punti *D*, *E* ed *F* cambia il perimetro del triangolo *DEF* la cui lunghezza *p* si può ottenere addizionando le misure dei lati *(diversi/misura)*. Per avere qualche indizio, fissiamo uno dei tre punti, *D* ad esempio, e muoviamo *E* ed *F*; poiché il punto *D* è interno all'angolo $\widehat{ACB}$ ci può soccorrere l'argomentazione utilizzata nel numero 3) se in esso *B* ed *A* coincidono (il nostro punto *D*). Chiamiamo allora *D'* e *D''*, nell'ordine, i simmetrici di *D* rispetto alle rette *AC* e *BC* (*costruzione/simmetrico di un punto*) ed indichiamo con *H* e K i punti in cui il segmento *D'D''* incontra rispettivamente i segmenti *AC* e *BC* (*costruzione/intersezione di due oggetti*): *FD'=FD, HD'=HD, ED''=ED, KD''=KD, CD''= CD, CD'=CD* perché simmetrici e *CD'=CD''* essendo uguali a *CD*. Il perimetro p_1 di *DHK* è *DH+HK+KD=D'H+HK+KD''=D'D''* e quello di *DEF* è *DF+FE+ED=D'F+FE+ED''*, quindi p_1= *D'D''< D'F +FE+ED"* essendo questa una spezzata di estremi *D'D''*: assegnato dunque *D*, il triangolo *DEF* di perimetro minimo al variare di *E* ed *F* è quello per cui *E* ed *F* coincidono rispettivamente con *K* e *H*. Inoltre nel triangolo *D'CD''*, isoscele dato che *CD'=CD''*, $D'\widehat{C}A=A\widehat{C}D$ e $D\widehat{B}C=B\widehat{C}D'$ perché simmetrici e dunque l'ampiezza di $D'\widehat{C}D''$ é costante essendo doppia di quella di $A\widehat{C}B$; il segmento *D'D''*, proiezione sulla retta *D'D''* di *D'C+CD''* é minimo - al variare di *D* su *AB* - se tale é *CD'* (*CD''*) cioé se *CD* é minimo ovvero se *D* é il piede dell'altezza condotta da *C*, piede che é interno al segmento *AB* essendo il triangolo acutangolo. Analoghi ragionamenti partendo da *E* o *F*: quindi il triangolo di perimetro minimo fra quelli inscritti in *ABC* ha per vertici i piedi delle altezze.

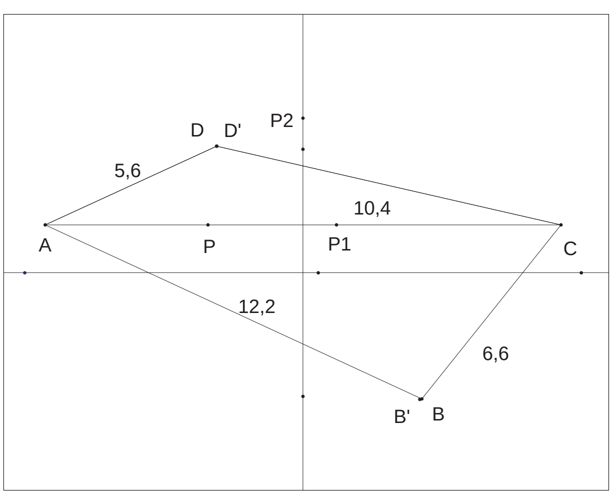
5)

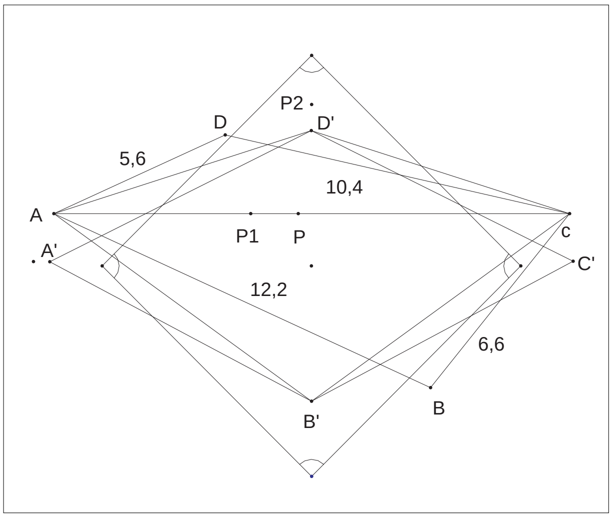
Obiettivo:

determinare fra tutti i quadrilateri di perimetro assegnato quello di area massima.

Prerequisiti:

simmetria assiale, rombo, triangoli inscritti in una semi-





circonferenza, quadrato.

