

ALCUNE NOTE STORICHE SUGLI « ELEMENTI » DI EUCLIDE NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA IN ITALIA (*)

In questo lavoro si esamina, in modo retrospettivo, la fortuna (alterna) degli *Elementi* di Euclide nell'insegnamento della matematica con particolare riguardo all'Italia, cercando di mettere in evidenza come questa fortuna sia stata legata profondamente ai metodi e agli indirizzi principali della ricerca che si sono succeduti nei secoli nel campo della geometria.

Nel 1482 a Venezia venivano stampati per la prima volta gli *Elementi* di Euclide nell'edizione curata da Campano di Novara con traduzione dall'arabo in latino del testo. A questa prima edizione sono seguite tante altre che, tra le opere importanti, gli *Elementi* di Euclide sono forse con la Bibbia, l'opera più ristampata ⁽¹⁾.

Ma se la fortuna di questo capolavoro della matematica greca è stato costante, la stessa cosa non si può dire se lo si pone in relazione colla istruzione matematica media a cui sovente il nome di Euclide si trova collegato.

La fortuna degli *Elementi* nell'insegnamento della matematica ci appare infatti dalla fine del 400 quanto mai alterna: se infatti gli argomenti trattati sono stati comunemente ritenuti come facenti parte della cultura matematica di base per le persone colte, una pari fedeltà non ha accompagnato il modo e l'ordine dell'esposizione.

Per quasi tutto il XVI secolo convivono i rifacimenti e le riesposizioni con la proposta del testo originale (la prima edizione del testo greco degli *Elementi* viene pubblicata a Basilea nel 1533). Maggiore diffusione hanno

(*) Lavoro eseguito con contributo del CNR.

(¹) Un'ampia bibliografia sulle edizioni degli *Elementi* in tutto il mondo è contenuta in articoli di P. RICCARDI, *Saggio di una bibliografia Euclidea*, Mem. Acc. Bologna, Serie IV, 8, 9, Serie V, 1, 2 (1887-1893). La traduzione italiana più recente è quella curata da A. Frajese e L. Maccioni, Torino, UTET 1970. Una scheda di questo libro è inserita nel supplemento al n. 7 (1979) del « Notiziario dell'Unione Matematica Italiana », *Formazione permanente degli insegnanti di matematica ecc.* a cura di G. Giorello, F. Lerda, L. Pepe, C. Sitia.

Un'edizione italiana degli *Elementi* molto interessante anche per l'esame dei contributi portati alla geometria euclidea nelle varie epoche è quella curata da F. ENRIQUES, *Gli « Elementi » d'Euclide e la critica antica e moderna*, 4 voll., Roma-Bologna, 1925-1936.

i rifacimenti nei quali la geometria euclidea è spiegata rapidamente per arrivare a risultati pratici. Così ad esempio in *Le pratiche delle due prime mathematiche* (Venezia, 1546, 2^a ed. 1559) di Pietro Cataneo il quarto libro riguarda la misura dei poligoni, del cerchio, le piramidi, botti, colonne, ecc. (2).

Peraltro un rifacimento degli *Elementi* di Euclide è già contenuto nella seconda parte della monumentale enciclopedia matematica di Luca Pacioli, la *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità* (Venezia, 1494, 2^a ed. 1523). In essa il Pacioli tratta riassumendoli i teoremi degli *Elementi* sui triangoli, sui poligoni, sul cerchio e sul volume dei solidi, ma anche della divisione delle figure, della misure delle corde di un cerchio (trigonometria) e di diversi altri problemi. Luca Pacioli pubblicò, pure a Venezia, nel 1509 un'edizione riveduta della traduzione latina degli *Elementi*.

Niccolò Tartaglia, uno dei massimi matematici del 500, tradusse per primo in italiano dal latino gli *Elementi* di Euclide nel 1543 (questa è anche la prima traduzione in lingua volgare). Inoltre Tartaglia diede nella terza, nella quarta e nella quinta parte della sua opera maggiore, il *General trattato di numeri et misure*, un ordine diverso e originale alla geometria elementare risolvendo anche problemi del tutto nuovi (Venezia, 1560) (3).

