Meccanica Zero

Nicola Cavallini
nicola_cavallini@yahoo.it

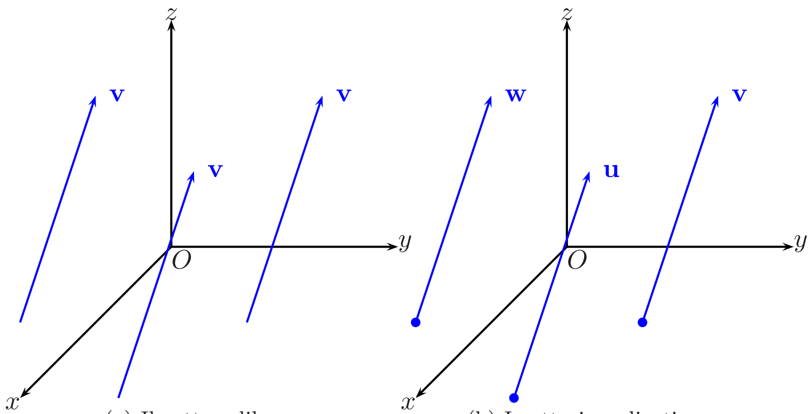
13 ottobre 2006

Con l'apertura del corso devono essere messe in chiaro alcune definizioni ed alcune precisazioni sono doverose, per questo motivo saranno presi in esame alcuni concetti di base.

Va ricordato che questo documento rappresenta dispense utili alle esercitazioni di meccanica razionale. In alcun modo possono essere paragonate ad un libro, un articolo o a qualsiasi altro prodotto editoriale. Devono essere considerate come uno strumento ditattico utile sia al docente che agli studenti. Possono essere considerate al più delle dispense scritte a mano, che per mera pigrigrizia sono scritte utilizzando il calcolatrore. Buon lavoro.

1 Algebra Vettoriale

Per fissare le idee è utilie distinguere fra *vettori liberi* e *vettori applicati*. I primi sono compiutamente descritti da modulo, direzione e verso, ai secondi va inoltre associato un punto di applicazione. Lo schema in figura 1 rappresenta questa distinzione.



(a) Il vettore libero **v**. (b) I vettori applicati **u**,**w**,**v**.

Figura 1: Rappresentatizione della differenza fra vettori liberi e vettori applicati.

Nei paragrafi che seguono saranno in sintesi presentate le più elementari operazioni fra vettori, con particolare attenzione alle singole componenti di ciascun vettore.

1.1 Somma di Vettori

Siano i vettori:

$$\mathbf{u} = u_1 \cdot \mathbf{e}_1 + u_2 \cdot \mathbf{e}_2 + u_3 \cdot \mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{v} = v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + v_2 \cdot \mathbf{e}_2 + v_3 \cdot \mathbf{e}_3$$

Il vettore somma $\mathbf{w}$ vale:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1) \cdot \mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2) \cdot \mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3) \cdot \mathbf{e}_3$$

A tal proposito si ricordi la nota regola del parallelogramma.

1.2 Prodotti con i Vettori

1.2.1 Scalare Per Vettore

$$\lambda \cdot \mathbf{u} = \lambda u_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda u_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \lambda u_3 \cdot \mathbf{e}_3$$

1.2.2 Prodotto Scalare

Il prodotto scalare fra due vettori è uno scalare λ tale che:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \lambda = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \theta,$$

il significato dei simboli è chiaro in figura 2. La precedente definizione di prodotto scalare consente di dimostrare la seguente legge di annullamanto:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |\mathbf{v}| = 0 \\ |\mathbf{w}| = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Esplicitando ciascuna componente dei vettori, applicando la proprietà distributiva del prodotto e tenendo presente la suddetta legge di annullamento si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= (v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + v_2 \cdot \mathbf{e}) \cdot (w_1 \cdot \mathbf{e}_1 + w_2 \cdot \mathbf{e}) = \\ &= v_1\mathbf{e}_1 \cdot w_1\mathbf{e}_1 + v_1\mathbf{e}_1 \cdot w_2\mathbf{e}_2 + v_2\mathbf{e}_2 \cdot w_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 \cdot w_2\mathbf{e}_2 = \\ &= v_1 w_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + v_1 w_2(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + v_2 w_1(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + v_2 w_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) = \\ &= v_1 w_1 + v_2 w_2 \end{aligned}$$