Svolgimento

Abbiamo risolto un problema analogo al numero 2), utilizziamolo. Fissiamo una diagonale, *AC* ad esempio, di un quadrilatero *ABCD* di perimetro *p*. L'immagine iniziale presenta due quadrilateri sovrapposti *ABCD* e *AB'CD'* e qualche altra figura che rende più spedita la costruzione. Costruiamo, come nel problema del numero 2), le ellissi che hanno per distanza focale *AC* e come assi maggiori ordinatamente il segmento *AD+DC* ed il segmento *AB+BC*. Il quadrilatero isoperimetrico con *ABCD*, con la diagonale *AC* assegnata, e di area massima è quello di vertici *AB'CD'* con *B'* e *D'* sull'asse di *AC* e quindi con *AD'=CD'* e *AB'=B'C*: esso si ottiene facendo variare il punto *P* su *AC* in modo che *D'* si porta sull'asse di *AC* e muovendo P_1 su questo in modo che anche *B'* stia sull'asse di *AC*. Eseguiamo ora analoghe costruzioni fissando la diagonale *B'D'* che consideriamo distanza focale e prediamo come asse maggiore dell'ellisse il segmento *B'C+CD'*. Il quadrilatero che ha lo stesso perimetro di *AB'CD'* -cioè di *ABCD*- e di area massima è *A'B'C'D'*, con *A'* e *C'* appartenenti all'asse del segmento *B'D'*; quindi *A'B'=B'C'=C'D'=D'A'*: da ciò *A'B'C'D'* è un rombo che si ottiene rendendo visibili *A'* e *C'* sovrapposti nell'ordine ad *A* e *C*, facendo variare P_2 sulla retta *B'D'* fin quando i punti *A'* e *C'*, si portano sull'asse del segmento *B'D'*: il rombo si può richiamare da "aspetto di un oggetto" in blu. Ma fra tutti i rombi isoperimetrici il quadrato è quello di area massima in quanto fra i triangoli rettangoli con la stessa ipotenusa -lato del rombo- possiede area massima quello con un asse di simmetria (basta considerare i triangoli inscritti in una semicirconferenza che ha per diametro il lato del rombo, l'area è massima se l'altezza è il raggio, cioè se il triangolo è anche isoscele). Il quadrato si può ottenere come segue. Spostiamo il punto in rosso che chiamiamo *C''*, sovrapposto a *C'*, costruiamo con raggio uguale al lato del rombo -*C'B'* ad esempio- la circonferenza con centro *C''* ed indichiamo con *D''* e *B''* le sue intersezioni, in rosso, con la retta *D'B'*. Costruiamo poi sempre in rosso il simmetrico di *C''*, *A''*, rispetto a *D'B'*, il segmento *C''B''* ed il suo asse; muoviamo ora il punto *C''* fin quando l'asse passa per il centro di simmetria del rombo: è questa la posizione di *C''* per cui *A''B''C''D''* è un quadrato, essendo un rombo con un asse di simmetria passante per il punto medio di un lato. ■

media superiore

Maturità Scientifica PNI 1996: una possibile applicazione di Cabri per la risoluzione di un esercizio

di Mauro Bovio
ITCG "Leardi" - Casale Monferrato (AL).

Viene proposto il testo dell'es.1 del tema di maturità scientifica sperimentale, un cenno alla sua risoluzione analitica e la risoluzione di alcuni punti con CABRI.

Testo del 1° esercizio del tema d'esame di maturità scientifica sperimentale (PNI)

In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* sono assegnati i punti *A(2,0)* e *B(0,4)*. Sia *P(x,y)* un punto di detto piano con *x>0* ed *y>0*, e *C, D, E, F* i punti medi dei lati *OA, AP, PB, BO* del quadrilatero *OAPB*.

Il candidato:

a) dica quali posizioni deve occupare *P* affinché il quadrilatero degeneri in un triangolo;

b) dimostri che il quadrilatero *CDEF* é un parallelogrammo;

c) dica quali posizioni deve occupare *P* affinché il parallelogrammo *CDEF* sia un rettangolo;

d) dica quali posizioni deve occupare *P* affinché il parallelogrammo *CDEF* sia un rombo;

e) dica dove si trova il punto *P* quando il parallelogrammo *CDEF* é un quadrato e ne determini le coordinate;

f) dimostri che l'area del parallelogrammo *CDEF* é metà dell'area del quadrilatero *OAPB*;

g) esprima in funzione dell'ascissa *P* il rapporto *z* tra l'area del quadrato di lato *EF* e l'area del parallelogrammo *CDEF*, quando *P*, oltre a rispettare le condizioni inizialmente assegnate, appartiene alla retta di equazione y=4-x;

h) studi la funzione *z(x)* e ne disegni il grafico in un piano riferito a un sistema di assi cartesiano ortogonali *O'xz*.

Cenno alla risoluzione analitica

OAPB è un triangolo se *P* é un punto del segmento *AB*, estremi esclusi siccome $x>0$ e $y>0$. Inoltre essendo *ED* e *FC* uguali e paralleli (teorema dei punti medi), il quadrilatero *CDEF* é un parallelogrammo.

Risolvendo il problema analiticamente si trova (in risposta al punto *c*) che il luogo richiesto é la retta y=x/2 con $x>0$: basta imporre la perpendicolarità fra le diagonali *OP* e *BA* del quadrilatero. Si trova poi (in risposta al punto *d*)) che il luogo richiesto è il quarto di circonferenza $x^2+y^2=20$ con x>0, y>0 : basta imporre la congruenza fra le diagonali *OP* e *BA* del quadrilatero. Se poi *P* è il punto di intersezione dei due luoghi (punto *e*) il parallelogrammo è un quadrato e si trova *P(4,2)*.

Si trova poi che la funzione *z(x)* dei punti *g)* e *h)* é:

$x^2-4x+8/x+4$.

Ora vediamo come si può con Cabri sia risolvere parzialmente il problema, sia verificare l'esattezza dei risultati trovati.

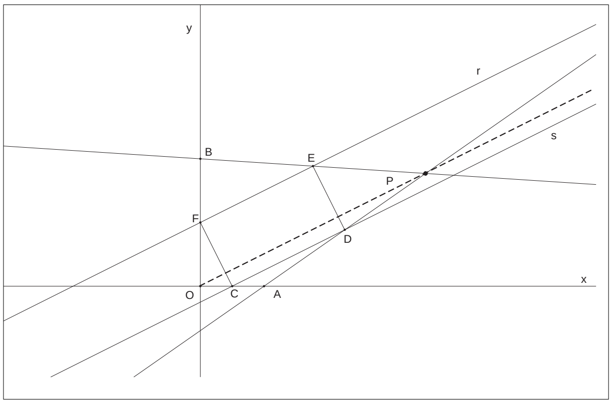
Risoluzione del problema e determinazione dei luoghi geometrici con Cabri

Per quanto riguarda le parti *c), d), e)* costruiamo prima un rettangolo e poi un rombo, entrambi di base *FC* e poi studiamo il luogo descritto dal punto *P*. Da notare che costruendo prima il rettangolo o il rombo, detto *P* il punto di intersezione tra le rette *BE* e *AD*, i punti *E* e *D* sono punti medi di *BP* e *AP* (*OCF* e *OAB* sono simili quindi *FC=1/2AB*; anche *ABP* e *EDP* sono simili ed essendo *ED=1/2AB* si ha la tesi) e quindi soddisfano le ipotesi del problema.