Una notevole indipendenza dal modello euclideo dimostrò contemporaneamente in Francia nelle sue opere Pierre Ramus (1515-1572).

Nel 1572 esce la traduzione latina degli *Elementi* condotta dal testo greco con competenza filologica e consapevolezza scientifica da Federico Commandino (1509-1575) e nel 1575, sempre curata dal Commandino, viene pubblicata una nuova traduzione italiana degli *Elementi* (ben più soddisfacente dal punto di vista della lingua di quella di Tartaglia); questa traduzione sarà di riferimento per ogni successiva traduzione degli *Elementi* in lingua italiana.

Nel 1574 esce in due volumi la pregevole traduzione dal greco in latino e i commenti di Cristoforo Clavio, che tra l'altro stabilisce la non identità tra l'Euclide matematico (di Alessandria) e l'Euclide filosofo (di Megara).

(2) Per non appesantire la trattazione le opere vengono citate in forma abbreviata quando esse figurano nelle seguenti bibliografie (nelle quali si segue l'ordine alfabetico per autori):

J. C. POGGENDORFF, *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften ...*, Leipzig, 1863, 2 voll.

P. RICCARDI, *Biblioteca matematica italiana*, Modena, Società Tipografica, 1870-1893. Altre aggiunte 1928. Ristampa anastatica, Milano Görlich, 1952, 2 voll.

(3) Tartaglia, Cardano e Bombelli sono gli autori dei più importanti trattati di algebra del 500. Nei loro scritti è corrente l'utilizzazione dei metodi dell'algebra per risolvere problemi di geometria.

Le molte edizioni della traduzione del Clavio fino ai primi decenni del 600, adottata per l'insegnamento della matematica nelle scuole dei Gesuiti, testimoniano la notevole diffusione degli *Elementi* e l'importanza dello studio di questi in « un'edizione critica ».

In questo periodo soprattutto in Italia i metodi sintetici si impongono largamente nella geometria e nelle applicazioni della geometria alla meccanica e alla prospettiva. Guidobaldo dal Monte, discepolo del Comandino e maestro di Galilei, è autore di un ampio programma di sistemazione della meccanica e della prospettiva sulle basi della geometria classica.

La geometria euclidea è anche il linguaggio matematico di Galileo per il quale il libro della natura è scritto in caratteri che sono « Triangoli, Quadrati, Cerchi, Sfere, Coni, Piramidi e altre figure matematiche ».

I metodi della geometria sintetica senza alcun ricorso all'algebra caratterizzano anche le opere dei « discepoli di Galileo »: Cavalieri, Torricelli, Borelli, Viviani.

Il Seicento è secolo di profonde innovazioni nel campo della matematica; la geometria analitica, la teoria degli indivisibili, lo sviluppo della meccanica mettono in crisi in diverse direzioni il modo di pensare euclideo e così ricompaiono le riesposizioni degli *Elementi*, segnatamente per il 5° libro (teoria delle proporzioni), di Galilei, Borelli, Viviani, Giordano Vitale. A questo filone si connette l'*Euclides ab omni naevo vindicatus* (Milano, 1733) di Girolamo Saccheri (1667-1733), opera notevole sui fondamenti della geometria euclidea: teoria delle parallele, teoria delle proporzioni (il lavoro di Saccheri ebbe larga fortuna alla fine del XIX secolo per merito di E. Beltrami che ne segnalò l'interesse in relazione alle « geometrie non euclidee »).

Per gli stessi motivi nel Seicento si affermano inoltre trattati della geometria elementare di nuova impostazione come quello dell'Arnauld. I *Nouveaux Éléments de Géométrie*, comparso anonimo nel 1667 (2ª ed. 1683) ma dovuto ad Antoine Arnauld (1612-1694), uno dei maggiori pensatori del XVII secolo, comprende quindici libri e arriva fino alla teoria della misura per i poligoni piani (segue un'interessante appendice sui quadrati magici). L'esposizione segue un ordine del tutto diverso da quello euclideo: inizia con la teoria delle grandezze che ricorda in qualche modo una teoria dei numeri reali, prosegue con lo studio del parallelismo, la misura degli angoli, i rapporti tra segmenti, un confronto delle figure piane rispetto alla loro area. L'opera dell'Arnauld presenta elementi di notevole interesse ed originalità e servì da modello ad altri trattati di geometria (Malézieu 1715, Varignon, ecc.).