1.2.3 Prodotto Vettoriale

Se il vettore $\mathbf{u}$ è il risultato del prodotto vettoriale fra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, allora questo è definito come:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{cases} |\mathbf{u}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \sin \varphi \\ \text{direzione } \perp \text{ al piano individuato da } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{w} \\ \text{verso individuato dalla regola della mano destra} \end{cases}$$

Dalla definizione è immediato dedurre le leggi di annullamento:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |\mathbf{v}| = 0 \\ |\mathbf{w}| = 0 \\ \varphi = 0,\ k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

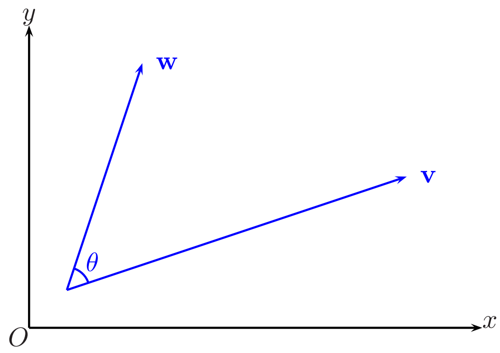


Figura 2: Schema per il prodotto scalare fra due vettori liberi.

Di nuovo sono presi in considerazione $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ nella loro singole componenti, viene applicata la propietà distributiva del prodotto e si tengono presenti le suddette leggi di annullamento:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \times \mathbf{w} &= v_1\mathbf{e}_1 \times w_1\mathbf{e}_1 + v_1\mathbf{e}_1 \times w_2\mathbf{e}_2 + v_1\mathbf{e}_1 \times w_3\mathbf{e}_3 + \\
&+ v_2\mathbf{e}_2 \times w_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 \times w_2\mathbf{e}_2 + v_2\mathbf{e}_2 \times w_3\mathbf{e}_3 + \\
&+ v_3\mathbf{e}_3 \times w_1\mathbf{e}_1 + v_3\mathbf{e}_3 \times w_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 \times w_3\mathbf{e}_3 = \\
&= v_1w_1\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + v_1w_2\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + v_1w_3\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + \\
&+ v_2w_1\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + v_1w_2\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + v_2w_3\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + \\
&+ v_3w_1\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + v_3w_2\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 + v_3w_3\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \\
&= v_1w_2\mathbf{e}_3 - v_1w_3\mathbf{e}_2 - \\
&- v_2w_1\mathbf{e}_3 + v_2w_3\mathbf{e}_1 + \\
&+ v_3w_1\mathbf{e}_2 - v_3w_2\mathbf{e}_1 = \\
&= (v_2w_3 - v_3w_2)\mathbf{e}_1 + \\
&+ (v_3w_1 - v_1w_3)\mathbf{e}_2 + \\
&+ (v_1w_2 - v_2w_1)\mathbf{e}_3 +
\end{aligned}$$

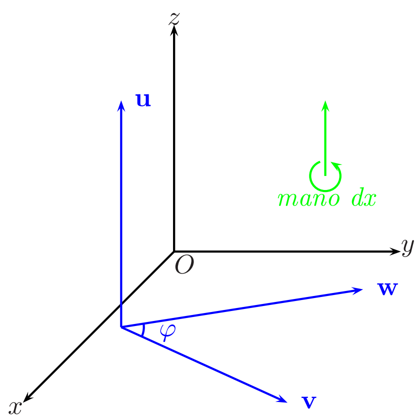


Figura 3: Schema per la definizione del prodotto vettoriale.

Esercizio Proposto 1 *Provare che $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ è pari al determinante sibolico:*

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

2 Operazioni sui Vettori Applicati

Il vettore $\mathbf{v}$ applicato nel punto P è detto *vettore applicato* $\{P, \mathbf{v}\}$. Si dice *Momento del vettore applicato* $\{P, \mathbf{v}\}$*, rispetto al polo* O, il vettore:

$$\mathbf{M}_O = (P - O) \times \mathbf{v}$$

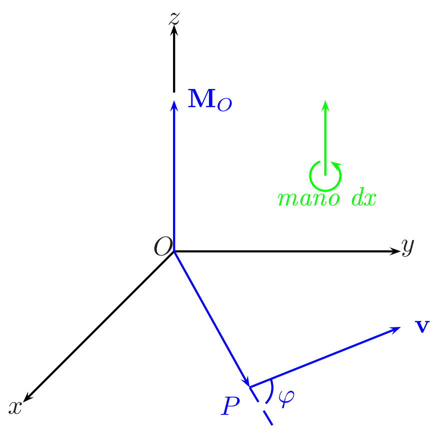


Figura 4: Schema per la definizione di momento applicato.