[Costruzione di base della figura]

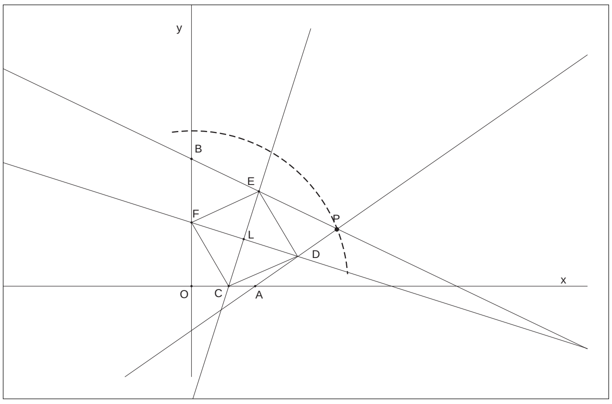
CR / retta *x*
CO / punto *O* sulla retta *x*
CO / retta perpendicolare a *x* passante per *O(y)*
CO / punto *A* sulla retta *x*
CR / Circonferenza (centro *O*/punto *A*)
CO / Intersezione tra circonferenza e retta *y (F)*
CO / punto medio *C* di *OA*
CR / Circonferenza (centro *F*/punto *O*)
CO / Intersezione tra circonferenza e retta *y (B)*
CR / segmento *FC*

[Punto c: Costruzione del rettangolo FCDE e determinazione del luogo]



CO / retta *r* perpendicolare a *FC* per *F*
CO / retta *s* perpendicolare a *FC* per *C*
CO / punto su un oggetto (punto *E* su retta *r*)
CO / retta perpendicolare a *r* per *E*
CO / intersezione retta creata con *s (D)*
CR / segmento *ED*
CR / retta per i 2 punti *B, E*
CR / retta per i 2 punti *A, D*
CO / intersezione delle rette precedenti *(P)*
CO / luogo di punti (segnare *P* e fare variare *E*: si trova una semiretta parallela ai lati *FE* e quindi ortogonale a *FC* e passante per l'origine cioè *y=x/2, x>0*)

[Punto d: Costruzione del rombo FCDE e determinazione del luogo]



Il rombo viene costruito sul lato *FC* sfruttando la perpendicolarità delle sue diagonali.

Ripetere [Costruzione di base della figura]
CO / punto medio di *FC*
CR / circonferenza (centro punto medio/ punto *F*)
CO / punto *L* sulla circonferenza
CO / simmetrico del punto *C* rispetto a *L (E)*
CO / simmetrico del punto *F* rispetto a *L (D)*
CR / segmento *FE*
CR / segmento *ED*
CR / segmento *CD*
CR / retta per i 2 punti *B, E*
CR / retta per i 2 punti *A, D*
CO / intersezione delle rette precedenti *(P)*
CO / luogo di punti (segnare *P* e fare variare *L*: si trova il quarto di circonferenza)

Verifica dei risultati trovati con Cabri

E' possibile verificare sperimentalmente con Cabri i risultati trovati disegnando prima la figura secondo le indicazioni del testo e successivamente i luoghi trovati analiticamente. Vincolando *P* a uno o all'altro luogo si può vedere come varia il parallelogrammo *FCDE*.

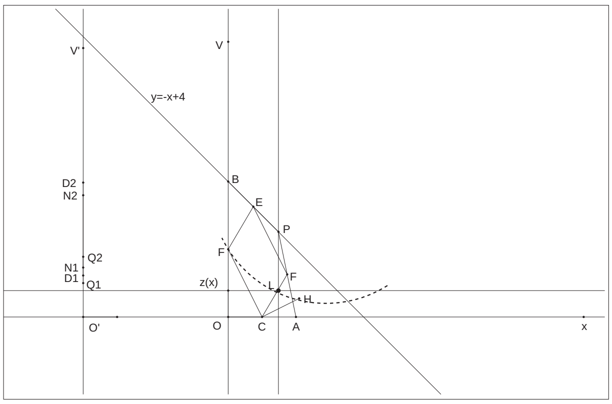
[Costruzione figura]

Ripetere [Costruzione di base della figura]
CR / punto *P*
CR / segmenti *BP* e *AP*
CO / punto medio *E* di *PB*
CO / punto medio *D* di *AP*

CR / segmenti *FE*, *ED*, *DC*.
Incidentalmente notiamo che colorando il quadrilatero *OAPB* e vincolando *P* alla retta *AB*, ci si può convincere della risposta data al punto *a*).
[Costruzione luoghi]
CO / retta *c* perpendicolare a *FC* per *O* (é la retta *y=x/2*)
CO / retta parallela a *y* per *A*
CO / retta parallrla a *x* per *B*
CO / punto di intersezione *Q* tra le due rette (é stato così costruito un segmento *OQ* di lunghezza $\sqrt{20}$)
CO / circonferenza d (centro *O*/punto *Q*; ha equazione $x^2+y^2=20$)
DI / Vincola punto *P* a retta *c* (facendo variare *P* si osserva che *FCDE* è un rettangolo: ci si può rendere conto meglio di ciò misurando per esempio le diagonali con "DI/misura", oppure misurandone gli angoli). Ora vincoliamo *P* all'altro luogo trovato:
DI / Sopprimi delle relazioni (punto *P* da retta *c*)
DI / Vincola punto *P* a circonferenza *d* (Facendo di nuovo variare *P* si osserva che *FCDE* è un rombo: si può per esempio verificare con il comando "DI/segna un angolo", che le sue diagonali sono perpendicolari).

Il grafico della funzione *z(x)*

Senza entrare troppo nei dettagli della costruzione vediamo come può essere disegnato il grafico di *z(x)* quando *P*, oltre a essere un punto del 1° quadrante, appartiene alla retta *y=4-x*.
La costruzione della retta *y=4-x* avviene costruendo prima la bisettrice del 2° quadrante e poi costruendo la parallela ad essa passante per *B*; si vincola quindi *P* a tale retta.
L'idea é quella di riportare sull'asse *y* a partire da *O* un segmento *OZ(x)* di lunghezza *z(x)* e di costruire il punto *L(x,z(x))* mandando la parallela all'asse *x* passante per *Z(x)* e la perpendicolare all'asse *x* per *P*: facendo variare *P* il punto *L* descrive il grafico della funzione nel 1° quadrante.
Per costruire il segmento di lunghezza $EF^2/(FC\cdot CH)$, dove *CH* é una altezza del parallelogrammo *FCDE*, costruiremo due macro:
M1) Prodotto di due segmenti (per costruire EF^2 e $FC\cdot CH$)
M2) Quoziente di due segmenti (per costruire $EF^2/FC\cdot CH$)), utilizzando la macro già predefinita del trasporto di un segmento (TRAS_SEG.MAC).