Un rifacimento meno radicale degli *Elementi* di Euclide fu realizzato dal gesuita belga Andreas Tacquet (1612-1660) nell'opera *Elementa geometriae planae ac solidae; quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata*,

stampata per la prima volta nel 1654. Quest'opera, adottata come testo nelle scuole dei Gesuiti, ebbe in Europa per oltre un secolo una straordinaria diffusione attraverso svariate edizioni (anche le edizioni italiane furono diverse: Napoli 1744, Padova 1761, ecc.), Essa copre i cosiddetti elementi piani e solidi cioè i libri « geometrici » degli *Elementi*: i primi sei dedicati alla geometria piana, l'undicesimo e il dodicesimo dedicati alla geometria solida.

Anche nell'insegnamento « per i più bravi » gli *Elementi* sono in crisi, e così mentre trent'anni prima Newton si formava sugli *Elementi*, Jacob Bernoulli alla fine del 600 raccomandava al suo discepolo e genero Hermann di non seguire l'esposizione euclidea e su questa linea si attesta la prima formazione matematica degli studiosi del 700.

A coronare quest'abbandono degli *Elementi* viene la preziosa e brillante opera di Clairaut, gli *Éléments de géométrie* (1741, prima traduzione italiana: Roma, 1751). Clairaut rinuncia ad ogni sistemazione rigidamente deduttiva prospettando un'acquisizione per gradi della disciplina (p. III):

J'ai pensé que cette Science, comme toutes les autres, devoit s'être formée par degrés; que c'étoit vraisemblablement quelque besoin qui avoit fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvoient pas être hors de la portée des Commençans, puisque c'étoient des Commençans qui les avoient faits.

Il libro comincia infatti trattando il problema della misura dei terreni, che è all'origine del nome stesso di Geometria, l'esposizione procede per « problemi » piuttosto che per teorie (dividere in due parti uguali un segmento, costruire un rettangolo di date dimensioni, costruire un angolo uguale ad uno assegnato, costruire un quadrato equivalente a due quadrati dati, trovare la distanza di un punto da tre punti dati, costruire un quadrato equivalente ad un rettangolo, condurre da un punto esterno le tangenti ad una circonferenza). I primi tre libri riguardano la geometria piana, il quarto (ed ultimo) la misura dei solidi e delle loro superfici (prismi retti ed obliqui, volume di una piramide e del cono: « il cono è una specie di piramide la cui base è un cerchio », superficie della sfera, rapporti tra le misure di solidi simili).

La fortuna degli *Elementi* di Euclide non migliora nella prima metà dell'800. L'opera che domina nell'insegnamento della geometria elementare sono infatti gli *Éléments de géométrie* di Adrien Marie Legendre (1752-1833) stampato per la prima volta nel 1794 (12^a ed. 1823). Gli *Éléments* di Legendre furono tradotti nelle principali lingue europee (2^a ed. italiana, Firenze, 1818). L'opera è divisa in otto libri e comprende sia la geometria piana che la solida, terminando con il volume della sfera e l'area della superficie sferica. L'esposizione è molto più sistematica che nel Clairaut,

si torna all'esposizione « per teorie », tuttavia vengono adottate le « semplificazioni » del linguaggio geometrico derivanti dall'uso dell'algebra. Significativa è la definizione « variazionale » che Legendre dà della retta: « La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre ».

Per quanto riguarda l'Italia, in questo periodo (1700-1850) si registra parimenti un abbandono del modello euclideo strettamente inteso, ma in generale si continuano a preferire le dimostrazioni di tipo geometrico e l'influenza dell'opera di Euclide si fa sentire con maggiore forza che altrove.

Vincenzo Viviani (1622-1703), « ultimo discepolo di Galilei », pubblicò nel 1690 una traduzione degli *Elementi piani, e solidi d'Euclide* che fu poi ristampata quattro volte (1718, 1734, 1746, 1769); questa traduzione segue quella del Commandino rivedendone la lingua e la terminologia ⁽⁴⁾.