Esercizio 1 *Un ciclista in curva piega la bicicletta di $\varphi = 20° = \frac{\pi}{9}$. Il pedale è lungo 25 cm, il modulo F della forza $\boldsymbol{F}$ che questi riesce ad imprimere vale:*

$$F = \begin{cases} 200\ N\ se\ 0 < \theta < \pi \\ 0\ se\ \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

dove θ è l'angolo che il pedale forma con l'asse verticale $\tilde{z}$. Si calcoli il momento che il il ciclista imprime al variare di θ secondo le coordinate del sistema di riferimento $Oxyz$, l'assetto del problema è schematizzato in figura 5.

Soluzione: $0 < \theta < \pi$: Per semplificare i calcoli in primo luogo si passa dalla base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, del sitema di riferimento $Oxyz$, alla base $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$, del sistema $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \tilde{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \tilde{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \tilde{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \tilde{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Ora è sufficiente calcolre le grandezze nel sistema di riferimento ruotato:

$$\tilde{\mathbf{F}} = -F \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3,$$

$$(\tilde{P} - O) = p \sin\theta \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1 + p \cos\theta \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3,$$
$$\tilde{\mathbf{M}}_O = (\tilde{P} - O) \times \tilde{\mathbf{F}} = Fp \sin\theta \cdot \tilde{\mathbf{e}}_2.$$

Una volta calcolato $\tilde{\mathbf{M}}_O$ e la matrice di cambamento di base A è immediato calcolare il momento $\mathbf{M}_O$

$$\tilde{\mathbf{M}}_O = A \cdot \mathbf{M}_O \Rightarrow \mathbf{M}_O = A^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_O$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ Fp\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = Fp\sin\theta\cos\varphi \cdot \mathbf{e}_2 - Fp\sin\theta\sin\varphi \cdot \mathbf{e}_3$$

Concludendo:

$$\mathbf{M}_O = \begin{cases} 46,98 \sin\theta \mathbf{e}_2 + 17.11 \sin\theta \mathbf{e}_3 & \text{Nm} \quad \text{se } 0 < \theta < \pi \\ 0 & \text{Nm} \quad \text{se } \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

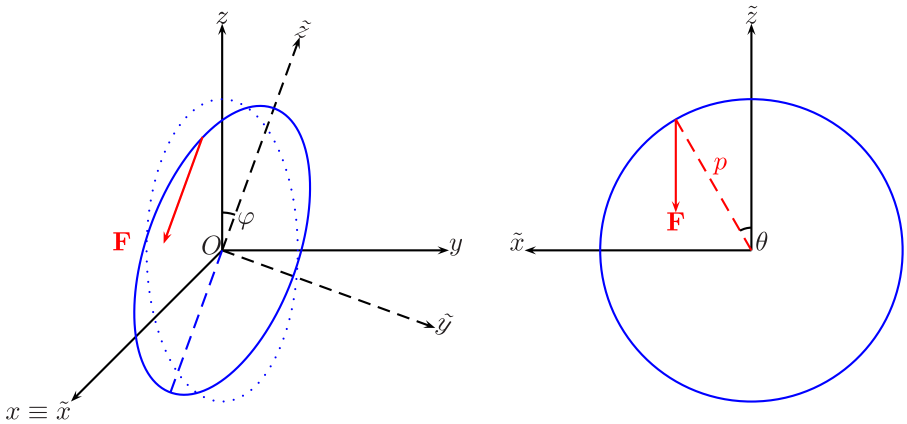


Figura 5: Rappresentazione schematica della corona di un ciclista in curva.

3 Sistemi di Vettori Applicati

Un sistema $S = \{(P_i, \mathbf{v}_i), i = 1 \ldots n\}$ non è altro che un insieme di vettori applicati. Si prenda in considerazione il momento ripetto al polo O di tale sistema:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{1=1}^{n} (P_i - O) \times \mathbf{v}_i.$$

Se $P_i \equiv P \ \forall i$, allora:

$$\mathbf{M}_O = (P - O) \times \sum_{1=1}^{n} \mathbf{v}_i = (P - O) \times \mathbf{R}.$$

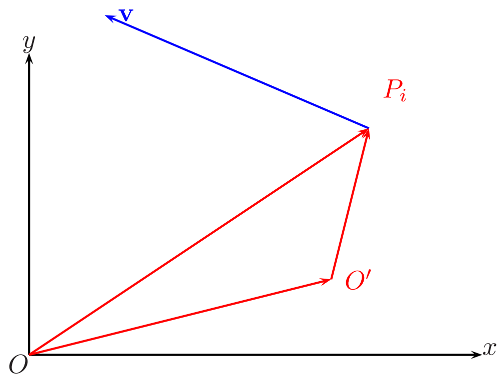


Figura 6: Schema per il cambiamento di polo.