La macro *M1* si costruisce riportando sull'asse *x* consecutivamente l'unità di misura *OU* e un segmento *UX* di lunghezza *x*, mentre sull'asse *y* a partire da *O* il segmento *OY* di lunghezza *y*. La parallela a *UY* condotta da *X* individua sull'asse *y* il segmento prodotto di origine *Y*.
La macro *M2* si costruisce riportando sull'asse *x* consecutivamente un segmento *OY* di lunghezza *y* e un segmento *YX* di lunghezza *x*, mentre sull'asse *y* a partire da *O* il segmento unità *OU'*. La parallela a *U'Y* condotta da *X* individua sull'asse *y* il segmento quoziente *(x/y)* di origine *U'*.
Per maggior chiarezza viene costruita una retta *y'* perpendicolare all'asse *x* e passante per un suo punto qualsiasi *O'* sulla quale troveremo gli oggetti finali delle nostre macro.
Le macro sono costruite con i seguenti oggetti iniziali: una retta (per es. l'asse *x*), un segmento su questa retta (l'unità di misura *OU*), un punto *x* per indicare il verso, una retta passante per *O'* (asse *y'*) e un punto su di esso che indica il verso. L'oggetto finale é il segmento prodotto o quoziente e sono riportati sull'asse *y'* (una costruzione più dettagliata delle macro si può trovare per esempio in *[B]*).
In figura si hanno i segmenti $N_1N_2=EF^2$, $D_1D_2=FC\cdot CH$ e $Q_1Q_2=N_1N_2/D_1D_2$·Q1Q2ha lunghezza *z(x)* e viene riportato sull'asse *y* a partire da *O* (segmento *OZ(x)*).

Testi citati

[B] Boieri P. (a cura di) - Fare geometria con Cabri - C.R.D. U. Morin Paderno del Grappa (TV) ■

media superiore

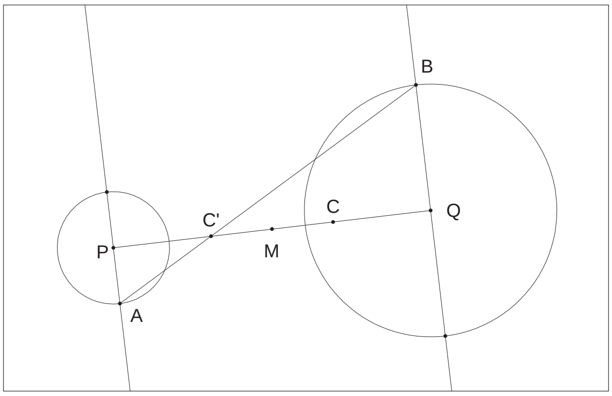
Centro di massa con Cabri

di Roberto Ricci
Liceo Scientifico "A. Righi" Bologna

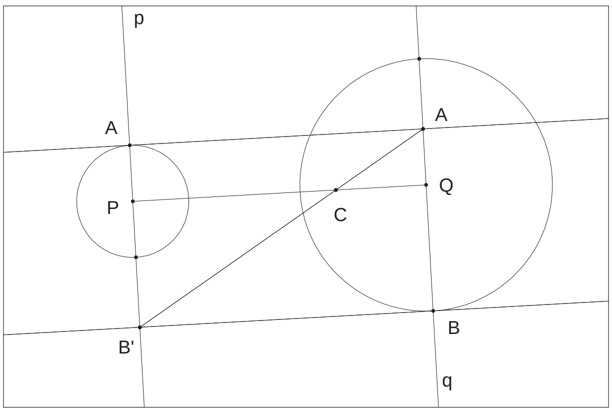
Come rappresentare con Cabri masse puntiformi sul piano? Come realizzare macrocostruzioni per costruire il centro di massa di due masse puntiformi?
Per rappresentare una massa puntiforme ci si può servire, ad esempio, di una circonferenza il cui centro sarà il corpo puntiforme mentre il raggio sarà proporzionale alla massa.
Di conseguenza, create due circonferenze, per costruire il centro di massa di due corpi puntiformi da queste rappresentate potremo, ad esempio:

costruire i centri *P* e *Q* delle due circonferenze date, punti che rappresentano i corpi puntiformi;
creare il segmento *PQ*;
costruire la perpendicolare da *P* al segmento *PQ*;
costruire la perpendicolare da *Q* al segmento *PQ*;

costruire le intersezioni tra queste perpendicolari e le circonferenze;
creare un segmento che unisca due di tali intersezioni e che intersechi il segmento *PQ*, sia *AB* tale segmento;
costruire il punto *C’*, intersezione tra questo segmento e *PQ*;
costruire il punto medio *M* del segmento *PQ*;
costruire il punto *C* simmetrico di *C’* rispetto a *M*.