Un'altra fortunata edizione degli *Elementi geometrici piani e solidi di Euclide* fu pubblicata da Guido Grandi (1671-1742); essa fu ristampata sei volte fino al 1805 e comprende i primi sei e gli ultimi tre (XI, XII, XIII) libri degli *Elementi* concludendosi con il confronto tra i cinque poliedri regolari.

Il Settecento fu in Italia secolo di copiosa produzione nel campo delle matematiche e molto numerose sono le opere di carattere espositivo riguardanti la geometria elementare più o meno legate al modello euclideo: il riferimento che sparisce a volte nei titoli (*Elementi della geometria così piana, come solida* di Niccolò di Martino, Napoli, 1768), altre volte è presente, ma indica prevalentemente i contenuti.

Così dalla metà del Settecento in concomitanza con il concentrarsi della ricerca matematica su temi generali che facevano ricorso all'algebra e al calcolo infinitesimale, l'interesse per il modello teorico euclideo è secondario e gli *Elementi* vengono considerati opera troppo pedante, farraginoso e antiquato per poter essere usata direttamente nelle scuole e nell'istruzione matematica.

La completa fiducia nella potenza e nella certezza dei metodi dell'algebra e dell'analisi entra in crisi come è noto agli inizi dell'800; da una parte si dimostra l'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni algebriche di grado superiore al quarto, vaneggiando le ricerche di analisi in questa direzione, dall'altra la scoperta della geometria descrittiva da parte di Monge rivendica alla geometria pura quella generalità nei metodi di dimostrazione che sembrava essere esclusiva della geometria analitica

(4) Spariscono quindi i libri settimo, ottavo e nono che trattano questioni di teoria dei numeri (massimo comun divisore, numeri primi, minimo comune multiplo, numeri perfetti) e il libro decimo, il più lungo e difficile degli *Elementi*, in cui viene esposta una classificazione geometrica di alcune classi di irrazionali.

ed apre un settore estremamente fecondo di indagine sul quale si cimentano molti dei più illustri geometri dell'800 (Carnot, Poncelet, Steiner) ⁽⁵⁾. Infine il problema dei fondamenti del calcolo infinitesimale, della teoria delle serie, della teoria delle funzioni diventano uno dei principali campi d'indagine dell'Analisi stessa (Cauchy, Abel, Dirichlet, ecc.).

Dai metodi sintetici nella geometria e dallo studio dei fondamenti della matematica vengono i maggiori stimoli alla revisione dell'insegnamento medio delle matematiche che si realizza in Europa nella seconda metà dell'800 e che è caratterizzato dal ritorno ad Euclide ⁽⁶⁾. In una posizione di primo piano l'Italia, in cui l'unità nazionale segna anche il rilancio della ricerca matematica, sia attraverso il riferimento ai settori più vivi della matematica europea, sia attraverso una riflessione sulla nostra tradizione culturale. L'una e l'altra strada portano ad un ritorno agli *Elementi* di Euclide come testo per l'insegnamento della geometria nei licei e negli istituti tecnici. Così scrivevano Betti e Brioschi nell'introduzione all'edizione dei primi sei libri degli *Elementi* di Euclide (1868), nella quale il testo veniva presentato nella versione del Viviani riveduta:

Dobbiamo lamentare che quell'inimitabile modello di logica e di chiarezza lasciatoci dai Greci negli *Elementi* d'Euclide sia stato pressoché abbandonato dalle nostre scuole, e siansi invece introdotti e raccomandati libri, nei quali esagerandosi il metodo di Legendre, al rigore del ragionamento si è sostituito il meccanismo del processo aritmetico. La suprema accuratezza d'Euclide non è più apprezzata nelle nostre scuole, e vi si preferiscono dimostrazioni inesatte di proprietà, le quali non ponno esserci rivelate che dai sensi, a quegli assiomi o postulati che il Galileo giudicava « domande così oneste e concedibili che se la fabbrica della geometria veniva inalzata sopra tali fondamenti, non poteva essere che fortissima e stabilissima ».

e lo stesso Brioschi e L. Cremona, che fu anche Ministro della pubblica istruzione, così dichiaravano il progetto culturale in una lettera al Direttore del « Giornale di Matematiche » (1869, 7 pp. 51-54):