L'ultima proposizione prende il nome di *Teorema di Varignon*.

Si prenda in considerazione un nuovo $S = \{(P_1, \mathbf{v}_1), i = 1 \dots n\}$. La figura 6 mostra il generico vettore componente il sistema. Quanto vale il momento del sistema ripetto al polo O' in funzione di $\mathbf{M}_O$? In primo luogo, dalla regola del parallelogramma, si ha:

$$(P_i - O') + (O' - O) = (P_i - O).$$

Il momento $\mathbf{M}_{O'}$ vale:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{O'} &= \textstyle\sum_i (P_i - O') \times \mathbf{v}_i = \\
&= \textstyle\sum_i ((P_i - O) - (O - O')) \times \mathbf{v}_i = \\
&= \textstyle\sum_i (P_i - O) \times \mathbf{v}_i - \sum_i (O' - O) \times \mathbf{v}_i = \\
&= \mathbf{M}_O - (O' - O) \times \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Con questo semplice esercizio si è ottenuta la *Legge di Variazione del Momento di un Sistema di Vettoria Aplicati Rispetto al Polo*. Utilizzando la legge appena ricavata è possibile affermare che il momento del generico $S = \{(P_i, \mathbf{v}_i), i = 1 \dots n\}$ non dipende dal polo se e solo se la risultante di R è nulla. Fra tutti i sistemi di vettori applicati con risultante nulla ve ne sono poi alcuni particolarmente fasmosi: le *coppie*. Questi sitemi sono del tipo:

$$S = \{(P_1, \mathbf{v}), (P_2, -\mathbf{v})\}$$

e si definiscono:

- $|v|$ = *intensità* della coppia.
- *braccio*: distanza fra le rette applicazione, non fra i punti di applicazione!!![1]

Definizione 1 *Sia il sistema di vettori applicati $S = \{(P_i, \boldsymbol{v}_i), i = 1 \dots n\}$, r una retta di versore $\boldsymbol{e}_r$ ed O un punto qualsiasi di r. Si dice* Momento Assiale di S Rispetto ad r *lo scalare:*

$$M_r = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{e}_r.$$

Esercizio 2 *Si dimosrti che M_r non dipende dal polo rispetto cui è calcolato il momento $\boldsymbol{M}$.*

[1] Un errore di questo tipo comporta la bocciatura al corso di Meccanca Razionale, ma ben più grave comporta la fustigazione al corso di Scienza delle Costruzioni e la derisione eterna al corso di Tecnica delle Costruzioni.

Soluzione: Sia il momento $\mathbf{M}_O$ del sistema S e sia il suo momento assiale calcolato ripetto alla retta r. Si prenda in considerazione il momento $\mathbf{M}_{O'}|O' \in r$:

$$M_r = \mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{e}_r,$$

Tenendo presente che $[O, O'] \in r$ è prossibile scrivere rispetto ad una generica origine della retta orientata:

$$(O' - O) = (\lambda' - \lambda) \cdot \mathbf{e}_r.$$

Applicando, infine, la legge di variazione del polo si ottiene:

$$M_r = \mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_r - \underbrace{((\lambda' - \lambda) \cdot \mathbf{e}_r \times \mathbf{R})}_{\perp \mathbf{e}_r} \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_r.$$

Esercizio 3 *Determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè M_r di $(P, \boldsymbol{v})$, con $|v| \neq 0$, sia nullo.*

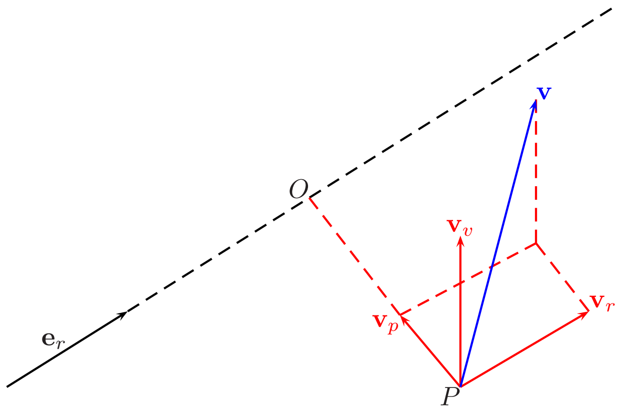


Figura 7: Schema per il calcolo del momento assiale.