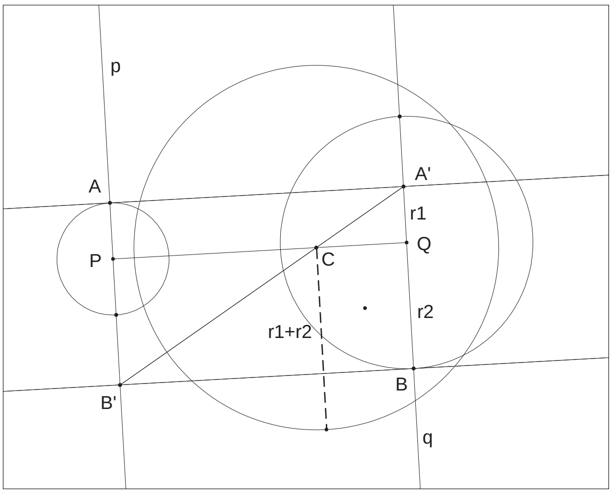


Il punto *C* è effettivamente il centro di massa. Infatti, facendo riferimento alla figura, detti r_1 e r_2 i raggi delle circonferenze di centro rispettivamente *P* e *Q*, proporzionali rispettivamente alle masse m_1 e m_2 dei corpi puntiformi *P* e *Q*, per la similitudine tra i triangoli rettangoli *APC’* e *BQC’*, si può dire che $PC’: r_1 = QC’: r_2$ e quindi $QC/PC = PC’/QC’ = r_1/r_2 = m_1/m_2$.
Alternativamente potremo, ad esempio:
costruire i centri *P* e *Q* delle due circonferenze;
creare il segmento *PQ*;
costruire la perpendicolare *p* da *P* al segmento *PQ*;
costruire la perpendicolare *q* da *Q* al segmento *PQ*;
costruire le intersezioni tra p e la circonferenza di centro *P*;
costruire la parallela da uno di questi punti, detto *A*, al segmento *PQ*;
costruire l’intersezione *A’* tra questa e la retta *q*;
costruire le intersezioni tra *q* e la circonferenza di centro *Q*;
costruire da uno di questi punti *B*, opposto ad *A* rispetto alla retta *PQ*, la parallela a *PQ* ;
costruire l’intersezione *B’* tra questa e la retta *p*;
creare il segmento *A’B’*;
costruire il punto *C* intersezione *A’B’* e *PQ*.

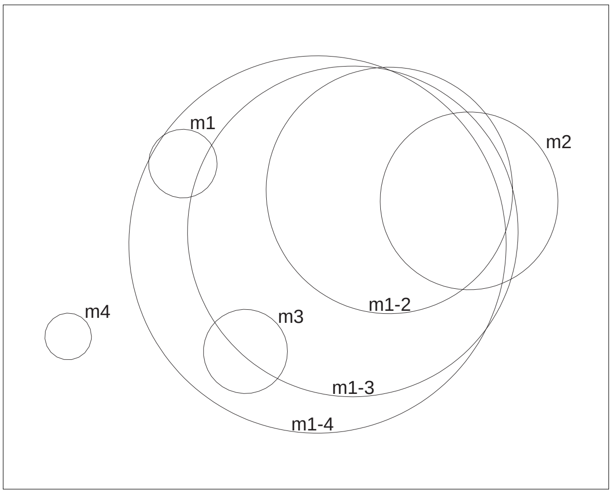


Con un ragionamento analogo al precedente si può dimostrare che *C* è ancora il centro di massa cercato.
La macrocostruzione in ogni caso dovrà fornire come risultato un corpo puntiforme secondo la nostra rappresentazione: una circonferenza di centro nel centro di massa e raggio somma dei raggi delle circonferenze che rappresentano le due masse date. Perciò, ad esempio, aggiungeremo alla precedente costruzione:
costruire il punto medio tra *C* e *B*;
costruire il simmetrico di *A’* rispetto al punto appena costruito;
costruire la circonferenza di centro *C* e passante per il punto appena costruito.

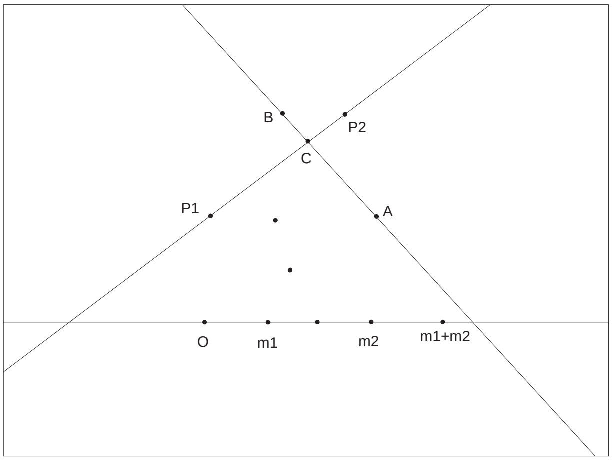
Nella descrizione della macrocostruzione, dopo aver selezionato l’opzione Macro-costruzioni del menu



Diversi, saranno indicati come oggetti iniziali le circonferenze date e come oggetto finale la circonferenza così costruita. Così si potrà iterare la macrocostruzione, nuova opzione del menu *Costruzioni*, per ottenere il centro di massa di più di due corpi puntiformi.



Anche per non rischiare di ingenerare una cattiva abitudine a pensare che la massa di un corpo sia legata alle sue dimensioni lineari, si potrà utilizzare una diversa rappresentazione delle masse puntiformi: creato un punto nel piano, indicheremo la sua massa su una retta prefissata, posto su essa il punto *0*. Così è possibile realizzare una costruzione valida anche per masse negative.



Ad esempio, creata la retta m, costruiti i punti *0*, m_1 e m_2 su questa, creati i punti P_1 e P_2, corpi puntiformi di masse rispettivamente m_1 e m_2, potremo servirci dei passi seguenti per costruire il centro di massa:
costruire il punto medio tra P_1 e m_2;
costruire il punto *A* simmetrico di *0* rispetto al punto appena creato;
costruire il punto medio tra *0* e P_2;
costruire il punto *B* simmetrico di m1 rispetto al punto appena creato;
creare la retta *AB*;
creare la retta P_1P_2;
costruire il punto *C* intersezione tra le rette *AB* e P_1P_2;
costruire il punto medio tra m_1 e m_2;
costruire il punto m_1+m_2 simmetrico di *0* rispetto al punto appena costruito.
Naturalmente la macrocostruzione dovrà avere come oggetti iniziali la retta su cui sono rappresentate le masse, i punti *0*, m_1 e m_2 su di essa, i punti P_1 e P_2 , e come oggetti finali il punto m_1+m_2 e il punto *C*.
Per convincersi della correttezza della costruzione è sufficiente osservare che le due rette AP_1 e BP_2 sono parallele e quindi i due triangoli AP_1C e BP_2C sono simili; poiché $AP_1/ BP_2 = m_2/m_1$, allora anche $P_1C / CP_2 = m_2/m_1$.
Si potrà in tal modo constatare ad esempio che il baricentro di un triangolo, punto intersezione tra le mediane, è il centro di massa quando i vertici hanno la stessa massa; oppure che l'incentro di un triangolo, punto intersezione delle bisettrici e centro della circonferenza inscritta, coincide con il centro di massa quando ciascun vertice ha massa proporzionale alla lunghezza del lato opposto.