I nostri ginnasi e licei sono destinati a dare una cultura elevata, eccezionale. In essi non si mira ad insegnare il disegno geometrico, né importa che i giovani apprendano la tale o tal'altra proposizione, né che studino molte cose in poco tempo. Importa invece che apprendano a ragionare, a dimostrare, a dedurre: non giovano dunque i mezzi celeri, né i libri ove la geometria è

⁽⁵⁾ Agli inizi dell'800 si registra in Italia una forte ripresa degli studi nel campo della geometria con metodi sintetici; a parte la felicissima opera di L. MASCHERONI, *Geometria del compasso* (Pavia, 1797), si segnala un gruppo di studiosi che facevano riferimento, a Napoli, a N. Fergola. Uno di essi, V. Flauti, cura una nuova traduzione italiana degli « elementi geometrici » di Euclide (Napoli, 1818) (cfr. P. RICCARDI, *Saggio di una bibliografia Euclidea ...*).

⁽⁶⁾ In Francia (Duhamel, Höuel), in Germania e, con particolare decisione, in Inghilterra, e ancora negli Stati Uniti d'America (Collegio di Princeton).

mescolata coll'aritmetica o coll'algebra: l'Euclide è veramente il testo che meglio serve a questi fini.

Ben presto al tentativo di proporre direttamente il testo euclideo segue la riproposizione degli argomenti dei libri « geometrici » di Euclide in nuove esposizioni curate da alcuni dei maggiori matematici della fine dell'800: Sannia, d'Ovidio, De Franchis, De Paolis, Veronese, Enriques⁽⁷⁾.

Basta dare un'occhiata a questi testi, che hanno una notevolissima dignità teoretica ma presentano non lievi difficoltà di comprensione, per rendersi conto che il cambiamento non era dovuto alle pur comprensibili difficoltà didattiche comportate dall'introduzione del testo euclideo in scuole, già in qualche modo di massa, ma dalla preoccupazione del rigore, dato che i nuovi studi sui fondamenti della geometria stavano mettendo in rilievo una certa incompletezza nel sistema di assiomi euclideo, ovvero dal tentativo di favorire nei giovani già dai primi anni l'acquisizione delle tecniche più elementari e delle più semplici metodologie in uso nella ricerca scientifica⁽⁸⁾.

Da entrambe queste esigenze nasce la famosa polemica sul fusionismo cioè sulla fusione dell'insegnamento della geometria piana e della geometria solida (come avveniva nella geometria descrittiva) che impegnò notevolmente i matematici di fine secolo, ed inoltre le vivaci discussioni e i con-

⁽⁷⁾ Un esame accurato ed ampio dell'insegnamento della geometria in Italia alla fine dell'800 si trova nelle due dissertazioni:

E. ULIVI, *Sull'insegnamento della matematica dall'Unità d'Italia alla 1^a guerra mondiale*, Tesi di laurea, Firenze, Anno accademico 1976-77.

M. DEPICCOLI, *Insegnamento della geometria e libri di testo nelle scuole secondarie superiori italiane classiche e tecniche (1861-1914)*, Tesi di laurea, Ferrara, Anno accademico 1977-78.

Si veda anche: E. ULIVI, *Mode didattiche: il fusionismo*, « Archimede », anno 29, n. 4 (1977), pp. 211-216; E. ULIVI, *Sull'insegnamento scientifico nella scuola secondaria dalla Legge Casati alla Riforma Gentile: la sezione fisico-matematica*, « Archimede », anno 30, n. 4 (1978), pp. 166-182.