Soluizone: Scomponiamo il vettore $\mathbf{v}$ nella sue tre componenti $\mathbf{v}_r$, $\mathbf{v}_p$, $\mathbf{v}_v$, rispettivamente parallela, perpendicolare ad $\mathbf{e}_r$ ed ortogonale al piano individuato dalla retta r e dal punto di applicazione P. Si applichi la definizione di momento assiale e si sfrutti l'arbitrarietà di O imponendo $(P - 0) = \alpha \mathbf{e}_p$:

$$\begin{aligned} M_r &= ((P - O) \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_r = \\ &= \underbrace{(\alpha \mathbf{e}_p \times \mathbf{v}_r) \cdot \mathbf{e}_r}_{A\mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_r = 0} + \\ &+ \underbrace{(\alpha \mathbf{e}_p \times \mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{e}_r}_{0 \cdot \mathbf{e}_r = 0} + \\ &+ (\alpha \mathbf{e}_p \times \mathbf{v}_v) \cdot \mathbf{e}_r = \alpha v_v. \end{aligned}$$

Dunque si può affermare che condizione necessaria e sufficiente affinchè il momento assiale di un vettore sia nullo è che, o il punto di applicazione giaccia sulla retta $r \Rightarrow \alpha = 0$, oppure che retta e vettore siano complanari $\Rightarrow v_v = 0$

Definizione 2 *Si definisce* ***Asse Centrale*** A_c *la retta luogo dei poli rispetto i quali il momento* $\boldsymbol{M}_P$ *del dato sistema* S *è puramente parallero alla risultante* $\boldsymbol{R}$*:*

$$\textit{se } P \in A_c \Rightarrow \boldsymbol{M}_P \times R = 0$$

Esercizio 4 *Si dimostri che* $A_c \parallel \boldsymbol{R}$

Soluzione: Si sfrutti la definizione di asse centrale, dunque se $P \in A_c$ allora:

$$\mathbf{M}_P \times \mathbf{R} = 0.$$

Utilizzando poi la legge di cambiamento di polo, si ha:

$$(\mathbf{M}_O - (P-O) \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R} = 0$$
$$\mathbf{M}_O \times \mathbf{R} - ((P-O) \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R}$$

Ricordando che:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u},$$

si ottiene:

$$P - O = \underbrace{\frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O}{R^2}}_{\text{“}intercetta\text{''}} + \underbrace{\frac{(P-O) \cdot \mathbf{R}}{R^2}\mathbf{R}}_{direzione \parallel \mathbf{R}},$$

Definizione 3 *Si definisce invariante scalare del dato sistema* S*, la quantità:*

$$I = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R}.$$

Per mostrare che I *è il medesimo per ogni polo, è sufficente applicare la legge di variazione del polo:*

$$\boldsymbol{M}_{O'} \cdot \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{M}_O - (O'-O) \times \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R} - \underbrace{(O'-O) \times \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{K}_{\perp \boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R} = 0}$$

4 Sistemi Equivalenti

Due sistemi di vettori applicati, S ed S', sono **equivalenti**, se e solo se:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}', \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O \quad \forall\, O$$

Questa definizione parrebbe poco utile a causa della scrittura $\forall\, O$, con un piccolo sforzo è possibile dimostrare che, condizione necessaria e sufficiente, affinché due sistemi siano equivalenti, è che esista *almeno* un O, tale per cui:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}', \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O$$

Dimostrazione: *Condizione Necessaria,* è ovvio che se i due sistni sono equivalenti, allora esiste almeno un polo rispetto a cui risultante e momento sono uguali.
Condizione Sufficiente, se esiste O tale per cui:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}', \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O,$$

allora si prenda in considerazione un generico O' e si scriva:

$$\mathbf{M}'_{O'} = \mathbf{M}'_O - (O'-O) \times \mathbf{R}' = \mathbf{M}_O - (O'-O) \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_{O'},$$

Dunque se esiste ameno un punto per il quale le risultanti ed i momenti siano equivalenti, allora i momenti sono equivalenti rispetto un qualsiasi altro punto.