Bibliografia

R.Ricci, *Punti notevoli dei triangoli,* su*: La matematica e la sua didattica*, N.1 Gen-Mar 94, Pitagora ed., Bologna, pp.39-43 ■

Da Cabriole

Spirale delle potenze ed estrattore di radice

(da Cabriole n.°4 pag.2)

traduzione di Franca Noè
I.R.R.S.A.E. - E.R. Bologna

Realizziamo la costruzione rappresentata in fig.1: due rette perpendicolari in *O* definiscono 4 semirette uscenti da *O*: d_0 ,d_1 ,d_2 ,d_3 (ordinate in senso orario).
Scegliamo un punto *U* su d_0 e un punto A_1 su d_1. Costruiamo successivamente le perpendicolari:
- in A_1 a UA_1 e la sua intersezione A_2 con d_2 ,
- in A_2 a A_1A_2 e la sua intersezione A_3 con d_3 ,
- in A_3 a A_2A_3 e la sua intersezione A_4 con d_4 ,... etc (ottenendo A_5, A_6, ... A_n).

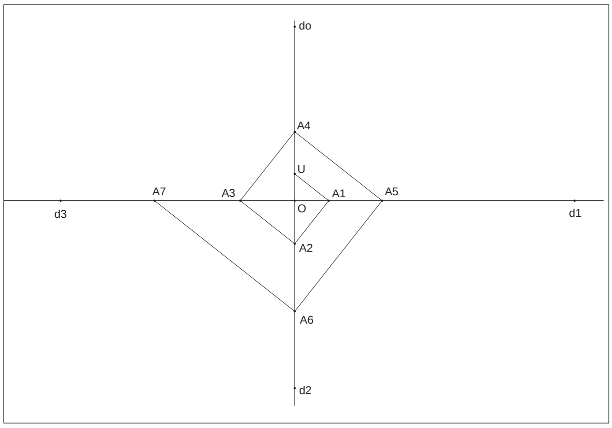


figura 1

Se si sceglie *OU* come unità di misura e OA_1 rappresenta un numero positivo *a* (OA_1>*OU*, n.d.t), si scopre che si è costruita la "spirale delle potenze" perchè OA_2 rappresenta il numero a^2 e più generalmente OA_n il numero a^n (infatti, nel triangolo rettangolo UA_1A_2 , si ha $(OA_1)^2 = OU*OA_2$ e così di seguito...).
Si può attuare la costruzione in senso inverso e ottenere (come indicato in fig.2) con i punti B_1 ,B_2 , ... B_n le

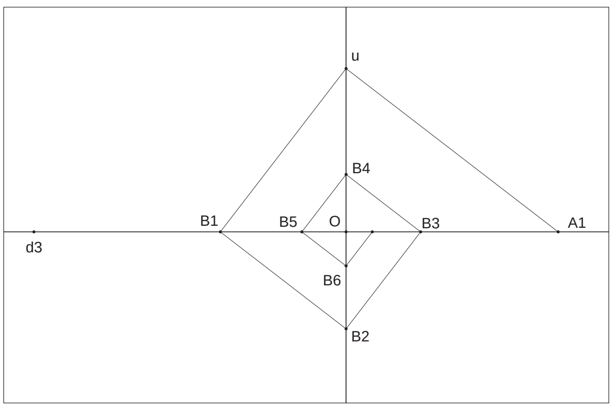


figura 2

potenze ad esponenti negativi : a^{-1} ,a^{-2} ,... a^{-n}.
Una volta fatta la costruzione, sarà sufficiente spostare il punto A_1 per ottenere la potenza n^{esima} di tutti i numeri *a* e, assegnando a *OU* la misura-cabri 1, mediante semplice lettura, una tavola (di Laborde...) dinamica!
Facciamo notare in fig.3 lo scambio spettacolare di carattere divergente/convergente delle due spirali per *a<1* (con il passaggio per *a=1* in cui le spirali coincidono formando un quadrato).

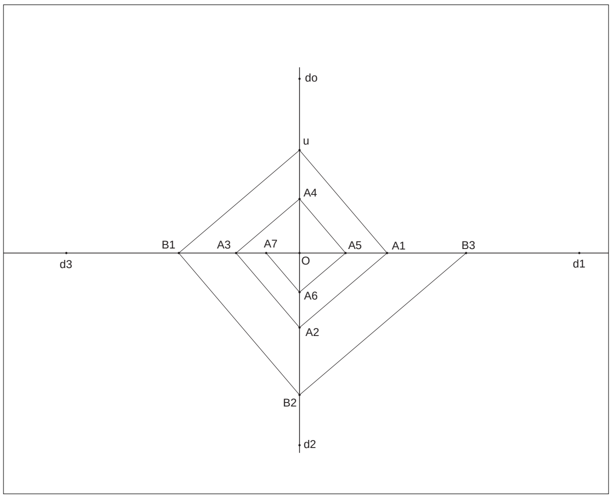


figura 3

Alcuni cabri-scettici diranno che tutto questo si poteva, molto bene, fare “a mano” (al prezzo certo di una nuova costruzione per ogni nuovo valore di *a*) ed è vero...
Ma ecco dove Cabri ci dà “qualcosa di più”, è nel lavoro inverso di estrazione di radice n^{esima}. Infatti, dato un numero positivo *x* di cui si voglia per esempio la radice 5^a, basta scegliere il punto *X* su d_1 a rappresentare *x* e successivamente muovere il punto A_1 in modo che A_5 si sovrapponga a *X*. Allora OA_1 ci dà la radice 5^a di *x*.