⁽⁸⁾ Molto esplicita è la posizione di G. LORIA nell'articolo: *Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell'insegnamento secondario*, « Periodico di matematica », 8, 1893, pp. 81-113. Loria confronta l'insegnamento della geometria nel suo tempo e nei diversi paesi rispetto alla aderenza di esso al modello euclideo. Esamina programmi e testi di Francia, Spagna, Grecia, Olanda, Svezia, Danimarca, Russia, Stati Uniti d'America, Germania, Impero Austro-Ungarico, Inghilterra. La tesi che egli sostiene è che, come avveniva nella maggioranza di questi Paesi, bisognava riscrivere la geometria elementare secondo nuovi modelli (p. 110): « *La geometria infatti non è più (come pensava forse a ragione Lagrange sulla fine del secolo scorso) una lingua morta che si deve studiare nelle opere di Euclide; essa all'opposto è una lingua viva per imparare la quale fa mestieri meditare le opere immortali di Poncelet, Chasles, Steiner, Möbius, Staudt e Cremona, all'intelligenza delle quali non si giungerà mai se si rimane eternamente attaccati agli scritti di Euclide* ». Su questa linea Loria sostiene coerentemente il fusionismo: « *Bisogna anzitutto togliere la vieta separazione della planimetria dalla stereometria, al che non si appare nessuna seria difficoltà scientifica né didattica ...* » e caldeggia l'introduzione del concetto di corrispondenza (applicato ai casi notevoli): simmetria e similitudine; pone anche il problema se sia il caso di spiegare la legge di dualità (che è alla base delle esposizioni classiche della geometria proiettiva).

fronti sull'insegnamento delle principali teorie geometriche. La teoria dell'uguaglianza viene fondata su una accurata assiomatica del movimento (De Franchis) secondo idee che si riallacciano alla teoria dei gruppi di trasformazioni (Lie, Pieri) ovvero l'uguaglianza viene stabilita con opportuni postulati senza far uso del movimento (Veronese, Enriques-Amaldi) secondo un'impostazione sostanzialmente affine a quella dei *Fondamenti della geometria* di D. Hilbert.

La scelta della forma in cui presentare la teoria delle proporzioni comporta una presa di posizione sull'opportunità di autofondare in qualche modo la geometria dotandola di una teoria autonoma delle grandezze di diretta ispirazione euclidea (Enriques-Amaldi) ovvero di mutuare il concetto di rapporto da una teoria dei numeri reali. La teoria dell'equivalenza e della misura viene trattata secondo il modello euclideo definendo per gradi la misura mediante procedimenti di approssimazione ad hoc per cerchi, piramidi, cilindri, sfere, senza sviluppare una teoria generale della misura ⁽⁹⁾.

L'impostazione prevalente dell'insegnamento attuale della geometria è rimasta ancora legata sostanzialmente a queste elaborazioni di fine secolo. Del resto anche la ricerca geometrica in Italia per quasi cinquant'anni si è rivolta quasi esclusivamente a quei temi della scuola geometrica italiana le cui elaborazioni più originali risalgono alla fine dell'800 o ai primissimi anni del 900.

Non è intervenuta che marginalmente la stessa riforma Gentile che ha lasciato per quanto riguardava l'insegnamento della geometria nei licei ed istituti tecnici le cose come stavano, favorendo alcune « semplificazioni » dai testi già compilati o nuove elaborazioni che si presentassero in forme più agili (Severi).

Ma se i testi erano più semplici, i collegamenti con altri campi della matematica venivano ulteriormente sacrificati e i metodi sintetici, relegati nello studio della geometria considerata come cosa a sè, finivano con l'apparire allo studente medio sempre più una gratuita esercitazione.

A partire dagli anni 30 sono avvenuti grandi cambiamenti nel campo delle matematiche pure con il sorgere di nuovi campi di ricerca come l'analisi funzionale, l'algebra « moderna », la topologia ed inoltre vi è stato un vertiginoso sviluppo delle applicazioni della matematica, da cui sono nate nuove aggregazioni disciplinari quali ad esempio la teoria dei giochi e l'informatica.

⁽⁹⁾ Un interessante confronto dei libri di testo in merito alla trattazione delle principali teorie della geometria si trova nell'articolo di G. SCORZA, *Sui libri di testo per le scuole secondarie superiori*, Suppl. Boll. « Mathesis », 1912, pp. 235-247.

A fronte di questo sviluppo vi è stata per molti anni, soprattutto in Italia, una notevole inerzia dei programmi scolastici; poi entusiasmi eccessivi ed anche intempestivi hanno determinato, in diversi paesi, scelte didattiche abbastanza avventurose; ma la riflessione su tutto questo è oggetto del dibattito in corso sull'insegnamento della matematica.

MARIA TERESA BORGATO

Istituto Matematico
Università degli Studi
Via Machiavelli 35
Ferrara