4.1 Riduzione di un Sistema di Vettori Applicati

Lo scopo di questa sezione è: *dato un* $S = \{(P_i, \boldsymbol{v}_i), i = 1 \dots n\}$*, costruire un sistema* S' *ad esso* ***equivalente*** *in modo che* S' *sia il più semplice possibilie.* A questo proposito ci sono due propietà la cui dimostrazione è banale:

- Un sistema di vettori applicati è sempre equivalente ad un sistama formato dalla sua risultatante $\mathbf{R}$ e da una coppia di momento $\mathbf{M}_O$, pari al momento del sistema stesso.
- Un sistema di vettori applicati è sempre equivalente ad un sistema di due vettori applicati, di uno dei quali si può fissare ad arbitrio il punto di applicazione.

Ma se si prdende in considerazone il caso particolare di un $S = \{(P_i, \mathbf{v}_i), i = 1 \dots n\}$, caratterizzato da invariante scalare nullo:

$$I = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0,$$

allora il sistema equivalente, o *ridotto*, è costituito dalla sola $\mathbf{R}$ applicata in un generico punto dell'asse centrale.

Dimostrazione: Si intende provare che, se $S = \{(P_i, \mathbf{v}_i), i = 1 \dots n\}$, è caratterizzato da $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_O$, taliche:

$$I = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0,$$

allora $S = S' | S' = \{\mathbf{R}, P \in A_c\}$. Dire che $I = 0$ equivale a dire che la componente di $\mathbf{M}_O$ parallela a $\mathbf{R}$ ($\mathbf{M}_{O\parallel}$) è nulla, per definizione stessa di prodotto scalare. Se calcolo $\mathbf{M}_K$ con $K \in A_c$, allora dovrà essere:

$$\mathbf{M}_K \parallel \mathbf{R},$$

ma è stato appena dimostrato la componente del momento parallela alla risultante è nulla ($I = 0$), dunque $\mathbf{M}_K = 0$. Ma anche il momento risultante del sistema S' rispetto ad un qualsiasi punto dell'asse centrale è nullo per costruzione. In conclusione i due sistemi hanno risultanti uguali per definizione, e momenti entrambi nulli in almeno un un punto, dunque i due sistemi sono equivalenti.

Esercizio 5 *Ridurre il seguente sistema di vettori:*

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 & P_1(0,0) \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 & P_2(2,0) \\ \mathbf{v}_3 = 3\mathbf{e}_2 & P_3(-1,-1) \end{array}$$

Soluzione: Si calcolino in primo luogo la risultante $\mathbf{R}$ ed il momento risultante rispetto all'origine $\mathbf{M}_O$:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{3} = \mathbf{v}_i = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{3} (P_i - O) \times \mathbf{v}_i = -\mathbf{e}_3$$

Ora ci si chiede se è possibile ridurre il sistema alla sola risultante applicata in un generico punto appartenente all'asse centrale:

$$I = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0.$$

Dato che $I = 0$ allora per ridurre il sistema non resta che calcolare l'asse centrale. Per farlo si prenda in considerazione il genrico punto:

$$P = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3,$$

e si calcoli il momento rispetto a tale punto:

$$\mathbf{M}_P = \sum_{i=1}^{3}(P_i - P) \times \mathbf{v}_i =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -x & -y & -z \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2-x & -y & -z \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -1-x & -1-y & -z \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -z\mathbf{e}_1 + 3z\mathbf{e}_2 + (3y - 1 - 3x)\mathbf{e}_3.$$

Ora è sufficiente sfruttare la definizione di asse centrale secondo cui $\mathbf{M}_P \parallel \mathbf{R}$, dunque imporre che sia nulla la componente di $\mathbf{M}_P$ secondo $\mathbf{e}_3$:

$$y = x + \frac{1}{3}$$

ed imporre la proporzionalità fra le componenti secondo $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$:

$$\frac{-z}{3} = \frac{3z}{3} \Rightarrow z = 0 \quad \text{oppure} z = -3.$$

Entrambe le soluzioni sono valide, per comodità si scegle:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = x + \frac{1}{3}, \end{cases}$$

dunque il sistema è equivalente alla sola risltante applicata ad un generico punto della suddetta retta.