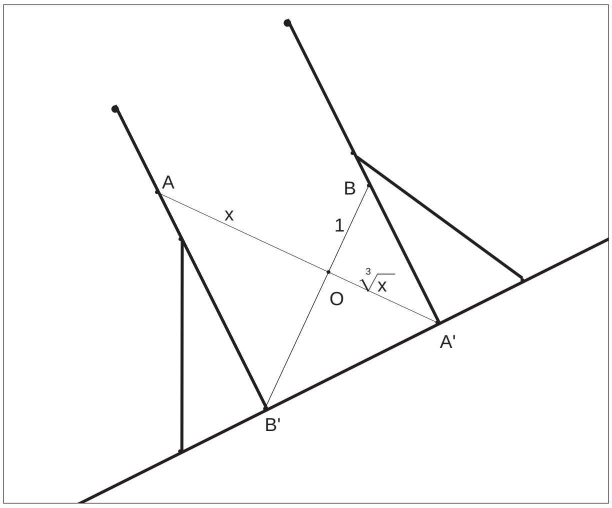


figura 4

Anzichè ricorrere all’aggiustamento descritto, sarà possibile fare una costruzione diretta che ci fornisca per esempio la radice cubica? Certamente no, vista la caratteristica di “costruibilità con riga e compasso” imposta nel Cabri.

Sappiate che questo “bricolage” (fig.4) era conosciuto dai Greci che disponevano di un apparecchio meccanico primitivo detto “estrattore di radice cubica”. Esso era formato da due squadre scorrevoli su una riga e il lavoro consisteva nell’inserire due segmenti perpendicolari *OA* e *OB* di lunghezza rispettivamente *x* e *1*, in modo da ottenere con i loro prolungamenti *OA’* e *OB’* la figura riprodotta qui a lato ... che ci fornisce con *OA’* la radice cubica di *x*. ■

Errata corrige

Nel bollettino CABRIRRSAE N°8, a pag.14, è comparso erroneamente: Traduzione di B.C.nell’articolo della sezione ***Da Cabriole***; la dicitura corretta è : Traduzione di Mariarosa Musiani.
A pag. 16, la frase che chiude ***In questo numero*** è incompleta; doveva essere: una esperienza didattica sul concetto di luogo realizzata in una scuola media francese.

Corsi e seminari

A Castel San Pietro Terme (Bologna) nei giorni 15-16-17 novembre 1996 si è tenuto il Convegno-Corso di aggiornamento Nazionale per insegnanti di scuola dell’infanzia, elementare, media e superiore, per personale direttivo ed ispettivo. Al convegno si sono tenuti due seminari sull’uso di Cabri-géométre nella didattica della matematica: per la scuola elementare “Non uno ma mille Cabri” (Paolo Oliva - Reggio Emilia) e per la scuola media superiore “Numeri complessi e trasformazioni affini nel piano con Cabri” (Roberto Ricci - Bologna).

A Siena nei giorni 8-9-10 maggio 1997 si terrà il convegno DIDAMATICA ‘97, Informatica per la didattica. Per informazioni rivolgersi alla Segreteria del convegno, prof. Brunetto Piochi, Dipartimento di Matematica, Università di Siena - via Capitano, 15 - 53100 Siena - Tel 0577/263764 - Fax 0577/263730 - e-mail didamati@unisi.it. Sarà approntata una pagina www con tutte le informazioni sul convegno.

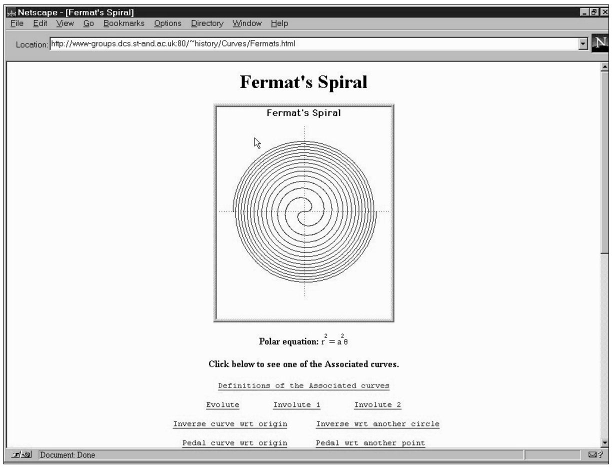
World Wide Web

Mathematical MacTutor

Un archivio di storia della matematica

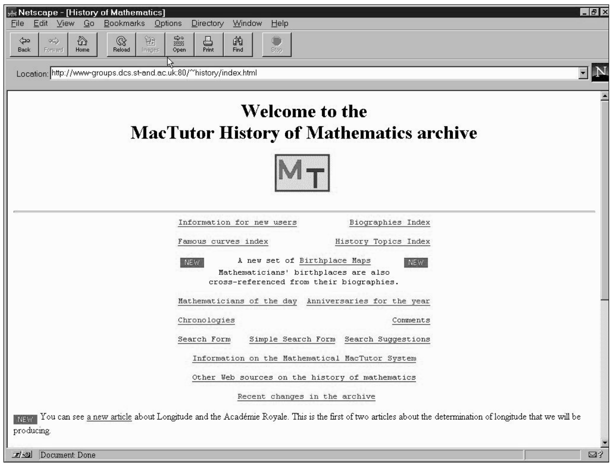
di Valerio Mezzogori
Scuola Media Statale “Salvo D’Acquisto” Bologna

“Mathematical MacTutor” è un sistema ipertestuale per l’insegnamento della matematica sviluppato, per sistemi Apple-Macintosh, alla “School of Mathematics and Computational Sciences” dell’Università di St Andrews in Scozia.
Un dimostrativo, circa 600K, può essere prelevato in rete con un collegamento “anonymous ftp” all’indirizzo: gregory.dcs.st-andrews.ac.uk nella sottodirectory /pub.
“MacTutor History of Mathematics archive” è la parte del sistema disponibile sul Web.



Il sito contiene un vasto repertorio di temi matematici collegati alle biografie degli autori che li hanno sviluppati.
Oltre 1000 biografie possono essere consultate attraverso indici alfabetici e cronologici, o per mezzo di una mappa geografica dei luoghi di nascita. Un’opzione, “Mathematicians of the day”, consente di accedere alle biografie dei matematici che sono nati o morti nella data in cui si interroga il sistema; un’altra, “Anniversaries for the year”, permette di interrogare l’intero calendario.
Fra le risorse più interessanti segnaliamo:
- “Famous curves index”, un indice alfabetico che permette di accedere ad un archivio di oltre 60 curve, di cui vengono fornite, oltre alla rappresentazione grafica (disponendo di un browser che supporta il linguaggio Java è possibile investigare in modo interattivo le figure), informazioni storiche e collegamenti a curve associate;
- “History Topics Index”, una raccolta di articoli di storia della matematica con numerosi rimandi all’archivio delle biografie.

Numerosi i collegamenti ad altri siti Web di interesse matematico, tutti accompagnati da una sintetica descrizione del contenuto.
“MacTutor History of Mathematics archive” può essere raggiunto dalla home page di CABRI*RRSAE* scegliendo l’opzione “Altre risorse in rete”, oppure direttamente all’indirizzo:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/~history/index.html



Cabri in biblioteca

Giovedì 28 novembre 1996 a Bologna nell’Aula Absidale di Santa Lucia ha avuto luogo la presentazione del volume *RIPOSTE ARMONIE - Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, edito dalla Casa Editrice Bollati Boringhieri e curato da U.Bottazzini, A.Conte, P.Gario.
Per la collana “Quaderni di CABR*IRRSAE”* è stato pubblicato il Quaderno n°11: *Cabri-géomètre e lo studio delle coniche nella scuola media* di Giuseppe Giacometti, chi desiderasse riceverlo deve farne richiesta all’IRRSAE - E.R.
È uscito il pregevole volumetto: *INVITO ALLA GEOMETRIA CON CABRI-GÉOMÈTRE, proposte di lavoro per la scuola secondaria superiore*, di Consolato Pellegrino e Maria Grazia Zagabrio.
Chi desiderasse riceverlo può farne richiesta all’IPRASE del Trentino

In questo numero

Siamo lieti di aprire con questo numero una collaborazione con il prof. Mario Barra che da anni si occupa di didattica della geometria a tutti i livelli di scuola. In ***Cabri discusso*** un suo articolo sulle affinità è sia un omaggio a Emma Castelnuovo e alla sua didattica che una proposta di lavoro con Cabri.

In ***Come fare*** finalmente un lavoro, quasi un gioco, dedicato alla scuola elementare; seguono quattro articoli per la scuola media superiore: la verifica di un asserto apparentemente poco evidente, cioè che le parabole sono tutte simili fra loro; una utilizzazione della simmetria assiale per risolvere problemi di minimo e di massimo; la risoluzione con Cabri di un esercizio del tema di maturità scientifica sperimentale (PNI) 1996; infine un impiego di Cabri nella fisica per costruire il centro di massa di una o più masse puntiformi.

Nella sezione ***Da Cabriole*** una tavola dinamica delle potenze di un numero reale *a*.

L'Immagine

L'immagine di copertina è tratta dal volume: *RIPOSTE ARMONIE. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, Bollati Boringhieri, Torino 1996.

Le 670 lettere contenute nel volume, scritte nel corso di quasi 15 anni, documentano il rapporto di amicizia e collaborazione fra due dei massimi rappresentanti della scuola italiana di geometria e costituiscono una documentazione di grande interesse sul contributo portato dai matematici italiani allo sviluppo della geometria algebrica.

Le riposte armonie a cui fa riferimento il titolo sono, per Enriques, quelle che si celano nelle superficie alge-

Inviateci i vostri articoli

CABRI*RRSAE* pubblica contributi relativi all'utilizzo del pacchetto Cabri-géomètre, con particolare attenzione alla valenza didattica e all'inserimento nel curricolo scolastico.

Ogni articolo (non più di 4 cartelle) deve pervenire, su supporto magnetico e cartaceo, ad uno degli indirizzi indicati in copertina, rispettando le seguenti modalità:

• *SUPPORTO CARTACEO*

- testo e figure devono essere impaginate secondo le intenzioni dell'autore;
- indicate per ogni figura il nome con cui è registrata sul supporto magnetico;
- per i “ *luoghi geometrici* ” inviate la stampata con l'indicazione del punto d'inserimento.

• *SUPPORTO MAGNETICO*

- il file di *testo* in ***formato Word*** (estensione .DOC) non deve contenere le figure che invece devono essere collocate in un file a parte in formato Cabri (estensione .FIG) e in formato Hewlett Packard Graphics Language (estensione . HGL). Per ottenere le figure in questo formato si rimanda al capitolo 8.5 Stampa su File (pag. 70) del manuale di Cabri Géomètre;
- anche se Cabri Géomètre permette di tracciare oggetti a colori, non utilizzate questa opzione nei file che allegate;
- altri materiali (immagini, tabelle, grafici, ecc.) devono pervenire in formato originale, con indicazione dell'applicativo che le ha generate.

Il materiale inviato non sarà restituito.

Siamo ugualmente interessati a ricevere materiali più articolati sull'utilizzo di Cabri; tali materiali possono essere diffusi mediante la collana “Quaderni di CABRI*RRSAE* ”.

CABRIRRSAE

COMITATO SCIENTIFICO
Giulio Cesare Barozzi (Università di Bologna)
Mario Barra (Università La Sapienza - Roma)
Paolo Boieri (Politecnico di Torino)
Colette Laborde (IMAG Grenoble)
Gianni Zanarini (Università di Bologna)

COMITATO DI REDAZIONE
Anna Maria Arpinati, Maria Elena Basile, Giuliana Bettini, Maria Grazia Masi, Valerio Mezzogori, Franca Noè, Daniele Tasso

Videoimpaginazione GRAPHICART - Via Fondazza, 37 - Tel. Fax (051) 30.70.73 - 40125 Bologna

Supplemento al n.1 Gennaio-Febbraio 1996, di INNOVAZIONE EDUCATIVA bollettino bimestrale dell'Istituto Regionale di Ricerca, Sperimentazione, Aggiornamento educativi dell'Emilia-Romagna. Registrazione Trib. Bo n. 4845 del 24-10-1980. Direttore resp. Giancarlo Cerini, proprietà IRRSAE/ER.