Esercizio Proposto 2 *Ridurre il seguente sistema di vettori:*

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 & P_1(0,0) \\ \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_2 & P_2(2,0) \\ \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 & P_3(0,-2) \\ \mathbf{v}_4 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 & P_4(6,2) \end{array}$$

Risultati: Rispetto al punto $A = (-2, 2)$, $\mathbf{M}_A = 12\mathbf{e}_3$, la risultante vale: $\mathbf{R} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$. Il sistema può poi essere ridotto alla sola risultante applicata ad un punto della retta:

$$y = x - 2.$$

Esercizio Proposto 3 *Ridurre il seguente sistema di vettori:*

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 & P_1(1,2) \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 & P_2(1,2) \\ \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 & P_3(2,0) \\ \mathbf{v}_4 = -5\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 & P_4(0,1) \end{array}$$

Risultati: Dal momento che $\mathbf{R} = 0$, il sistema è equivalente al solo $\mathbf{M}_O = -6\mathbf{e}_3$

5 Sistemi di Vettori Paralleli

Si prenda in cosiderazione un sistema di vettori paralleli, $S_p = \{(P_i, \mathbf{v}_i)i = 1 \ldots n\}$ caratterizzato da $\mathbf{R} \neq 0$, di cui la figura 8 può rappresentare un esempio. Dal momento che le singole componenti sono parallele fra loro risuterà:

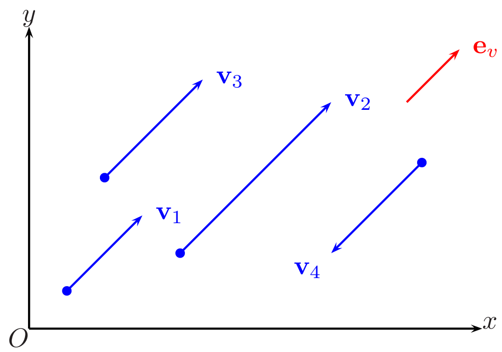


Figura 8: Sistema di vettori paralleli.

$$\mathbf{M}_O \perp \mathbf{R} \; \forall \; O \quad \Rightarrow \quad I = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0,$$

dunque il sistema può essere ridotto alla sola risultante applicata ad un punto qualsiasi dell'asse centrale. Dato il sistema di vettori applicati e paralleli S_p è possibile definire un particolare punto detto **centro**:

Definizione 4 *Dato un sistema di vettori applicati paralleli $S_p = \{(P_i, \boldsymbol{v}_i)i = 1 \ldots n\}$ con $\boldsymbol{R} \neq 0$, si definisce **centro** il punto C tale per cui:*

$$C - O = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i(P_i - O)}{R} \quad \textit{dove} \quad R = |\boldsymbol{R}|.$$

È immediato dimostrare che il centro è indipendente dall'origine rispetto cui è calcolato. Basta considerare $C - O' = \ldots$. Più interessante è capire come varia l'asse centrale di S_p al variare di $\mathbf{e}_v$, versore delle componennti di S_p. Due considerazioni (ovvero un sillogismo):

- $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{R} \; \forall \; O$ dal momento che il sistema è un sistema di vettori fra essi paralleli.
- $\mathbf{M}_C \parallel \mathbf{R} \; \forall \; C \in A_c$ per definizione di asse centrale.

Dunque, se $\mathbf{M}_C$ deve essere contemporaneamente parallelo ed ortogonale ad $\mathbf{R}$, esso deve essere nullo, quindi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_C &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(P_i - C) \times \mathbf{v}_i = \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n}((P_i - O) + (O - C)) \times \mathbf{v}_i = \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i(P_i - O) \times \mathbf{e}_v + R(O - C) \times \mathbf{e}_v = \\
&= \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i(P_i - O) + R(O - C)\} \times \mathbf{e}_v = 0
\end{aligned}$$

Utilizzando la legge di annullamento del prodotto vettoriale:

$$C - O = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i(P_i - O)}{R},$$

che altri non è che la definizione di centro di S_p. Dunque $C \in Ac \; \forall \; \mathbf{e}_v$, dunque l'asse centrale ruota intorno a C.

Da questa osservazione dipendono alcune proprietà del centro di un sistema di vettori paralleli, la cui dimostrazione è lasciata al lettore (in particolare al lettore del libro scritto dal Prof. V. Coscia):

- Il centro C di un sistema S_p con $\mathbf{R} \neq 0$ non cambia se si pensa S_p scomposto in più sistemi S_{p_i} ciascuno con $\mathbf{R}_i \neq 0$, ogniuno dei quali venga poi sostituito dal suo risultante ed aplicato nel relativo centro.

- Se i punti di applicazione dei vettori $\mathbf{v}_i$ di S_p con $\mathbf{R} \neq 0$ giacciono tutti sulla medesima retta r (o sul piano α), allora anche $C \in r$, (rispettivamente $C \in \alpha$).

- Il centro C del sistema di vettori applicati concordi S_p a risultante non nullo è interno ad una qualsiasi superficie ciusa convessa che racchiuda l'origine di tutti i vettori di S_p.

La prima di queste proprietà è detta distributiva, le altre sono proprietà di ubicazione.

Esercizio Proposto 4 *Studiare la posizione del centro C del sistema di vettori paralleli con $\boldsymbol{R} \neq 0$ costituito dai soli $(P_1, \boldsymbol{v}_1)$ e $(P_2, \boldsymbol{v}_2)$.*

6 Baricentri di Sistemi Materiali

Quando ad una regione dello spazio è possibile associare una grandezza descritta da un numero reale positivo m detto ***massa***, allora si ha un ***sistema materiale***. Urge in primo luogo una distinzone:

- **Sistemi materiali discreti** quando la massa è concentrata in una serie dipunti, definiti *punti materiali*.

- **Sistemi materiali continui** quando la massa è distribuita su una regione dello spazio Ω.

La definizione di sistemi materiali continui impone una domanda: quanta massa è associata a ciascun punto dello spazio? Cui è semplice rispondere definendo la funzione *densità*, che descrive la quantità di massa dm nel volume dV per ogni punto P:

$$\rho(P) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

Definizione 5 *Si dice **baricentro** del sistema matriale S il punto:*

$$G - O = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(P_i - O)}{m}$$

nel caso di un sistema materiale discreto; il punto:

$$G - O = \frac{1}{m} \int_{\Omega} \rho(P)(P - O) dV$$

nel caso di un sistema materiale continuo.definite in precedenza

Confrontando le definizoni di *baricentro* e di *centro di un sistema di vettori applicati*, è pssibile dimostrare come siano di nuovo applicabili le proprietà distrubutiva e di ubicazione.

Definizione 6 *Il piano π (o la retta s) si dice* ***piano diametrale coniugato*** *(o retta diametrale conugata)* ***alla direzione*** *r se ad ogni $P \in S$ corrisponde un P' tale che PP' sia parallelo ad r e PP' sia diviso a metaàè dal piano (retta) diametrale. I punti P e P' si dicono coniugati. Quando $r \perp \pi$ ($s \perp r$) si dirà* ***piano*** *(o retta)* ***di simmetria materiale****.*

Se un sistema materiale è caratterizzato da un piano diametrale π, allora si può pensare il sistema costituita da più sottosistemi ogniuno costituito dalle coppie di punti materiali, il cui risultante $\in \pi$. Per le propriatà di ubicazione, segue, che il baricentro del siastema materiale $\in \pi$.

Esercizio Proposto 5 *Calcolare il baricentro dei sistemi materiali rappresentati nelle figure che seguono.*

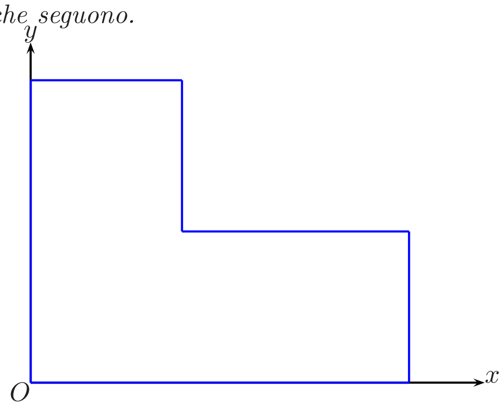


Figura 9: Il baricentro di una squadra?

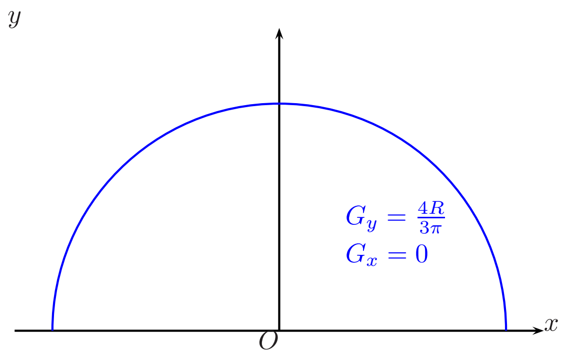


Figura 10: Il baricentro di un semidisco?